5D-4

区分的代数曲線による平面曲線近似

馬渡鎮夫， 隆 雅久， 豊田吉顯
青山学院大学

1． はじめに

コースティック曲線，モアレ縞，光弾性縞等の光学パターンについての計測データを何らかの平面曲線群の実現値としてとらえ，画像処理によってその近似曲線群を構成する場合，光の回折や干渉，測定機器からの制約等により，それらの曲線上の点がまばらにしか得られないことが多い．しかも計測データには種々な雑音を含んでいるので，得られた点のバラツキも種々様々である．こうした状況においては画像処理によって得られた離散点を平滑化し，それらのまばらさの度合いに応じてなんらかの平面曲線を内挿または外挿しながら，対象とする平面曲線群の特徴を保存している近似曲線群を効率良く構成することが望まれる．しかし，従来の平滑化法やスプライン関数による平面曲線の当てはめ[1,2,3]においては，パラメータ選択の困難さや外生湾曲等の難点があり，これらによっては上の問題を適切に処理できないように思われる．

本研究は，対象としている光学パターンの計測データからそのパターンを近似的に表現する平面曲線群をパーソナルコンピュータを使って自動的に構成する問題を念頭におき，平面曲線群を有限個の単純弧に，更に各々の単純弧を有限分岐に分割した後，それぞれの分岐に適当な条件を満たす平面代数曲線を当てはめることにより，パラメータ選択の困難さや外生湾曲という難点が生じない新しい平面曲線近似法を確立することを試みるものである．

2． 従来の平面曲線近似法

従来のスプライン関数による平面曲線近似法においては，平面連続曲線Cを点集合；

$$C=\{(x(s),y(s)):\alpha\leqq s\leqq\beta\} \qquad (2.1)$$

で表し，二つの連続関数；

$$s\to x(s),\quad s\to y(s)\quad s\in[\alpha,\beta] \qquad (2.2)$$

をそれぞれスプライン関数によって近似する．この方法には次の二つの難点が存在している[1]．

（1）外生湾曲

(2.2)の連続関数を与えられた点の集合によって近似するとき，近似曲線は与えられた点を通るが，しばしば意図せぬ振動すなわち外生湾曲（extraneous inflection）を引き起こす．

（2）パラメータの選択

(2.2)のパラメータsの選択として，

①x（s）＝sまたはy（s）＝sすなわちxy直交座標のいずれか一方を選ぶ，

②sを弧長とする，

等がある．

しかし，①は雑音に非常に敏感な部分がある．②は比較的良好であるが，雑音を含むデータから目的とする曲線の弧長を知ることは一般には不可能であり，実際の数値計算には使い難い．これらの難点を解消するために，種々な工夫[1,2]が成されているが，本質的な解決までに至っていないように思われる．

3． 本研究における平面曲線近似法

（1） 対象としている光学パターンは，有限個の単純弧が有限個の点で交わり，その和集合が連結であるような平面曲線群，すなわち通常曲線（ordinary curve）であり，計測データはこれらの曲線群の実現値であり，しばしば雑音を含んでいるものとしてとらえる．そして，その通常曲線中の任意の一つの単純弧（simple arc）Cとこれに対する計測データの集合Qにより，Cに対する近似曲線Fを次のようにして構成する．

（2） 単純弧Cは，xy直交座標系の定められた平面矩形領域$I_x\times I_y\subset R^2$の内部で定義されており，Cの弧長sによる助変数表示；

$$s\to C(s)\qquad s\in[0,L] \qquad (3.1)$$

においてC^2級であり，その各点においてFrenet標構C(s) $\xi_1\xi_2$が定められている．そして，Cをn個の分岐（branch）（$1\leqq n<\infty$）C_1，C_2，・・・，C_n；

$$s\to C_k(s)\qquad s\in[\alpha_k,\ \alpha_{k+1}] \qquad (3.2)$$
$$(k=1,2,\cdots,n;\ \alpha_1=0,\ \alpha_{n+1}=L)$$

