等関数値曲面生成のための４面体格子法

4Q-13

土井章男・小出昭夫

日本アイ・ビー・エム株式会社　サイエンス・インスティチュート

１．はじめに

この論文では、等関数値曲面を多面体に近似する新手法、４面体格子法について論じる。等関数値曲面とは、与えられた空間上の関数Ｆ（ｘ，ｙ，ｚ）に対し、Ｆ（ｘ，ｙ，ｚ）＝Ｃを満たす点の集合であり、平面上の関数で定義される等高線の３次元への拡張である。

このような等関数値曲面をグラフィックス表示する必要は、圧力分布、密度分布、電位分布等の空間的シミュレーション結果の表示によく見られる。等関数値曲面をグラフィック表示する従来手法で、最も多く見られるのは等高線によるワイヤーフレーム表示やｒａｙ－ｔｒａｃｉｎｇ手法[1]である。等高線表示は、サーフェス表示を行うために各等高線を生成した後、各等高線同志を結ぶ処理が必要がある。この時、隣接する等高線のトポロジカルな性質が変わった時、頂点を結ぶ方法は、複雑にならざるを得ない。また、ｒａｙ－ｔｒａｃｉｎｇ手法は、対話的な処理（回転、移動、拡大）に対しては不向きである。

我々は、これらの観点から多面体近似アプローチを採用し、それに伴う新しいアルゴリズムを提案するに至った。以下では、４面体格子法について述べる。

２．４面体格子法

この手法は、格子点上で関数値が与えられたとき、格子点を頂点とする各４面体の辺上での線型補間により多面体近似の頂点を求めることにより、等関数値曲面を近似するデータを同時作成する手法である。この目的は、従来の複雑な制御を不要にし、有限回の演算で必ず等関数値曲面の多面体近似データが作成できるようにすることである。

４面体内の線型補間はその頂点上の関数値だけで十分であり、補間関数に対する等関数値曲面が内部にあれば、４面体の各面で切られる多角形となる。この多角形の各頂点（ｘ，ｙ，ｚ）はもとの４面体の辺上にあり、辺の両端での関数値、$f_1=f(x_1, y_1, z_1)$ と $f_2=f(x_2, y_2, z_2)$ だけから

$$t=(f_1-c)/(f_1-f_2)$$
$$x=x_1+t(x_2-x_1)$$
$$y=y_1+t(y_2-y_1)$$
$$z=z_1+t(z_2-z_1) \qquad (1)$$

で求まる。従って、格子点を頂点とする4面体に空間領域を分割すれば、各4面体内での線型補間で得られた多角形は自動的に互いに接続し、多面体データを生成する。

格子点を頂点とする４面体への空間領域分割は５分割あるいは６分割をもちいる。ここで格子点は、（ｉ，ｊ，ｋ）で表されている。また直方体というとき、(i,j,k), (i+1,j,k), (i,j+1,k+1), (i+1,j+1,k+1) を頂点とする直方体をさす。

（１）　５個の４面体への直方体分割

整数ｉ，ｊ，ｋに対し、$i'=2[(i+1)/2]$，$j'=2[(j+1)/2]$，$k'=2[(k+1)/2]$，$i''=2i+1-i'$，$j''=2j+1-j'$，$k''=2k+1-k'$ とするとき、次の５個の４面体に直方体を分割する。ここで、［　］はガウスの記号で少数部分切り捨てを表す。４面体は４頂点で与えられている。

T1　(i', j', k'),　(i", j', k'),
　　(i", j", k'),　(i", j', k")
T2　(i', j', k'),　(i", j", k'),
　　(i', j", k'),　(i', j", k")
T3　(i', j', k'),　(i', j', k"),
　　(i', j", k"),　(i", j', k")
T4　(i", j", k"),　(i', j", k"),
　　(i", j', k"),　(i", j", k')
T5　(i', j', k'),　(i", j", k'),
　　(i', j", k"),　(i", j', k")

６個の４面体への直方体分割は、紙面の都合上、講演会にて発表する。

前処理として各格子点上の関数値 ｆ（ｉ，ｊ，ｋ）（ｉ＝１，Ｌ，ｊ＝１，Ｍ，ｋ＝１，Ｎ；Ｌ，Ｍ，Ｎは、各ｘ，ｙ，ｚ方向の格子数）を求め、格子点を頂点とする４面体に直方体分割を行なう。次に格子点上の関数値からどの４面体に等関数値曲面が存在するか調べる。これは、４面体上の各関数値と定数Ｃとの大小関係から決まる。４頂点と定数Ｃとの大小関係は、１５通りの場合分け（表－１）があるが、実際は、ケース７～１３のみをしら

Tetrahedral Grid Method for Equi-valued Surface Generation
Akio DOI, Akio KOIDE
Science Institute, IBM Japan Ltd.

