離散化関数の計算法

5D-1

秦野和郎（愛知工業大学・電子工学科）

1・はじめに、

Fourier係数と離散Fourier係数との間に成り立つ関係式として"Aliasingの式"がよく知られている。しかし、この式はそのままの形ではほとんど役に立たない。一方、"Aliasingの式"と"Fourier係数の漸近展開式"とを組み合わせると有用な関係式が得られる。得られた関係式には、ここで"離散化関数"と呼んでいる一群の関数が含まれている。本稿では"離散化関数"の計算法について述べる。

2・離散化関数、

閉区間$[0,2\pi]$で定義される、与えられた実関数$f(x)$は十分に滑らかな関数であるとする。$f(x)$のFourier係数、

$$\begin{cases} a_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos jx\,dx & : 0\leqq j \\ b_j(f)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin jx\,dx & : 1\leqq j \end{cases} \qquad (1)$$

に部分積分を反復適用すると"Fourier係数の漸近展開式"、

$$\begin{cases} a_j(f)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i}}\omega_{2i-1}(f) \\ \qquad +\dfrac{(-1)^{m+1}}{\pi j^{2m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)\sin jt\,dt \\ b_j(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{j^{2i+1}}\omega_{2i}(f) \\ \qquad +\dfrac{(-1)^{m+1}}{\pi j^{2m+1}}\displaystyle\int_0^{2\pi} f^{(2m+1)}(t)(1-\cos jt)\,dt \end{cases} \qquad (2)$$

を得ることができる。但し、ここで

$$\omega_i(f)=\{f^{(i)}(2\pi)-f^{(i)}(0)\}/\pi \qquad (3)$$

である。次に$f(x)$に対する、台形則による離散Fourier係数、$\bar{u}_j(f)$, $\bar{v}_j(f)$を

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=\dfrac{2}{N}\{\dfrac{1}{2}f(0)+\displaystyle\sum_{r=1}^{N-1}f(\bar{x}_r)\cos j\bar{x}_r+\dfrac{1}{2}f(2\pi)\} \\ \bar{v}_j(f)=\dfrac{2}{N}\displaystyle\sum_{r=1}^{N-1}f(\bar{x}_r)\sin j\bar{x}_r \end{cases} \qquad (4)$$

と定義する。ここで、

$$\bar{x}_r=2\pi r/N \quad : 0\leqq r\leqq N \qquad (5)$$

である。式(4)に$f(x)$のFourier級数、

$$f(x)=\frac{1}{2}a_0(f)+\sum_{j=1}^{\infty}\{a_j(f)\cos jx+b_j(f)\sin jx\} \qquad (6)$$

を代入し三角関数の周期性及び、対称性を使うと"Aliasingの式"、

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=a_j(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{a_{kN+j}(f)+a_{kN-j}(f)\} \\ \bar{v}_j(f)=b_j(f)+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{b_{kN+j}(f)-b_{kN-j}(f)\} \end{cases} \qquad (7)$$

が得られる。この式に"Fourier係数の漸近展開式"、式(2)を代入し、

$$\begin{cases} \bar{\delta}_i(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\{\frac{1}{(k+x)^i}+\frac{(-1)^i}{(k-x)^i}\} \\ \bar{\tau}_i(x)=1/x^i+\bar{\delta}_i(x) \end{cases} \qquad (8)$$

とおくと、Fourier係数と離散Fourier係数との間の関係式、

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=a_j(f)+\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\bar{\delta}_{2i}(\frac{j}{N})\omega_{2i-1}(f)+O(N^{-2m-1}) \\ \bar{v}_j(f)=b_j(f)+\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\bar{\delta}_{2i+1}(\frac{j}{N})\omega_{2i}(f)+O(N^{-2m-1}) \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} \bar{u}_j(f)=\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i}}\bar{\tau}_{2i}(\frac{j}{N})\omega_{2i-1}(f)+O(j^{-2m-1}) \\ \bar{v}_j(f)=\displaystyle\sum_{i=0}^{m-1}\frac{(-1)^{i-1}}{N^{2i+1}}\bar{\tau}_{2i+1}(\frac{j}{N})\omega_{2i}(f)+O(j^{-2m-1}) \end{cases} \qquad (10)$$

を得る。$f(x)$に関して$\omega_i(f)$が与えられ$\bar{\delta}_i(x)$を計算できれば式(9)により、たとえば離散Fourier係数を補正して高精度のFourier係数を得ることができる。式(10)は大きなjに対する離散Fourier係数がどのような変化をするかを示している

On Calculating with Discretization Functions
Kazuo HATANO
AICHI Institute of Technology

。式(8)で与えられる関数を"離散化関数"と呼ぶ。

3・離散化関数の性質、

離散化関数は漸化式

$$\bar{\delta}_{i+1}(x)=-\frac{1}{i}\bar{\delta}'_{i}(x)\ ,\quad \bar{\tau}_{i+1}(x)=-\frac{1}{i}\bar{\tau}'_{i}(x) \qquad (11)$$

