

代用電荷法とNewton法に基づく  
逆等角写像の数値計算法

4D-5

天野 要 高松孝安 安倍 齊

(愛媛大学工学部)

## 1. まえがき

代用電荷法に基づいて、任意の Jordan 領域、その外部、および有界な2重連結領域から、それぞれ、単位円の内部、その外部、および円環領域への等角写像を簡単かつ高精度に計算することができる<sup>1)-3)</sup>。ここでは、その近似写像関数と導関数の記述が簡潔であることに着目し、逆写像すなわち標準領域から問題の領域への等角写像の計算法を提案する。この計算法は、Newton 法に基礎を置き、1点ごとに反復計算を行うものである。しかし、その原理とプログラミングは簡単であり、比較的高い精度を得ることができて、誤差の評価も可能である。特に、等角写像の応用上重要な等絶対値線と等偏角線の逆写像の計算に適している。

数値等角写像の問題は、問題領域から標準領域への写像を求める問題と、標準領域から問題領域への写像を求める問題に大別され、従来、両者は比較的独立の問題として研究されている<sup>4)</sup>。いずれの写像にも適した計算法の開発は数値等角写像に関する重要な研究課題の1つである。

本稿では単連結領域の内部問題を扱い、別稿<sup>5)</sup>で外部問題を扱う。

2. Riemann の写像定理と近似写像関数<sup>1)</sup>

Riemann の写像定理によれば、少なくとも2つの点を含む境界を持つ任意の単連結領域  $D$  は単位円の内部に等角写像することができる。このとき、写像関数  $w = f(z)$  ( $z = x+iy$ ) は、 $D$  内に原点をとれば、正規化条件  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$  の下に一意的に定まる。この写像関数は、 $D$  が Jordan 曲線  $C$  で囲まれた Jordan 領域であれば、

$$w = f(z) = z \exp\{g(z)+ih(z)\} \quad (1)$$

で与えられる。ここに、 $g(z)$  と  $h(z)$  は  $D$  で共役な調和関数で、それぞれ、境界条件と正規化条件

$$g(z) = -\log|z|, \quad z \in C, \quad (2)$$

$$h(0) = 0, \quad (3)$$

を満たさなければならない。また、Carathéodory の定理が成立する。

代用電荷法に基づいて、この  $g(z)$  と  $h(z)$  を問題の領域の外部に配置された  $N$  個の電荷点  $\zeta_i (= \xi_i + i\eta_i)$  を極とする複素対数ポテンシャルの実部と虚部の1次結合で近似して、次のように、この等角写像の簡潔かつ高精度な近似写像関数を与えることができる。

$$W = F(z) = z \exp\{G(z)+iH(z)\}, \quad z \in \bar{D} \quad (4)$$

$$G(z) = -\sum_{i=1}^N Q_i \log|z-\zeta_i| \quad (5)$$

$$H(z) = -\sum_{i=1}^N Q_i \arg(z-\zeta_i) + \theta_0 \\ = -\sum_{i=1}^N Q_i \arg(1-z/\zeta_i) \quad (6)$$

ここに、 $\bar{D} = D + C$ , また、

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^N Q_i \arg(-\zeta_i) \quad (7)$$

は正規化条件  $F'(0) > 0$  すなわち  $H(0) = 0$  から定まる回転の任意定数で、 $W, F, G, H$  等の大文字は近似値を表す。未定係数である電荷  $Q_i$  は境界  $C$  上に選ばれた  $N$  個の拘束点  $z_j$  で境界条件(2)を満たすように定められる。すなわち、 $Q_i$  は拘束条件と呼ばれる連立1次方程式

$$\sum_{i=1}^N Q_i \log|z_j-\zeta_i| = \log|z_j|, \quad j = 1, \dots, N \quad (8)$$

