3E-10

固有の識別番号を仮定しないネットワークにおけるリーダー選挙問題

山下 雅史 広島大学工学部

1．はじめに

ネットワークはプロセッサの集合とプロセッサ間を結ぶ通信リンクの集合から構成される．従来，プロセッサが固有の識別番号をもつという仮定の下で，ネットワーク上の様々な問題，例えば，リーダー選挙問題，生成木構成問題，トポロジー認識問題などを効率良く解く（分散）アルゴリズム（あるいはプロトコル）に関する研究が数多くなされてきた（たとえば，萩原［2］はその概説）．事実，プロセッサが固有の識別番号をもつとすると，ネットワーク・トポロジーやプロセッサ数などのネットワークの属性に関する情報が全く利用できないと仮定しても，任意のネットワークに対して，上に挙げたそれぞれの問題を解くアルゴリズムが容易に構成でき，問題はいかに効率の良いアルゴリズムを構成するかという一点に集約される．

プロセッサが識別番号をもたない（あるいは全てのプロセッサが同じ識別番号をもつ）ようなネットワークをアノニマス・ネットワークと呼ぶ．アノニマス・ネットワークに対してはAngluin［1］やJohnsonとSchneider［3］が（異なるモデルを用いて）リーダー選挙問題を解くアルゴリズムが存在しないネットワークが存在することを示し，アルゴリズムが存在するための必要条件や十分条件について考察した．また，YamashitaとKameda［4］は以下の3つの場合，（1）ネットワークのプロセッサ数の上限が既知，（2）ネットワークのプロセッサ数が既知，（3）ネットワークのトポロジーが既知，について上に挙げたそれぞれの問題が解けるネットワークのクラスを明らかにした．

本稿ではプロセッサが固有の識別番号をもつと仮定できないようなネットワークにおいてリーダー選挙問題が解けるための条件を考察する．従って，本稿の結果はアノニマス・ネットワークに対する同様の結果を特別な場合として含む．

直感的に言えば，リーダーが選挙できるための必要十分条件は何らかの意味で特別なプロセッサが存在することである．そこで，プロセッサ間の『類似（similarity)』関係を［4］で用いたプロセッサのビューと呼ばれる概念によって定式化し，任意のプロセッサに対して類似なプロセッサが存在するようなネットワークを特徴付ける．類似関係にある二つのプロセッサは同じ結果を出力する可能性があることが示せ，上記の特徴付けはネットワークの上でリーダーが選挙できるための必要十分条件となっている．

2．モデル

n台のプロセッサとプロセッサ間を結ぶ双方向通信リンクとから構成される非同期ネットワークを考える．プロセッサは固有の識別番号をもたないかもしれないので，便宜的にプロセッサを区別するために$v_1,\cdots,v_n$と番号付ける．ただし，この番号をプロセッサは知らない．通信はリンクを介してメッセージを送ることで行われる．プロセッサは接続されているそれぞれのリンクに対し送受信用のポートをもち以下の命令を利用できる．

(a) send(M,j)：ポートjよりメッセージMを送る．

(b) receive(M,j)：ポートjからメッセージMを受取る．

各プロセッサは各ポートに対して十分長い入力キューをもつ．send命令を実行すると，メッセージは有限時間内に誤りなく目的のポートの入力キューに置かれる．しかし，メッセージの伝送遅延時間の上下限値についてはどのような仮定も設けない．receive命令によってポートjの入力キューの先頭におかれているメッセージを取出すことができる．対応するメッセージが存在しないならば，ある特別な記号がMに代入される．

プロセッサは全て同じアルゴリズムを実行する．プロセッサは停止しないかぎり有限時間内に次の命令を実行するが，プロセッサの相対的な実行速度に関する仮定は設けない．ネットワークは故障しないものと仮定する．

ネットワークNは無向，連結，単純なグラフG＝（V，E）とプロセッサvの識別番号を定める関数Iの対（G，I）でモデル化できる．

リーダー選挙問題（LEP）は，問題が解決したとき選ばれたリーダーは選ばれたことを知っており，それ以外のプロセッサは選ばれなかったことを知っているという意味で，ある一つの節点を選挙する問題である．

LEPを解くアルゴリズムAは任意のネットワークN上で動き，LEPが解けるかどうか決定し，解けるならリーダーを選挙し，解けないならばそのことを出力するものとする．一般には，アルゴリズムの振舞はプロセッサ間の通信タイミングとポートのラベル付けに依存して決まる．そこでN(A)をどのような通信タイミング，お

Leader Election Problem on a Network whose Processors may not have Unique Identity Numbers

Masafumi YAMASHITA Hiroshima University

よびポート・ラベリングのもとでも，AによってLEPが解かれるようなネットワークの集合と定義する．従って，NがN(A)に含まれなくても，偶然にAがN上でLEPを解くかもしれない．

