拡大縮小を考慮した点集合の正方格子度を求めるアルゴリズム

2D-8

今井 浩　炭野重雄
九州大学工学部

1．まえがき

ＬＳＩなどの超微細な部品を基板上に実装する産業用ロボットでは，より精密さを要求されるので，部品をある決められたところに機械的に配置する位置決め操作によるだけでなく，視覚センサからの情報を用いて補正することが有効である[4]．この位置決め問題に関連し，今井，炭野，内藤[3,5]は，ピングリッドアレイ型ＬＳＩのピンをほぼ正方格子状に並んだＮ個の点集合とみなし，点集合が与えられた間隔から構成される正方格子の格子点に平行･回転移動によりどの程度近づけることができるかを示す尺度すなわち正方格子度をミニマックス近似の観点から定義し，それを$O(N \log N)$の手間で求めるアルゴリズムを示した．

本論文では，[3,5]の手法を更に拡張し，正方格子状に並んだＮ点集合に対して，平行･回転移動･拡大縮小を用いて最も適合する間隔から構成された正方格子を配置し，その正方格子から正方格子度を$O(N^4)$の手間で求めるアルゴリズムを示す．

2．点集合の正方格子度問題の定式化

ほぼ正方格子点状に並んだＮ個の点集合Ｓに対して，未知の間隔l（$0 \leqq l < \infty$）の正方格子を構成する直線群を考える．ただし，Ｓの各点と各正方格子点には対応付けがなされているとする．また，Ｓの各点とそれに対応する格子点との距離は，Euclid距離ではなく，点と対応する格子点を構成している直交する２直線を考え，その２直線への垂線の長さのうち大きい方と定める．

点集合Ｓの正方格子度Ｇは，Ｓの各点と対応する正方格子点との距離の最大値を，正方格子を平行･回転移動･拡大縮小（最も適合するlを求めることに相当）することによって最小化し，その最小化した際の距離の最大値εの２倍を間隔lで割ったもの，すなわち$G = 2\varepsilon / l$で定義する．

与えられたほぼ正方格子状に並んだ$N = mn$個の点$p_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$ $(i=1,\dots,m;1,\dots,n)$の集合Ｓに対して，間隔lの正方格子直線群のｉ行ｊ列の２直線の交点が各々１：１対応しているとする．間隔lのm行n列の任意の正方格子直線群は，適当な点(X, Y)と角度θ（$0 \leqq \theta < 2\pi$）を用いて，座標軸をθ回転し原点を(X, Y)に平行移動したときの直線群$x = 0, l, \dots, (n-1)l$，$y = 0, l, \dots, (m-1)l$と表せる．この座標系で点p_{ij}は格子点$((j-1)l, (i-1)l)$に対応するので，Ｓと対応する格子点との距離の最大値$f(\theta, l, X, Y)$は次のように表せる．

$$X_{ij}(\theta, l) \equiv x_{ij}\cos\theta + y_{ij}\sin\theta - (j-1)l,$$
$$Y_{ij}(\theta, l) \equiv -x_{ij}\sin\theta + y_{ij}\cos\theta - (i-1)l,$$
$$f_x(\theta, l, X) \equiv \max_{i,j} |X_{ij}(\theta, l) - X|$$
$$f_y(\theta, l, Y) \equiv \max_{i,j} |Y_{ij}(\theta, l) - Y|$$
$$f(\theta, l, X, Y) = \max\{f_x(\theta, l, X), f_y(\theta, l, Y)\}$$

関数f_x，f_yは，Ｘ，Ｙに関して，

$$X_{max}(\theta, l) \equiv \max_{i,j}\{X_{ij}(\theta, l)\},$$
$$X_{min}(\theta, l) \equiv \min_{i,j}\{X_{ij}(\theta, l)\},$$
$$Y_{max}(\theta, l) \equiv \max_{i,j}\{Y_{ij}(\theta, l)\},$$
$$Y_{min}(\theta, l) \equiv \min_{i,j}\{Y_{ij}(\theta, l)\},$$
$$X = (X_{max}(\theta, l) + X_{min}(\theta, l)) / 2,$$
$$Y = (Y_{max}(\theta, l) + Y_{min}(\theta, l)) / 2,$$

としたときに，各々最小値g_x，g_yをとる．

$$g_x(\theta, l) = (X_{max}(\theta, l) - X_{min}(\theta, l)) / 2,$$
$$g_y(\theta, l) = (Y_{max}(\theta, l) - Y_{min}(\theta, l)) / 2$$