に分割する．

（3） $f_k(x,y)$ (k=1,2,…n)はそれぞれ変数x，yのm次多項式とし(m≧1)，方程式$f_k(x,y)=0$より定まる平面代数曲線の一部分；

$$s\to F_k(s)\qquad s\in[\beta_k,\ \beta_{k+1}] \qquad (3.3)$$
$$(k=1,2,\cdots,n;\ \beta_1=0)$$

の和集合；

$$F=F_1\cup F_2\cup\cdots\cup F_n$$
$$s\to F(s)\qquad s\in[\beta_1,\ \beta_{n+1}] \qquad (3.4)$$

はC^k級（k≧1）の単純弧であるとする．

（4） 計測データの集合を次のように直和分割する．すなわち，Q_kはC_k (k=1,2,…n)の計測データであり，

$$Q=Q_1\cup Q_2\cup\cdots\cup Q_n\quad(\text{直和分割})$$

そして，Qはしばしば雑音を含み，その分布の疎密の度合いは様々である．さらに，n=1である場合を除き，端点s＝0,LにおけるC（s），D_sC（s）については既知であるとする．

（5） 上の条件を満たす近似曲線Fについて，次の最適化問題を考える．

$$(P1)\quad \Sigma_k\Sigma_{Q_k}\{f_k(x,y)\}^2+\int_F\{\sigma(F;s)\}^2ds \to \min \qquad (3.5)$$

ここでσ(F;s)は，曲線Fの点F（s）における曲率であ

An Approximation to Planar Curves by Piecewise Algebraic Curves

Shizuo MAWATARI, Masahisa TAKASHI, Yoshiaki TOYODA
Aoyama Gakuin University

る．そして，Fを定める方程式を $f(x,y)=0$ とかくと，

$$\sigma(F;\cdot)=-(f_{xx}f_y^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}f_x^2)/(f_x^2+f_y^2)^{3/2} \quad (3.6)$$

この定式化は，データへの忠実性と最大限の滑らかさという二条件が同時に満足されることを意図している．上の最適化問題およびその解は，それぞれ一変数関数のスプライン平滑化問題およびWhittaker splineに対応する．

（６）　問題（P1）の最適解Fが求まれば，それを定める方程式 $f(x,y)=0$ および陰関数定理によって，実際の作図に使う近似曲線 ϕ，ψ は，次の微分方程式を解くことによって，陽関数の形式で求められる．

①$f_y(x,y)\neq 0$ なる点(x,y)の近傍で

$$y=\phi(x)$$
$$D_x\phi(x)=-f_x(x,y)/f_y(x,y) \quad (3.7)$$

②$f_x(x,y)\neq 0$ なる点(x,y)の近傍で

$$x=\psi(y)$$
$$D_y\psi(y)=-f_y(x,y)/f_x(x,y) \quad (3.8)$$

４．　代数曲線の選択

光学パターンを表す通常曲線中に含まれる単純弧Cは比較的簡単なC^1級平面曲線であることが多いので，Cを数個の分岐C_kに分解したとき，各分岐C_kは低次の代数曲線により十分な精度で近似可能と思われる．

分岐が複数個あり，異なった複数個の代数曲線$f_k(x,y)=0$ によって近似曲線Fが構成されるとき，f_kがm次であればFは高々C^{m-1}級である．したがって，本研究にとって最も低次な代数曲線は二次であるので，ここではこれを選択する．すなわち，

$$f_k(x,y)=a_kx^2+2h_kxy+b_ky^2+2c_kx+2d_ky+e_k \quad (4.1)$$

とする．このとき，

$$f_{kx}=2(a_kx+h_ky+c_k)$$
$$f_{ky}=2(h_kx+b_ky+d_k)$$
$$f_{kxx}=2a_k,\quad f_{kxy}=2h_k,\quad f_{kyy}=2b_k$$

（１）円錐曲線の理論でよく知られているように，

$$f_k(x,y)=0$$
$$\Delta_k=a_kb_ke_k+2c_kd_kh_k-a_kd_k^2-b_kc_k^2-e_kh_k^2 \quad (4.2)$$