の解である。

## 3. 逆写像の数値計算法

近似写像関数(4)を、

$$W = R(z) \exp\{i\theta(z)\} = \exp\{P(z)+i\theta(z)\} \quad (9)$$

とおけば、 $P(z)$  と  $\theta(z)$  は1価関数(偏角の値域を  $-\pi < \arg \leq \pi$  とする)で、導関数とともに

$$P(z) = \log R(z) = \log|z| + G(z), \quad (10)$$

$$\theta(z) = \arg z + H(z), \quad (11)$$

$$P_x = x/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i (x-\xi_i)/|z-\zeta_i|^2, \quad (12)$$

$$P_y = y/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i (y-\eta_i)/|z-\zeta_i|^2, \quad (13)$$

$$\theta_x = -y/|z|^2 + \sum_{i=1}^N Q_i (y-\eta_i)/|z-\zeta_i|^2, \quad (14)$$

$$\theta_y = x/|z|^2 - \sum_{i=1}^N Q_i (x-\xi_i)/|z-\zeta_i|^2 \quad (15)$$

Numerical inverse conformal mapping based on the charge simulation method combined with Newton's method

Kaname AMANO, Takayasu TAKAMATSU and Hitoshi ABE (Ehime University)

と簡潔に記述される。したがって、等高線の作図法<sup>6)</sup>と同様な方法で問題の逆写像を計算することができる。

まず、 $w = r \exp(i\theta) = \exp(\rho+i\theta)$  平面上の等絶対値線  $r = r_0$  ( $0 < r_0 \leq 1$ ) すなわち  $\rho = \rho_0$  ( $\rho_0 = \log r_0$ ,  $-\infty < \rho_0 \leq 0$ ) の逆写像  $R(z) = r_0$  すなわち  $P(z) = \rho_0$  の計算法を記す。  $P(z) = \rho_0$  上の1点を  $z_k$  とし、次の1点  $z_{k+1}$  を以下の手順で計算することができる。

1°  $z_k$  から接線方向に距離  $t$  ( $\ll 1$ ) 離れた点の計算。

$$z_{k1} = z_k + t \exp[i\{\arg(\nabla P(z_k)) + \pi/2\}] \quad (16)$$

2° Newton 法による  $z_{k+1}$  の近似値の計算。

$$z_{k2} = z_{k1} - \Delta t \exp[i\arg(\nabla P(z_{k1}))] \quad (17)$$

$$\Delta t = (P(z_{k1}) - \rho_0) / |\nabla P(z_{k1})| \quad (18)$$

3°  $|R(z_{k2}) - r_0| \leq \varepsilon_r$  ( $\ll 1$ ) すなわち  $|P(z_{k2}) - \rho_0| \leq \varepsilon_p$  ( $= \varepsilon_r / r_0$ ) であれば  $z_{k+1} = z_{k2}$ ,  $k = k+1$  において1°に戻る。そうでなければ、 $z_{k1} = z_{k2}$  において2°に戻る。収束条件は  $|R(z_{k2}) - r_0| / r_0 \leq \varepsilon_r$  すなわち  $|P(z_{k2}) - \rho_0| \leq \varepsilon_r$  と相対誤差で与えてもよい。

出発点  $z_0$  は、 $z_{k1}$  に適当な初期値を与えて、全く同様に2°と3°の手続きを繰り返して求めることができる。また、3°で  $|z_{k+1} - z_0| \leq t$  となった場合には、 $z_{k+2} = z_0$  として、この等絶対値線の計算を終了する。なお、計算のステップ幅  $t$  の値は写像関数の局所的な形に応じて変えることができる<sup>6)</sup>。

等偏角線  $\theta = \theta_0$  ( $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ ) の逆写像  $\theta(z) = \theta_0$  の計算法も  $P(z) = \rho_0$  の計算法と全く同様である。ただし、 $\theta_0 = \pi$  の場合には注意を要する<sup>5), 7)</sup>。

1点  $w_0$  の逆写像は、この点を  $R(z) = r_0$  すなわち  $P(z) = \rho_0$  と  $\theta(z) = \theta_0$  の交点であると考えて、以上の計算法の重ね合せで求めることができる。

