4D-7

有限要素法DEQSOLの流体シミュレーション向き機能の検討

佐川暢俊　荒木憲司　平山裕之*　太田忠*　武石美以子*
（（株)日立製作所　*(株)日立超ＬＳＩエンジニアリング）

１．緒　言

ＤＥＱＳＯＬ（Differential EQuation SOlver Language）は数値シミュレーション専用の問題向き言語であり[1]、物理問題を支配する偏微分方程式の簡潔な記述から数値シミュレーションを行なうＦＯＲＴＲＡＮプログラムを自動的に生成する。ＤＥＱＳＯＬによれば、数値シミュレーションにおけるプログラム開発の手間を大幅に削減することが可能となる。

ＤＥＱＳＯＬはこれまで主に拡散系の問題を対象として開発が進められてきたが、著者らはその次なるターゲットとして流体系のシミュレーションに着目した。今回は現在開発を進めているＤＥＱＳＯＬ有限要素法流体バージョンの拡張機能と言語仕様の概要について報告する。

２．拡張機能の概要

流体シミュレーションの各種の解法を記述可能とするために、以下のような機能の導入を試みた。

（１）連立陰解法機能

粘性が大きい流れの状態を調べる場合などには、ナビエ・ストークス方程式

$$V_t = V..grad(V) - grad(P)/\rho + \nu\cdot lapl(V) \qquad (1)$$

$$div(V) = 0 \qquad (2)$$

（Ｖ＝（ｕ，ｖ）は流速、Ｐは圧力、ρは流体の密度、νは粘性係数を表す）

を変数Ｖ、Ｐについて連立して解く完全陰解法が有効である。このような解法に適用するために、複数の偏微分方程式を複数の変数に対して同時に離散化する連立陰解法機能を導入した。

（２）高次要素の導入および要素次数の混在機能

ナビア・ストークス方程式を解く際に変数ＶとＰとを同じ精度で近似（補間）した場合、解を求めることが数値的に不可能になることが知られている。これを避けるためには変数Ｐの補間次数を変数Ｖの補間次数より低くする必要がある。このような要求を満たすため、新たに２次の補間精度を有する要素を導入し、各変数に対して０次、１次（線形）、２次の各要素を混在して指定することを可能とした。

（３）マトリクスのランピング機能

高いレイノルズ数の流体をシミュレートする場合には、運動方程式を陽的に評価して流速をもとめ、次いで圧力を陰的に補正する方法（流速修正法）が用いられる。流速修正法では代入操作において線形計算を避け、計算の効率化と安定化を図ることが望ましい。この要請に対し、代入計算において左辺に現われるマトリクスのランピング（対角化）を指定できる機能を用意した。

（４）風上有限要素法の導入

移流拡散方程式を解く際の数値的な不安定性を回避するために、強い移流に対しても安定に計算を進めるテクニックである風上有限要素法の指定を可能とした。風上化の手法としては、移流の方向にのみ選択的に粘性の効果を現す流線風上化(Stream Line Upwind)[3]の手法を採用した。

Extended Facilities of DEQSOL-FEM for the Simulation of Fluid Mechanics

Nobutoshi SAGAWA, Kenji ARAKI, Hiroyuki HIRAYAMA, Tadasi OHTA & Miiko TAKEISHI
HITACHI Ltd.　*HITACHI VLSI ENGINEERING Ltd.

（５）数値積分精度の指定機能

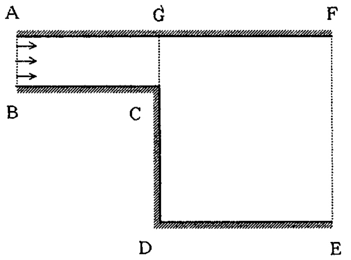
比較的レイノルズ数の高い流体に対するシミュレーションの手法として、ペナルティ関数法が知られている。ペナルティ関数法では、ナビア・ストークス方程式からＰを消去し、

$$V_t = V..\mathrm{grad}(V) + \lambda \cdot \mathrm{grad}(\mathrm{div}(V))/\rho + \nu \cdot \mathrm{lapl}(V) \tag{3}$$

を解く。ここで、ペナルティ項（右辺第２項）を数値的に積分する際に、積分の精度を他の項に対して低下させる必要があることが知られている(Rcduced Integral)[2]。この要請に対して、数値積分の精度を可変とし、これを項ごとに指定できる積分方式を導入した。