そのとき，正方格子度Ｇは，

$$g(\theta, l) = \max\{g_x(\theta, l), g_y(\theta, l)\}$$

とし，その関数ｇをθ，lに関して最小化した値をεとすると，$G = 2\varepsilon / l$となる．

3．点集合の正方格子度を求めるアルゴリズム

3．1 関数X_{max}, X_{min}, Y_{max}, Y_{min}の計算複雑度

Ｘ，Ｙおよびmax，minは対称であるので，以下では$X_{max}(\theta, l)$を求めるアルゴリズムについてだけ述べる．

$X_{max}(\theta, l)$は，Ｎ個の関数$X_{ij}(\theta, l)$の最大値を与える関数であるので，θの定義域$[0, 2\pi)$とlの定義域$[0, \infty)$の定義域領域内の各部分領域において，ｉ，ｊが変化したときのＮ個の関数X_{ij}のうちで最大値を与えるある１つの関数を求めて，その部分領域と対応する関数とを覚えておくことによって実現できる．この関数は，２変数θ，lのDavenport-Schinzel列とみなせ，任意の３つの$X_{ij}(\theta, l)$の交点が高々２点であることから，その部分領域の総数，境界の総本数，頂点の総数が各々$O(N^2)$個であることが知られている[2]．

関数$X_{max}(\theta, l)$を求めるときに，まずある１つの関数$X_{ij}(\theta, l)$に着目し，その関数が$\theta - l$平面上の定義域領域内において最大値を与える関数になる部分領域を求めることを考える．その部分領域は次の$(N-1)$個の全ての不等式を満たす領域である．

$$X_{ij}(\theta, l) \geqq X_{kh}(\theta, l) \quad （ただし，(i,j) \neq (k,h)）$$

上式を変形すると，

$j \neq h$のとき，　$(j-h)l \leqq R\sin(\theta + \alpha)$，
$j = h$のとき，　$-\alpha \leqq \theta \leqq \pi - \alpha$
（ただし，$R = [(x_{ij} - x_{kh})^2 + (y_{ij} - y_{kh})^2]^{1/2}$，
$\alpha = \mathrm{Arctan}[(x_{ij} - x_{kh}) / (y_{ij} - y_{kh})]$）

An Algorithm for Fitting a Perfect Grid to a Set of Points by Rotation, Translation and Scaling
Hiroshi IMAI and Shigeo SUMINO
Faculty of Engineering, Kyushu University

上記の(N－１)個の不等式を全て満たす領域を求めるために，不等式の集合に対して分割統治法を適用すると，ほぼ(N－１)／２個ずつに分割された相異なる２組の不等式の集合を満たす２つの領域を再帰的に求め，その２つの領域の共通領域を求めることになる．領域の境界はθをパラメタとする正弦関数もしくは定数関数よりθ軸方向に単調であるので，２つの領域の各々の境界を上限と下限を表す関数に分けて考えると，上限を表す関数，下限を表す関数はソートされた部分区間とそれに対応する唯一の関数から構成することができる．２つの領域からその共通領域を求めることは，各々ソートされた４組の部分区間の境界値をマージし，その細分化された各部分区間内で一方の領域を表す上限と下限の２つの関数間の値と他方の領域を表す上限と下限の２つの関数間の値との共通領域を表す上限と下限を表す関数を求めることと同値である．上限，下限を表す関数の部分区間とその境界値の数は$O(N-1)$個，したがって，細分化された部分区間の境界値の数も$O(N-1)$個である．細分化された部分区間は，４つの部分区間の境界値が各々ソートされているので$O(N-1)$の手間で求められ，その部分区間内での共通部分領域は２つの関数の交点計算と比較の定数の手間によって求めることができる．よって，２つの領域の共通領域は細分化された部分区間の総数の$O(N-1)$の手間で求めることができる．分割統治法を用いていることから，ある１つの関数が最大値を与える関数になる部分領域は，$O((N-1)\log(N-1))=O(N\log N)$の手間で求めることができる．関数$X_{max}$は，以上の議論をN個の関数に関して各々対応する部分領域を求めることによって実現できるので，$O(N\log N)\times N=O(N^2\log N)$の手間，同様にして$X_{min}, Y_{max}, Y_{min}$も$O(N^2\log N)$の手間で求られる．

