

4Q-4

光束追跡法による画像生成

新谷 幹夫 高橋 時市郎 内藤 誠一郎  
NTT 電気通信研究所

1.はじめに

コンピュータグラフィックスにおいてray-trace法の高速化は最も重要な課題の一つである。高速化のための重要なアプローチの一つに、光線追跡の近似・簡略化が挙げられる。これに属する手法としてはbeam trace法[1]、画素値の補間[2]などが提案されているが、対象の拡張性、近似精度の保証などの点で問題が残されている。本稿では、これらの手法を一般化した概念である光束追跡法[3]について述べる。この理論は光学法則に基づき定式化されているので、上記問題を体系立てて見通しよく検討することが可能である。

2. 光束追跡法とシステムマトリクス

光束追跡法は反射・屈折等による光線の変化が線形近似できることに着目したもので、レンズ設計等で用いられるシステムマトリクスにより定式化されている。

(1) 定義

i) 光線: 光束の基準となる光線(以下、軸光線と呼ぶ)の近傍の光線(近軸光線と呼ぶ)は通過する点  $\mathbf{x}$  と波数ベクトル  $\mathbf{k} = 2\pi n/\lambda_0 \mathbf{s}$  ( $n$ : 屈折率,  $\lambda_0$ : 真空中の波長,  $\mathbf{s}$ : 光線の方向) で定義される(図1)。そこで、

- ① 軸光線に垂直な平面  $\alpha$  と近軸光線の交点  $\mathbf{x}$
  - ② 近軸光線の波数ベクトルの  $\alpha$  への投影  $\mathbf{f}$
- の組  $\phi = (\mathbf{x}, \mathbf{f})^T$  で近軸光線を表現する。

ii) システムマトリクス: ある地点で  $\phi$  であった近軸光線が、ある光学系を通過することにより  $\phi'$  に変化したとする。このときの変化は  $4 \times 4$  マトリクス  $T$  を用いて、

$$\phi' = T\phi \tag{1}$$

と表現できる。  $T$  をこの系のシステムマトリクスと呼ぶ。

(2) システムマトリクス

光線の追跡は、①均質媒体中の伝搬(移行)、②屈折、③反射、の繰り返しにより行われる。したがって、それぞれに対するシステムマトリクス(要

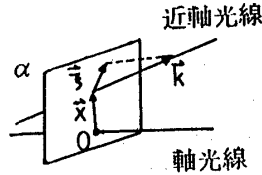


図1

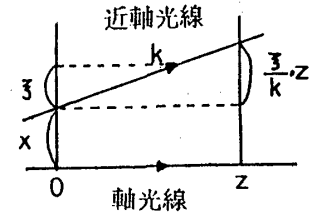


図2

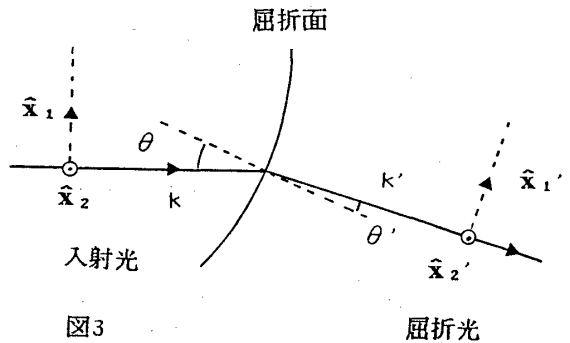


図3

素マトリクス)が求めればマトリクスを順次乗じていくことにより、光線の追跡が実行される。これらに対応するシステムマトリクスはSnell則及び幾何学的関係により計算される[4]。以下に導出結果を示す。

移行マトリクス

軸光線に沿って  $z$  だけ伝搬したとき、

$$T = \begin{bmatrix} 1 & z/k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる(図2)。ただし、  $k$  は波数。

屈折マトリクス

図3に示すように座標を定めると、

$$T = \begin{bmatrix} \Theta^{-1} \Theta'^{-1} & 0 \\ (\Theta')^{-1} h Q \Theta^{-1} & (\Theta')^{-1} \Theta \end{bmatrix} \tag{2}$$

ただし、

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Theta' = \begin{bmatrix} \cos \theta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$h = k' \cos \theta' - k \cos \theta$$

