2-連結グラフの2分割アルゴリズム

2D-3

高橋奈穂美　斎藤　明　西関隆夫

(東北大学)

1. まえがき

本報告では，グラフ2分割問題を解く効率の良いアルゴリズムを与える．G=(V,E)は点集合V,辺集合Eを持つ無向単純グラフとする.点集合V'⊂Vによって誘導されるGの部分グラフをG［V'］と書く.Gの2つの点x，y∈V及び$n_x+n_y=|V|$なる2つの正の整数n_xとn_yが与えられたときに，集合Vの2分割V_x，$V_y(=V-V_x)$で$x\in V_x, y\in V_y, |V_x|=n_x, |V_y|=n_y$かつG［$V_x$］及びG［$V_y$］が連結であるようなものを見つけたい.この2分割問題はGを二部グラフに，$n_x=n_y=|V|/2$であると限定してもNP完全であり［DF］，一般のグラフに対する効率の良いアルゴリズムはありそうにない．本報告では，Gが2-連結である場合にこの問題をO(|V||E|)時間で解くアルゴリズムを与える.尚,E.Györi［G］は2-連結グラフGには上のような2分割が必ず存在することを証明しているが，本文のアルゴリズムはその証明とは全く異なる．

2. 縮約可能辺

グラフGから,点集合V'⊂Vのすべての点を除去して得られるグラフをG-V'と書く.Gは連結であるにもかかわらずG-｛x｝が非連結である時，点x∈Vは可分点という.可分点の無い連結グラフは2-連結であるという.グラフGのある辺(v,w)の両端点を同一視し,それによって生じた自己ループや多重辺を取り除く操作を辺(v,w)の縮約,点vを点wに縮約するという.2-連結グラフGの辺eを縮約して得られたグラフも2-連結グラフである時，辺eは縮約可能であると言う．eを縮約すると2-連結でなくなる時,辺eは縮約不可能であると言う.このとき次の定理が成り立つことが知られている［EN］．

［定理1］2-連結グラフGの辺(x, a_0)が縮約不可能ならば,グラフG'=G-$\{x, a_0\}$は非連結であり,G'の各成分と点xを結ぶ縮約可能な辺がGに存在する．従って点が3個以上ある2-連結グラフGの任意の点x∈Vには縮約可能な辺が2本以上接続している．

3. アルゴリズムPARTITION

次のアルゴリズムPARTITIONは2-連結グラフGの点集合Vの2分割$V=V_x\cup V_y$を求める．このことは定理1を用いればn_xの帰納法により直ちに証明できる.尚$V_y=V-V_x$である．

```
procedure PARTITION(G, n_x, V_x);
begin
  if  n_x=1  then  V_x := {x}
  else
    begin
      xに接続する縮約可能な辺(x,a)でa≠yなる辺を見つける；
      辺(x,a)を縮約して得られるグラフをGとし,
      xとaを同一視して得られる点を新たにxとする；
      PARTITION(G, n_x-1, V_x);
      V_x := V_x ∪ {a}
    end
end ;
```

2-連結グラフGの辺(x,a)が縮約可能であるための必要十分条件はG-｛x，a｝が連結なることである.よって点xにd(x)本の辺が接続しているとき，O(d(x)|E|)時間で所望の縮約可能な辺を見つける自明なアルゴリズムが考えられる．本報告では深さ優先探索を用いてこのような辺をO(|E|)時間で見つけるアルゴリズムを与える．よって上のPARTITIONはO(|V||E|)時間で走る．

まず，点xに接続する辺$e_1=(x, a_1)$で$a_1\neq y$なる任意の辺e_1を選び,e_1が縮約可能かどうか調べる.そのため,点yを出発点としてグラフ$G_1=G-\{x, a_1\}$を深さ優先探索する．もしe_1が縮約可能ならば，G_1は連結であり，G_1の全ての点がたどられる．もしe_1が縮約不可能なら，G_1の点yを含む連結成分C_yだけが探索され，未探索の点がある.定理1により,まだたどられていない点とxを結ぶ縮約可能な辺が必ず存在する.そのような辺の候補(x, a_2)を1本選び,点yを出発点として$G_2=G-\{x, a_2\}$を深さ優先探索する．このとき前回の探索との重複を避けるためには，点a_1以外の既に"old"とマークされた点はそのままにし,点yの代わりに点a_1を出発点として探索すればよい．このようにして次のCONTRACTIBLEによってxに接続する縮約可能な辺e=(x,a)でa≠yなる辺が見つかる.なお,点vに隣接する点の集合をN(v)と書く．