べるだけでよい。

ケース7〜13に該当する4面体のみに式（1）を適用することにより、2重に求めることなく、多面体データが生成できる。

3．2次補間による4面体格子法の改良

4面体の辺上で2次補間を用いることによりなめらかな多面体近似が得られる。手順は、次の通りである。辺の両端での関数値f_1とf_2とを使い、式（1）の線形補間でまず辺上の点を求める。この点（x_3，y_3，z_3）を用いてその点での関数値$f_3 = f(x_3, y_3, z_3)$を求める。次にこの辺上の3点での関数値を使って2次補間を行う。2次関数が値cをとる辺上の点は、残差

$$\Delta = \frac{(f_3 - c)(f_2 - f_1)}{(f_1 - c)(f_2 - c)}$$

と式（1）のtを用いて

$$\varepsilon = -\frac{2t(1-t)\Delta}{1-\Delta+2t\Delta+\sqrt{(1-\Delta)^2+4t\Delta}}$$

$$x = x_3 + \varepsilon(x_2 - x_1)$$
$$y = y_3 + \varepsilon(y_2 - y_1)$$
$$z = z_3 + \varepsilon(z_2 - z_1) \quad (2)$$

で与えられる。2次補間は、関数値曲面の傾きの変化が激しいものに適している。

4．4面体格子法の適用例

アルゴリズムの有効性を検証するために用いられた関数曲面は、$F(x, y, z) =$
$(X^2+Y^2-1)^2+4*Z^2+0.5*X \quad (3)$

そして、式（3）を4面体格子点法（格子5分割、格子5分割＋2次近似）により、グラフィック表示した結果を図1，2に示す。一般に格子6分割より格子5分割のほうが、4面体上の3角形の辺が均等なため、なめらかである。次にこの手法の効果を述べると、（1）関数値が格子点上で評価されているだけでよい。（2）生成アルゴリズムが簡単である。（3）線型補間が4面体の辺ごとに独立に行え並列処理が可能である。（4）2次補間により十分な形状の改善が得られる。

5．おわりに

等関数値曲面の多面体近似生成法について述べた。従来手法に比べてこれらの手法により複雑な関数曲面を容易にカラーグラフィックディスプレイに表示出来る。また、いくつかの曲面についてカラーの濃淡表示を行ない視覚的な効果も確かめることができた。

参考文献

（1）Blinn, J F "A generalization of Algebraic Surface Drawing",ACM transaction on Graphics,Vol. (1982)

大小関係を満たす頂点の合計

ケース	小	等しい	大	生成される多角形
1	4	0	0	なし
2	0	0	4	なし
3	3	1	0	なし
4	0	1	3	なし
5	2	2	0	なし
6	0	2	2	なし
7	3	0	1	3角形（1個）
8	1	0	3	3角形（1個）
9	2	0	2	4角形（1個）
10	2	1	1	3角形（1個）
11	1	1	2	3角形（1個）
12	1	2	1	3角形（1個）
13	1	3	0	3角形（1個）
14	0	3	1	3角形（1個）
15	0	4	0	3角形（4個）

表－1　4面体の関数値と定数Cとの大小関係

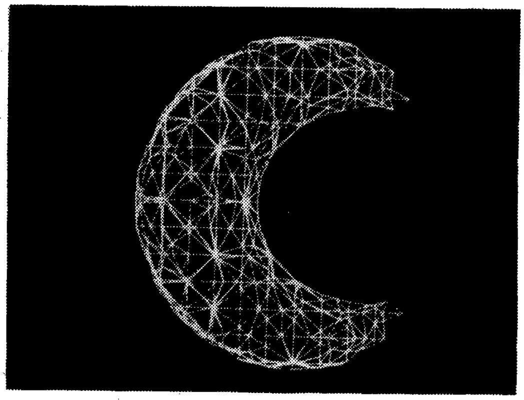

図1　格子5分割

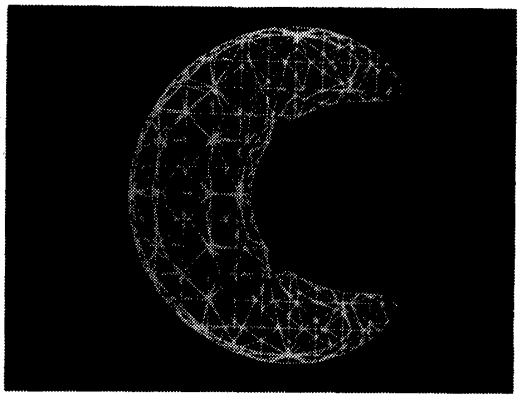

図2　格子5分割＋2次近似