３．２　関数ｇの最小化の計算複雑度

関数ｇを求めるには，３．１で求めた関数$X_{max}, X_{min}, Y_{max}, Y_{min}$に対応する定義域領域を４つの相異なる$O(N^2)$個の部分領域に分割したものを重ね合わせて更に細分化された部分領域を求め，その領域に対応するある１つ関数を決定しなければならない．ｇの部分領域を求めるとき，関数$X_{max}, X_{min}, Y_{max}, Y_{min}$の部分領域の境界の総数に着目すると各々$O(N^2)$本，よって，全体としても$O(N^2)$本の境界しか存在しない．任意のｒ本の境界は，平面を高々$O(r^2)$個の領域にしか分割しないことから，ｇの細分化された部分領域の総数は$O((N^2)^2)=O(N^4)$個になる．

ｇに対応する部分領域の境界はθ軸に関して単調であるので，ｓ本の線分の交差列挙問題に対して平面走査法を用いて$O((s+t)\log s)$の手間で求める手法（ただし，ｔは交差する線分の対）[1]が適用できる．よって，ｇの部分領域の境界はθ方向に平面走査して，$O((N^2+N^4)\log N^2)=O(N^4\log N)$の手間で求められる．しかし，この場合の$t=O(N^4)$は最悪の場合であり，平均的にはもっと効率がよいと思われる．また，素朴なアルゴリズムを用いれば最悪の場合でも$O(N^4)$の手間で求めることができる．その求められたｇに対応する各々の部分領域における関数$X_{max}, X_{min}, Y_{max}, Y_{min}$は既知であるので，$g_x, g_y$を計算し，その２つのうちの大きい方がその部分領域に対応する関数ｇになる．この操作はある１つの部分領域に対して定数の手間で処理できるので，関数ｇは，部分区間の総数の手間すなわち$O(N^4)$の手間で求めることができる．

関数ｇをθ, lに関して最小化する際に次の２つの場合，すなわち，１）ｇを最小化する(θ, l)がある部分領域の境界上に存在する場合，２）ｇを最小化する(θ, l)がある部分領域内に存在する場合，が考えられる．１），２）の場合ともある部分領域とその境界を含めた関数は既知であるので容易に偏微分することによってその部分領域に対応する関数を最小化することができ，そのときの(θ, l)を求めることができる．この操作は１つの部分領域に対して定数の手間で求めることができるので，関数ｇを最小化するには，高々各部分領域に対応する関数の最小値の比較を行えばよく，部分領域の総数の手間すなわち$O(N^4)$の手間で求めることができる．その最小値εとそのεを与えるlによって，その点集合の正方格子度が得られる．

以上より，次の定理が成り立つ．

【定理】　Ｎ点集合に対する拡大縮小も考慮した正方格子度は，$O(N^4)$の手間で求めることができる．□

４．むすび

ほぼ正方格子状に並んだ点集合に対して，その正方格子の間隔まで考慮して正方格子度を定義し，それを求めるアルゴリズムを与えた．このアルゴリズムは，視覚センサによってピングリッドアレイ型ＬＳＩのピンを撮像の際に，視覚センサからＬＳＩまでの距離に変動がある場合に，そのＬＳＩを正方格子上に正方形のパタンが配列されている基板に表面実装する際の位置決めに利用できる．

謝辞　日頃から御助言，御討論頂いている本学上林彌彦教授ならびに研究室の皆様に深謝致します．本研究の一部は，文部省科研費奨励研究(A)63750361の援助を受けた．

参考文献

[1]J.L.Bentley and T.A.Ottman: An Algorithm for Reporting and Counting Geometric Intersections. IEEE Trans. on Computer, Vol.C-28, No.9 (1979), pp.643-647.

[2]H.Edelsbrunner, J.Pach, J.T.Schwartz and M.Sharir: On the Lower Envelope of Bivarite Function and Its Applications. Proc. 28th IEEE Symp. on Foundations of Computer Science, pp.27-37.

[3]今井浩，炭野重雄，内藤史門：点集合の正方格子度判定アルゴリズムについて．情報処理学会第36回（昭和63年前期）全国大会講演論文集，pp.63-64.

[4]内藤史門，森俊二，吉田誠：ＬＳＩマウンタの開発．富士時報，Vol.59, No.12 (1986), pp.763-767.

[5]炭野重雄，今井浩，内藤史門：点集合の正方格子度を求めるアルゴリズム．電子情報通信学会コンピュテーション研究会技術研究報告，Comp 88-15.