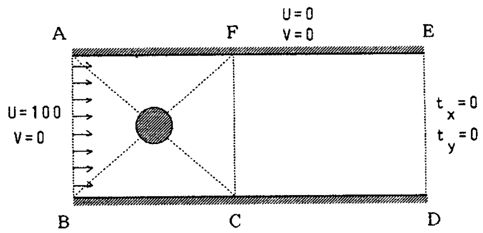
３．記述能力の検証

図１に、幅の変化する流路内で遅い流れを支配するストークス方程式を解く場合の記述例を示す。流速Ｖについて２次要素、圧力Ｐについて０次要素を用い、連立陰解法によって定常解を求める場合を想定する。図２には、中～高レイノルズ数流れの例題としてしばしば用いられる、円柱の後方流れの記述例を示す。流速について線形要素、圧力について一定要素を用い、解法スキームとして流速修正法を想定する。計算の高速化のために代入計算に対してランピングを施す。いずれの場合も数値解析書レベルの記述が可能である。




```
PROG     STOKES;
METHOD   FEM;
DOMAIN   X=[0:50], Y=[0:30];
POINT    A=(0,30), B=(0,20), C=(20,20), .... ;
REGION   AB=LN(A,B), BC=LN(B,C), CD=LN(C,D), DE=LN(D,E);
MESH     AB=D(5), BC=D(10), CD=D(10), DE=D(20), ... ;
VAR      U, V, P;
VEC      VV=(U,V);
ELMTYPE QUADRIC FOR U,V, LINEAR  FOR P;
BCOND    U=1 AT AB,  V=0 AT AB,
         U=0 AT BC+CD+DE+FG+GA,  V=0 AT BC+CD+DE+FG+GA,
         P=0 AT EH+HF,  N..VV=0 AT EH+HF;
CONST    L=0.1;
SCHEME;
  SOLVE VV,P OF
    -GRAD(P)+LAPL(VV)=0,  DIV(VV)=0  BY 'ILUBCG';
  PRINT U,V,P;
END SCHEME;
END;
```

図１　ストークス流体問題の記述例




```
PROG    NAVIER;
DOMAIN  X=[0:25],  Y=[0:10];
TSTEP   T=[0(0.002)1];
VAR     U,V,UM,VM,U0,V0,U2,V2,W,PHI,P,P0;
ELMTYPE LINEAR FOR U,V,UM,VM,U0,V0,U2,V2,W,PHI  FLAT FOR P,P0;
CONST    ρ=2.0;
CTENS   A1=(2,0,0,1), A2=(0,0,1,0), A3=(0,1,0,0), A4=(1,0,0,2);
VEC     PX=(P0,0),  PY=(0,P0);
BCOND   U=100  AT  AB,  U=0  AT  AB, .... ,
        PHI=0  AT  DE,
        N(PX/ρ-A1..GRAD(U0)+A2..GRAD(V0))=0  AT  DE,
        N(PY/ρ-A3..GRAD(U0)+A4..GRAD(V0))=0  AT  DE;
ICOND   U0=0,  V0=0;
SCHEME;
  ITER NT UNTIL NT EQ 500;
    U2=U0**2; V2=V0**2; W=U0*V0;
    [UM]<LM>=[U0]<LM>-DLT*(DX(U2)+DY(W)+DIV(PX)/ρ
                  -DIV(A1..GRAD(U0)+A2..GRAD(V0)));
    [VM]<LM>=[V0]<LM>-DLT*(DX(W)+DY(V2)+DIV(PY)/ρ
                  -DIV(A3..GRAD(U0)+A4..GRAD(V0)));
    SOLVE PHI OF  LAPL(PHI)=-DX(UM)-DY(VM)  BY  'ILUBCG';
    U=UM+DX(PHI);- V=VM+DY(PHI);  P=P0-ρ*PHI/DLT;
    U0=U;  V0=V;  P0=P;
  END ITER;
END SCHEME;
END;
```

図２　流速修正法の記述例

４．結言

以上、現在開発を進めているＤＥＱＳＯＬ有限要素法流体バージョンの拡張機能の概要を示した。今後、試用評価を通してさらにリファインを行っていきたい。

参考文献

1) 梅谷他：”数値シミュレーション言語ＤＥＱＳＯＬ”；情処学会論文誌 Vol.26(1985).

2) 川原：”有限要素法流体解析”；日科技連.

3) A.N.Brookes et al; Stream Line Upwind Formulations; Comp.Meths.Appl.Mech. Vol32(1982).