

# 直交表による実験計画の計画・解析 コンピュータ・システム

1R-9

須田健二、大埴 聡、武石浩幸  
(群馬高専 電気工学科)

## 1. はじめに

直交表を用いた直交実験において、要因数が多く、かつ推定したい2因子交互作用数も多い大規模な実験に対しては、直交表とその点線図が示されていたとしても、実験の所期の目的にかなうように要因の割りつけを決定することは簡単ではない。そこで、このような特定の技術によらず一定のアルゴリズムによって必要な直交実験の計画をコンピュータで自動的に構成することができれば実用さきわめて有効である。我々は、これらの直交実験に関する計画および推定・検定に関する統一的なプログラムシステムを開発し、種々の問題に適用してみた所、良好な結果を得たので報告する。

## 2. 直交実験の計画とt-独立集合

直交実験は、ある条件を満たすような行列  $G$  が作れば、その水準組み合わせの決定もまた解析も簡単であることが知られている<sup>1)</sup>。すなわち、水準数  $s$  が一定で、しかも素数べきであるなら、ガロア体  $GF(s)$  上、 $m \times n$  行列

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ g_{m1} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} \quad (n \leq m) \quad \cdots (2.1)$$

から直交表  $\Gamma$  は

$$\Gamma = \{\nu = G\theta, \theta \in GF(s)^n\} \quad \cdots (2.2)$$

として得られ、 $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n]^t$  に対して水準組み合わせ  $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$  を対応させる実験を直交実験と呼ぶ。特に  $G$  の任意の  $t$  行をとり、これら  $t$  個の行ベクトルが互いに一次独立であるとき、 $G$  は  $t$ -独立集合と呼ばれ、直交実験との間に密接な関係がある<sup>6)</sup>。この  $t$ -独立集合を求めるのに有限射影幾何<sup>1)</sup>を用いる。

## 3. 有限射影幾何による割りつけアルゴリズム

### 3.1 割りつけの原則と基本アルゴリズム

$m$  個の要因の集合  $M = \{F_1, F_2, \dots, F_m\}$  とその

水準数  $s$  および  $w$  個の2因子交互作用の組  $F_i \times F_j$  の集合

$$I = \{(i_1, j_1), \dots, (i_w, j_w)\} \subseteq M^{1,2}$$

が与えられたとき、まず要因の割りつけが可能となる有限射影幾何  $PG(n-1, s)$  の次元  $n$  の最小値を (3.1)式より求める。

$$\frac{s^n - 1}{s - 1} \geq m + (s - 1)w \quad \cdots (3.1)$$

そして、割りつけの原則<sup>1)</sup>は次のようになる。

- (1) 各因子  $F_i$  を  $PG(n-1, s)$  上の異なる点  $\xi(i)$  に割りつける。
- (2)  $\{i, j\} \in I$  で、 $F_i \rightarrow \xi(i), F_j \rightarrow \xi(j)$  と割りつけたとき、因子  $F_k (k \neq i, j)$  は  $\xi(i)$  と  $\xi(j)$  を結ぶ直線  $\xi(i)\xi(j)$  上に割りつけてはならない。
- (3)  $\{i, j\}, \{k, l\} \in I$  で、 $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$  ならば、 $F_i \rightarrow \xi(i), F_j \rightarrow \xi(j), F_k \rightarrow \xi(k), F_l \rightarrow \xi(l)$  と割りつけたときに、直線  $\xi(i)\xi(j)$  と  $\xi(k)\xi(l)$  とが交わってはならない。

そこで、上記 (1)(2)(3) に対して、すでに因子を割りつけた点や  $PG(n-1, s)$  上の index number<sup>5)</sup> を記憶しておけば、以下の基本アルゴリズムで必要な  $G$  行列が求まる。

- ① index number  $IN_0(i)$  が 0 なる点を捜し、 $F_i$  を割りつける。
- ② すでに割りつけた  $F_j$  について、 $\{i, j\} \in I$  のとき、 $\xi(i)\xi(j)$  上の他の点の index number が 0 ならば、上記 ①② をくり返す。

### 3.2 点の選び方

上記アルゴリズムにおいて、index number が 0 の点の集合の内からどのように1点を選ぶかという問題がある。この点の選び方が  $G$  行列を求める割りつけ時間に影響を及ぼすからである。現在までに我々は次の2つの方法でやってみたが、一長一短である。

(1)  $PG(n-1, s)$  上の点を原始元のべきによって  $\{0, 1, \dots, v-1\}$  と表現したとき、可能性のある点に対して小さい順に割りつける。