Algorithms for Bipartitioning 2-Connected Graphs
Naomi Takahashi, Akira Saito and Takao Nishizeki
Tohoku University

```
procedure SEARCH(v);
begin  {深さ優先探索}
  vにマーク"old"を付ける;                {vをたどった印}
  for N(v)の各点u do
    if uにマーク"new"が付いている then
      SEARCH(u)
end;

procedure CONTRACTIBLE(x,y,e);
begin
  Gの各点にマーク"new"を付ける;     {DFSのマークの初期化}
  xのマークを"old"にする;   {Gから点xを除去したことに相当}
  a:=y;
  while Gに"new"の点がある do
    begin
      b:=a;                          {bは次のDFSの出発点}
      マーク"new"が付いているN(x)-{y}の点を新たにaとする;
                                     {(x,a)は縮約可能な辺の候補}
      aのマークを"old"にする;{Gから点aを除去したことに相当}
      SEARCH(b)              {G-{x,a}の点bを含む
                               連結成分を探索する}
    end;
  e:=(x,a)                           {辺(x,a)は縮約可能}
end;
```

ＣＯＮＴＲＡＣＴＩＢＬＥにおいてＧの各辺は高々１回たどられるだけなので，明らかにＣＯＮＴＲＡＣＴＩＢＬＥは$O(|E|)$時間で走る．

２－連結グラフＧから点ｘを除去して得られるグラフのブロック・切断点木をG^{sp}とする．$G-\{x\}$が２－連結である時，ｘに接続する辺は全て縮約可能である．一方$G-\{x\}$が２－連結ではない時は，次の定理が成り立つ．

［定理２］$G-\{x\}$が２－連結ではないとし，Ｂを$G-\{x\}$の端ブロックとし，s_pはＢに含まれる$G-\{x\}$の切断点とする．このときｘと$B-\{s_p\}$を結ぶ辺が必ず存在し，それらはすべて縮約可能である．

連結グラフＧに対してそのブロック・切断点木を$O(|E|)$時間で構成するアルゴリズムが知られている［EV］．このアルゴリズムと上の定理２を用いても$a\neq y$なる縮約可能な辺(x,a)は$O(|E|)$時間で見つけることができる．

４．アルゴリズムＤＩＶＩＤＥ

次のアルゴリズムＤＩＶＩＤＥも２－連結グラフＧの所望の２分割を求める．ＤＩＶＩＤＥの計算時間も$O(|V||E|)$であるが，縮約可能辺が多く，一度に多くの点がｘまたはｙに同一視される場合は高速になる．

```
procedure DIVIDE(G,n_x,n_y,V_x,V_y);
begin
  G=(V,E)とする;
  一般性を失うことなくn_x≦n_yとする;
                            {n_x>n_yならxとyの役割を換える}
  if n_x=1 then
    begin
      V_x:={x};
      V_y:=V-{x}
    end
  else  {n_x,n_y≧2}
    begin
      点xにマーク"old"を付ける;
      他の点にマーク"new"を付ける;
      N(x)-{y}の点aを選ぶ;
      点aのマークを"old"にする;
      SEARCH(y);
      if Gの全ての点にマーク"old"が付いている
      then  {(x,a)は縮約可能}
        begin
          辺(x,a)を縮約して得られるグラフをGとし，xとaを
          同一視して得られる点を新たにxとする;
          DIVIDE(G,n_x-1,n_y,V_x,V_y);
          V_x:=V_x∪{a}
        end
      else  {マーク"new"の点がある．その集合をNEWとする}
        if |NEW|<n_x then
          begin
            マーク"new"の点を同一視して得られるグラフをGとする;
            DIVIDE(G,n_x-|NEW|,n_y,V_x,V_y);
            V_x:=V_x∪NEW
          end
        else  {|NEW|≧n_x}
          begin
            マーク"old"が付いているxでない点
            の集合をOLDとする;                {|OLD|<n_y}
            OLDの全ての点をyと同一視して得られるグラフ
            をGとし，得られる点を新たにyとする;
            DIVIDE(G,n_x,n_y-|OLD|,V_x,V_y);
            V_y:=V_y∪OLD
          end
    end
end;
```

［謝辞］日頃御指導頂く斎藤伸自教授に深謝する．

参考文献

［DF］ M.E.Dyer and A.M.Frieze, On the complexity of partitioning graphs into connected subgraphs, Discrete Appl. Math., 10(1985), 139－153.

［EN］ 榎本彦衛，グラフ学入門，日本評論社，1988.

［EV］ S.Even, Graph Algorithms, Computer Science Press, Potomac, Maryland, 1979.

［G］ E.Győri, On division of connected subgraphs, Combinatorics (Proc. Fifth Hungarian Combinatorial Coll., 1976., Keszthely), 485－494, Bolyai-North-Holland, 1978.