とおくと，条件$\Delta_k=0$ と(4.2)が直線を表すこととは同値である．

（２）(3.6)の分子をΛ_kとすると

$$\Lambda_k=-8\Delta_k \quad (4.3)$$

（３）二次曲線の中で曲率の絶対値が最も小さいのは直線である．

したがって，（P1）は次のように書き換えられる．

$$\text{(P2)}\quad \Sigma_k[\Sigma_{Q_k}\{f_k(x,y)\}^2+(\Delta_k)^2]\rightarrow \min \quad (4.4)$$

ただし，$k=1,2,\cdots,n$ のとき，

$$(f_{kx})^2+(f_{ky})^2\neq 0$$

（４）(4.3),(3.6)より，ここで考察中の代数曲線F_kの内部で曲率は定符号である．したがって，(3.4)のFにおいて，その符号をかえる点が存在すれば，その点はFのつなぎ目（節点）である．

（５）円錐曲線の理論で良く知られているように，(4.1)の各係数より円錐曲線の位置や形状を追跡することが出来る．従って，従来の平面曲線近似法は Non-Parametric Type [3]，本研究による平面曲線近似法は Parametric Type であるといえる．

５．　最適化問題(P2)の解法

点$(x_k,\ y_k)$をF_kの始点すなわちFの節点とし，(4.1)をこの点でTaylor展開し，必要ならばc_k，d_kの記号をつけ替えると，

$$f_k(x,y)$$
$$=a_k(x-x_k)^2+2h_k(x-x_k)(y-y_k)+b_k(y-y_k)^2+2c_k(x-x_k)+2d_k(y-y_k) \quad (5.1)$$

ここで次の手順によって(P2)を解く．

（１）Fの節点$(x_k,\ y_k)$　$(k=1,2,\cdots,n)$ をあらかじめ与える．

（２）点$(x_{k+1},\ y_{k+1})$においてFがC^1級であること及び次の関係式；

$$f_{kx}=2\{a_k(x-x_k)+h_k(y-y_k)+c_k\}$$
$$f_{ky}=2\{h_k(x-x_k)+b_k(y-y_k)+d_k\} \quad (5.2)$$

より，

$$c_{k+1}=a_k(x_{k+1}-x_k)+h_k(y_{k+1}-y_k)+c_k$$
$$d_{k+1}=h_k(x_{k+1}-x_k)+b_k(y_{k+1}-y_k)+d_k \quad (5.3)$$

すなわち，

$$c_{k+1}=\Sigma_j\{a_j(x_{j+1}-x_j)+h_j(y_{j+1}-y_j)\}+c_1$$

$$d_{k+1}=\Sigma_j\{h_j(x_{j+1}-x_j)+b_j(y_{j+1}-y_j)\}+d_1$$

$$(k=1,2,\cdots,n-1) \quad (5.4)$$

（３）　さらに，二次曲線が(5.1)で表現されるとき，

$$\Delta_k=2c_kd_kh_k-a_kd_k^2-b_kc_k^2 \quad (5.5)$$

であるから，これを(P2)のΔ_kに代入し，通常の最適化アルゴリズムで解く．

（４）　$Q_k=\emptyset$である部分においては，F_kの端点$(x_k,\ y_k)$，$(x_{k+1},\ y_{k+1})$とこれらの点における接線方向についてのデータが与えられれば，F_kは決定される．代数曲線を外挿するときには，この方法によってF_kを決定する．

６　おわりに

従来のスプライン関数によって平面曲線を当てはめるとき，パラメータ選択の困難さ及び外生湾曲という難点があったが，本研究の方法にはその様な難点は存在しないし，数値実験の結果も良好である．

本研究は，本来のスプライン関数の基本思想を踏襲しながら，Parametric Type の新しいスプライン関数（今後，Planar Spline Curve と呼ぶ．）を導入したものと言える．この新スプライン関数について，節点の決定法，表現式，構成法及び性質等をより詳しく解明することは，大いに興味があり，今後に残された大きな課題である．

参考文献

〔1〕 Carl de Boor, A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, 1978

〔2〕 R. H. Bartels, et al., An Introduction to Splines for Use in Computer Graphics and Geometric Modeling, Morgan Kaufmann Publishers, Inc., 1987

〔3〕 R. L. Eubank, Spline Smoothing and Nonparametric Regression, Marcel Dekker,Inc., 1988