#### 4. 誤差

この計算法では、 $z_0 = f^{-1}(w_0)$  の代わりに、 $Z_0 = F^{-1}(w_0)$  を要求精度  $\varepsilon_N$  の Newton 法で計算する。収束条件を満たす解  $z_k$  が得られたとすると、 $w_k = F(z_k)$  として、Newton 法に起因する  $w$  平面上の誤差は

$$\varepsilon_N(w_0) = |w_k - w_0| \leq \varepsilon_N \quad (19)$$

である。一方、 $w_0 = f(Z_0)$  として、正則関数の最大値の原理により、 $F(z)$  の公式誤差は

$$\begin{aligned} \varepsilon_F(w_0) &= |w_0 - w_c| \\ &\leq \max_C |F(z) - f(z)| = \varepsilon_F \\ &\approx 2 \max |f(z_{j+1/2})| - 1 \end{aligned} \quad (20)$$

である<sup>1)</sup>。添字  $C$  は境界上での評価を示し、 $z_{j+1/2}$  は  $C$  上の  $z_j$  と  $z_{j+1}$  の中間点である。ここで、正則

関数による平面の局所的な拡大率が、方向に依存せず、導関数の絶対値に等しいことを利用して、 $w$  平面上の誤差を  $z$  平面上の誤差に変換し、

$$\begin{aligned} E_R(z_0) &= |z_k - z_0| \leq |Z_0 - z_0| + |z_k - Z_0| \\ &\approx |w_0 - w_c| / |f'(z_0)| + |w_k - w_0| / |f'(z_0)| \\ &\leq \varepsilon_F / |f'(z_0)| + \varepsilon_N / |f'(z_0)| \end{aligned} \quad (21)$$

となる。さらに、近似写像関数  $F(z)$  の精度と Newton 法の要求精度が十分に高ければ、正則関数の  $f'(z) \cdot f^{-1'}(w) = 1$  という性質と最大値の原理を用いて、上式を

$$E_R(z_0) \leq (\varepsilon_F + \varepsilon_N) / |f'(z_k)| \quad (22)$$

$$\leq (\varepsilon_F + \varepsilon_N) / \min_C |f'(z)| \quad (23)$$

と近似することができる<sup>7)</sup>。

等絶対値線  $r = r_0$  または等偏角線  $\theta = \theta_0$  の逆写像の場合にも、 $w_k$  から  $r = r_0$  または  $\theta = \theta_0$  への垂線の足を  $w_0$  と考えれば、 $\varepsilon_N$  をそれぞれ  $\varepsilon_r$  と  $\varepsilon_\theta$  に置き換えて、以上の議論がそのまま成立する。

#### 5. 計算例 (Cassini の楕形)

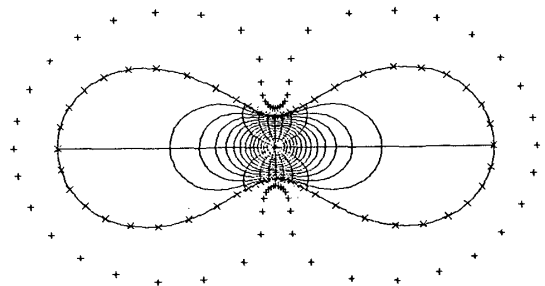
$$\text{境界 } \{(x+1)^2 + y^2\} \{(x-1)^2 + y^2\} = a^4$$

$$a = 2^{1/32}$$

$$\text{計算条件 } N = 64, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_\theta = 10^{-5}$$

$$\text{計算結果 } \varepsilon_F = 2.2 \times 10^{-5}$$

$$\max E_R \approx (\varepsilon_F + \varepsilon_r) / \min |f'(z)| = 1.1 \times 10^{-3}$$



#### 参考文献

- 1) 天野 要: 情論誌, 28(7), 697-704(1987).
- 2) 天野 要: 情論誌, 29(1), 62-72(1988).
- 3) 天野 要: 投稿中.
- 4) Trefethen, L.N. (ed.): Numerical Conformal Mapping, North-Holland (1986); reprinted from J. Comput. Appl. Math., 14(1&2), (1986).
- 5) 高松孝安, 天野 要, 安倍 齊: 本全国大会.
- 6) 村島定行: 代用電荷法とその応用, 森北 (1983).
- 7) 天野 要, 高松孝安, 安倍 齊: 準備中.