を満足する。又、

$$\begin{cases} \bar{\delta}_1(x)=\pi\cot\pi x-\dfrac{1}{x} \\ \bar{\tau}_1(x)=\pi\cot\pi x \end{cases} \qquad (12)$$

である。更に、式(8)から$\bar{\delta}_{2i+1}(x)$は$x=0$で一次の零を持つ事$\bar{\tau}_{2i+1}(x)$は$x=1/2$で一次の零を持つ事、$\bar{\tau}_i(x)$は$x=0$でi次の極を持つ事などがわかる。式(12)から$\bar{\delta}_1(x)$, $\bar{\tau}_1(x)$の級数展開がわかるので、それをもとにして式(11)から$\bar{\delta}_i(x)$の級数展開を順次求めることができる。しかし、そのようにして得られた級数展開式はiが大きくなると極めて収束が悪くなるので実際の計算には使えない。

4・離散化関数の計算法、

離散化関数を

$$\begin{cases} \bar{\delta}_{2i+1}(x)=-x\cdot\dfrac{P_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)}\ ,\quad \bar{\delta}_{2i}(x)=\dfrac{P_{2i}(x)}{Q_{2i}(x)} \\ \bar{\tau}_{2i+1}(x)=\dfrac{1-4x^2}{x^{2i+1}}\cdot\dfrac{R_{2i+1}(x)}{Q_{2i+1}(x)}\ ,\quad \bar{\tau}_{2i}(x)=\dfrac{1}{x^{2i}}\cdot\dfrac{R_{2i}(x)}{Q_{2i}(x)} \end{cases} \qquad (13)$$

の形に書くと$P_i(x)$, $Q_i(x)$, $R_i(x)$を閉区間[0,1/2]において零点を持たない整級数で、しかも偶関数となるようにすることができる。まず、

$$Q_1(x)=\frac{\sin\pi x}{\pi x}=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r+1)!}x^{2r} \qquad (14)$$

と選ぶと、

$$\begin{cases} P_1(x)=\dfrac{\pi x\cos\pi x-\sin\pi x}{(-x)\cdot\pi x^2}=\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r+2}}{(2r+1)!(2r+3)}x^{2r} \\ R_1(x)=\dfrac{\cos\pi x}{1-4x^2}=\dfrac{1}{1-4x^2}\cdot\displaystyle\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\pi^{2r}}{(2r)!}x^{2r} \end{cases} \qquad (15)$$

となる。ここで、

$$Q_i(x)=\{Q_1(x)\}^i \qquad (16)$$

としてよいのでそのようにすると、式(11)から、

$$\begin{cases} P_{2i+1}(x)=\dfrac{1}{x}\{\dfrac{1}{2i}P'_{2i}(x)Q_1(x)-P_{2i}(x)Q'_1(x)\} \\ P_{2i}(x)=\dfrac{1}{2i-1}\{P_{2i-1}(x)Q_1(x)+xP'_{2i-1}(x)Q_1(x) \\ \qquad\qquad -x(2i-1)P_{2i-1}(x)Q'_1(x)\} \\ R_{2i+1}(x)=\dfrac{1}{1-4x^2}[R_{2i}(x)\{Q_1(x)+xQ'_1(x)\} \\ \qquad\qquad -\dfrac{1}{2i}xR'_{2i}(x)Q_1(x)] \\ R_{2i}(x)=(1-4x^2)R_{2i-1}(x)\{Q_1(x)+xQ'_1(x)\} \\ \qquad +\dfrac{Q_1(x)}{2i-1}\{8x^2R_{2i-1}(x)-(1-4x^2)xR'_{2i-1}(x)\} \end{cases} \qquad (17)$$

となる。式(14),(15)を出発点として、式(17)を使って整級数$P_i(x)$, $R_i(x)$の係数を次々に求めてゆくことができる。

たとえば

$$Q_1(x)=\sum_{r=0}^{\infty}b_rx^{2r} \qquad (18)$$

$$P_{2i-1}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^{2r}\ ,\quad P_{2i}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}c_rx^{2r} \qquad (19)$$

とおくと

$$c_r=\sum_{j=0}^{r}a_jb_{r-j}\{\frac{1+2j}{2i-1}-2(r-j)\} \qquad (20)$$

となる。また、

$$P_{2i}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}a_rx^{2r}\ ,\quad P_{2i+1}(x)=\sum_{r=0}^{\infty}c_rx^{2r} \qquad (21)$$

とおくと

$$c_r=\sum_{j=0}^{r}2(j+1)(\frac{1}{2i}a_{j+1}b_{r-j}-b_{j+1}a_{r-j}) \qquad (22)$$

となる。式(20),(22)を交互に使って$\bar{\delta}_i(x)$の計算式を得ることができる。$\bar{\tau}_i(x)$についても同じである。

5・おわりに、

以上の手順により離散化関数を計算することができる。実際には式(20),(22)の計算で桁落ちが激しいのでかなり桁数の多い多倍長計算が必要である。又、整級数のままでは必要な精度に対して多くの項数を要するのでTchebycheff展開の形にするとよい。その他、実際の計算では更に、いくつかの工夫を要するが基本的には本稿で述べた手順に従って式(13)の係数を求めれば離散化関数を計算できる。