3．ビューとLEP

deg(v)はプロセッサvの次数を表すものとする．G＝(V,E)とすると，Gのラベリング(または，ポート番号付け)は関数集合s＝{s[v]：v∈V}である．ここで，各vに対して，s[v]はvについている枝の集合から正整数の集合{1,2,…,deg(v)}への全単射である．

Gのラベリングsを固定し，v_1, …, v_dをvに隣接する節点とする．vのビュー$T_s(v)$をラベル付き，根付き無限木として次のように定義する． 最初に，$T_s(v)$はvに対応する根節点をもつ．根節点にはI(v)，すなわちvの識別番号がラベル付けられる．各Gにおけるvに隣接する節点v_iに対して，$T_{s(v)}$は節点x_iとラベルl(v, v_i)をもつ根節点からx_iへの枝をもつ．ただし，

$$l(v,v_i)=(s[v](v,v_i),\ s[v_i](v,v_i)).$$

x_iはv_iに対する$T_s(v)$の根節点となる．$T_s(v)$の各節点はVの要素でラベル付けされていないことに注意する．文脈から明らかなとき，$T_s(v)$からsを省略しT(v)と記す．二つのビューTとT'が)同形であるならば，それらは類似であると言い，T≡T'と書く．Γ_sを{$T_s(v)$：v∈V}，すなわち，類似でないすべてのビューの集合とする．すべてのT∈Γ_sに対して，集合{v：T(v)≡T}の要素数は同じであることが示される．そこで以下のように定義する．

$$c_s=|\{v:T(v)\equiv T\}|.$$

$$\gamma_N=\max\{c_s：s\text{はラベリング}\}.$$

直感的に言えば，プロセッサvのビューT(v)はvがメッセージを交換することにより他のプロセッサから最悪の場合得ることのできる最大の情報を示している．

定理3．1 ネットワークN上でLEPを解くアルゴリズムが存在するならばγ_N＝1である． □

γ_N＝1をみたすネットワークの集合を**H**とする．

定理3．2 プロセッサ数nが各プロセッサに既知とする．このとき，LEPを解く以下の条件を満たすアルゴリズムAが存在する．

(a) N(A)＝**H**.

(b) メッセージ複雑度はO(n^2m)，ここにmはリンクの総数． □

定理3.3 ネットワークNがγ_N=kであるための必要十分条件は， Vを以下の4条件を満たすようにg=n/x個の部分集合V_1,…,V_gに分割できるような整数xの最大値がkとなることである．

(1) 1≦i≦gなる任意のiに対して，|Vi|=x.

(2) 1≦i≦gなる任意のiに対して，G_{Vi}は{1,2}-因子分解可能．ただし，G_UはU(⊆V)によってGから誘導される誘導部分グラフを示す．

(3) 1≦i，j≦g かつi≠jなる任意のiとjに対して，$K_{Vi,Vj}$=(Vi∪Vj, E∩(Vi×Vj))は正則2部グラフ．

(4) 1≦i≦gなる任意のiに対して，u，v∈V_iならば，I(u)＝I(v)．□

定理3．1および3．2から，LEPを解くために必要十分な情報はプロセッサ数である．しかし，一般に大規模ネットワークでは各時点でそのネットワークに参加しているプロセッサ数を正確に把握することは困難であり，より少ない情報からリーダーが選挙できることが望ましい．そこで，プロセッサ数nのある上限bが既知であるという条件のもとでLEPが可解となるネットワークのクラスを明らかにすることも重要な問題である．

定理3．4 プロセッサ数の上限bが各プロセッサに既知とする．このとき，あるネットワークNに対してLEPを解くアルゴリズムが存在するための必要十分条件はNが集合**F**＝{N＝(G，I)：γ_N＝1かつGは木}に属していることであり，しかも，以下の条件を満たすアルゴリズムAが存在する．

(a) N(A)＝**F**.

(b) メッセージ複雑度はO(b^2m)，ここにmはリンクの総数． □

最後にいつもご指導頂く広島大学工学部阿江忠教授，京都大学工学部茨木俊秀教授並びにサイモン・フレーザー大学亀田恒彦教授に感謝する．本研究は一部文部省科学研究費により行われた．

参考文献

[1] D.Angluin: Local and global properties in networks of processors, Proc.12th ACM Symposium on Theory of Computing, Los Angeles, California (1980) pp.82-93.

[2] 萩原：分散環境における問題解法のメッセージ複雑度について，第8回数理計画シンポジウム論文集，広島(1987)pp.41-50.

[3] R.E.Johnson and F.B.Schneider: Symmetry and similarity in distributed systems, Proc.4th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing, Minaki, Ontario (1985) pp.13-22.

[4] M.Yamashita and T.Kameda: Computing on an anonymous network, Proc.7th ACM Symposium on Principles of Distributed Computing, Tronto, Ontario (August 1988).