(2) 可能性のある点に対して、ある標値を計算し、その合計の値が最小の点を選ぶ。標値とは次のようなものである。 $F_i$  を割り付けた時点で  $F_j$  ( $j = 1 \sim i-1$ ) に対し、

①  $\{i, j\} \in I$  なら  $\overline{\xi(i)\xi(j)}$  上の点すべてに +2 する。

②  $\{i, j\} \notin I$  なら  $\overline{\xi(i)\xi(j)}$  上の点すべてに +1 する。

#### 4. 自動計画プログラムと解析プログラムの概要<sup>6)</sup>

##### 4.1 自動計画プログラムの概要

プログラムの流れを簡単に説明する。まず、題名、水準数、因子数を入力する。次に入力が正しく行われたかどうかのチェックの後、(3.1)式を満たす  $PG(n-1, s)$  の次元  $n$  を求め、分割法であれば、各因子が第何群であるかを入力する。ついで直線計算の前処理として初期直線を利用して  $D$ -table<sup>7)</sup> を作成する。変数の初期化を行ったあと、割りつけに入るが、ここで、AUTO と MANUAL のどちらで割りつけるかの指示をする。MANUAL はコンピュータと対話形式で割りつけるが、割りつけに際して、index number や標値の表などを利用でき、特別な点の割りつけや教育用などに利用できるようにしたものである。AUTO は文字通りコンピュータが自動的に割りつけてくれるもので、(3.2)節で述べたように2通りの方法で割りつけができるようになっている。また途中で割りつけが不可能になった場合、バックトラックをかけて1つ前の因子の割りつけをやり直すようになっており、この方法ですべての因子をすべての点についてチェックすることになるので可能なものは常に確実に割りつけを行えるが、計算時間は膨大になる場合がある。割りつけが完了したら、射影幾何  $PG(n-1, s)$  上の点に因子や交互作用がどのように割りつけられたかを示すリストを出力し、原始既約多項式の係数から、 $PG(n-1, s)$  の点をベクトル表現して  $G$  行列を作成して、出力する。そして、(2.2)式により直交表を作成し出力する。

##### 4.2 解析プログラムの概要

プログラムの流れは、まず、計画プログラムによって記憶されたデータ、すなわち、実験回数、水準数、因子数、2因子交互作用の組の数、割りつけるべき射影幾何

の次元と点の数、分割実験か否かや、射影幾何上の点と直交表の列番との対応、割りつけられた点と2因子交互作用の要因番号などを読み込む。この後、実験により得られたデータを入力すると、あとはコンピュータが自動的に各要因効果の推定や分散分析に必要なデータを計算して出力する。

#### 5. プログラムの評価

本論で示したプログラムの評価をするために、実用的に重要と思われる  $2^7$ 、 $2^{16}$ 、 $2^{31}$ 、 $3^{13}$ 、 $3^{40}$  系の割りつけに使う点線図<sup>2-4)</sup>を取り、これらのすべてについて本プログラムによって割りつけを実行させた。この結果、パソコンレベルで2、3の割りつけに長時間要したが、すべての点線図の割りつけに成功した。

#### 6. おわりに

本論で示したアルゴリズムにより、推定したい要因と水準数および2因子交互作用の組を入力するだけで、あとはコンピュータが自動的に必要な直交計画における水準組み合わせを出力してくれるので、実際に割りつけを行う者にとって非常に有効である。また、実験後にデータを入力するだけで、あとは解析に必要なデータを計算して出力してくれるシステムとなっている。

本システムは、要因数が多く、大規模な実験の計画に対して特に威力を発揮すると思われるが、本システムにより、ほとんど実験計画に対する知識のない人でも実験の計画・解析をすることが可能である。

#### 参考文献

- ① 高橋：「組合せ理論とその応用」、岩波書店、(1979)
- ② 奥野、芳賀：「実験計画法」、培風館、(1971)
- ③ 田口：「第3版 実験計画法(上)、(下)」、丸善、(1976)
- ④ 田口、小西：「直交表による実験のわりつけ方」、日科技連、(1959)
- ⑤ 須田、宮崎：直交配列を用いた実験計画の割りつけのコンピュータ・アルゴリズムについて、J I M A 誌 投稿中(1986)
- ⑥ 須田：直交表を用いた実験の計画・解析コンピュータ・システム、日科技連 D E 理論部会資料、(1986-6-26)
- ⑦ R. Fuji-Hara: "On the Automatical Construction for Orthogonal Designs of Experiments." Rep. Stat. Appl. Res., JUSE, pp. 13~25, Vol. 25, (1978)