$\theta, \theta'$  は入射角および出射角。  $Q$  は屈折面の曲

率マトリックスで、例えば半径Rの球に対しては

$$Q = \begin{bmatrix} 1/R & 0 \\ 0 & 1/R \end{bmatrix}$$

反射マトリックス

反射に対する境界条件は屈折に対するものと同様なので、 $\theta' = \theta, k = k'$ を式(2)に入ればよい。

3. 光束追跡の処理形態

光束追跡の実現形態ならびにbeam trace法[1]、画素値の補間処理との関係について述べる。

(1) 解析的手法 以下の手順で追跡を行う。①軸光線を追跡、②移行・屈折・反射ごとに要素マトリックスを計算、③マトリックス積により光線と物体との交点を求める

(2) 一般化した透視変換 図4に示すようにピンホールから発する $\psi = (0, f)$ なる光線の追跡を考えると、式(1)は

$$x' = A f, \quad f = A^{-1} x'$$

と書き改められる。ただし、Aは2×2マトリックス。fからスクリーン座標 $x_s$ は直接求まり、1次変換 $x_s = S f$ で近似できる。したがって、

$$x_s = S A^{-1} x' = P x' \quad (3)$$

とできる。Pは反射・屈折等を含む系において局部的に成り立つ透視変換と見なす事ができる。移行のみの場合は通常の透視変換に一致する。beam trace法[1]では平面における反射および垂直入射光の屈折のみを扱っている。式(3)はこれの拡張であり、一般の屈折を扱うことができる。

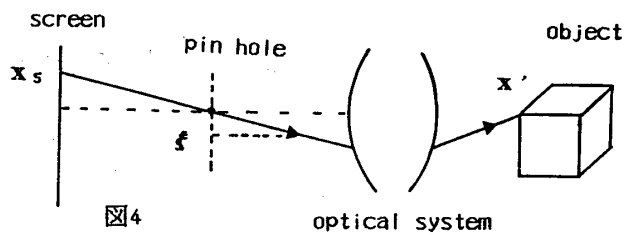
(3) 補間処理 解析的にシステムマトリックスを求めなくても、光束追跡を実行することができる。通常の光線追跡により2光線 $\psi_1, \psi_2$ を追跡し、その交点 $x_1', x_2'$ を得たとする。近傍の光線 $\psi = \alpha \psi_1 + \beta \psi_2$ に対する交点は、式(1)の線形性から $x' = \alpha x_1' + \beta x_2'$ として求まる。輝度Iの線形性も仮定できれば、 $I(x') = \alpha I(x_1') + \beta I(x_2')$ とできる。これは画素値の補間処理と等価である。テクスチャマップ等により画素値の補間ができない場合でも、 $x'$ から画素値を求める事ができる。

4. 許容誤差と誤差評価関数

一般に近似処理に対しては、誤差予測法、近似可能領域の機械的決定法が要求される。光束追跡法では、以下のようなアプローチで解析的にこれらが与えられる。

(1) 誤差評価関数

システムマトリックスを用いた追跡は $\psi$ に関する1次近似なので、2次の誤差を評価すればよい。反射・屈折・移行に対する誤差は、Snell則等の2次近似などにより解析的に求められる。また、こ



れらを複数回繰り返す系に対しても、線形系での誤差の伝搬などを考慮することにより求めることができる。これらの結果として、初期状態 $(x_0, f_0)$ の光線を追跡したときに系の最終段で観測される誤差 $\Delta x, \Delta f$ は2次式

$$|\Delta x| \leq A |x_0|^2 + B |f_0| |x_0| + C |f_0|^2$$

$$|\Delta f| \leq D |x_0|^2 + E |f_0| |x_0| + F |f_0|^2$$

で評価されることが導かれる。ただし、A~Fは系のシステムマトリックス、反射・屈折面の形状、軸光線の入射角などで定まる定数である。

(2) 許容誤差

ray-trace法による画像の分解能は光線の量子間隔により制限される。したがって、近似誤差が量子間隔より小さければ許容できるものと考えられる。光線の量子間隔を $\delta$ 、システムマトリックスを

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (A \sim D: 2 \times 2 \text{ matrix})$$

としたとき、物体面上での交点の量子間隔は、 $|A \ B| \delta$ である。上述の評価関数を用い、

$$|x_0|^2 + B |f_0| |x_0| + C |f_0|^2 \leq |A \ B| \delta$$

5. まとめ

光束追跡法をシステムマトリックスにより定式化し、その実現形態がbeam trace法、補間処理を包含・拡張する形で与えられることを示した。さらに、誤差評価が解析的に与えられることを示すとともに、量子化間隔に基づく許容誤差の基準を提案した。

謝辞 日頃ご指導をいただく島田情報通信基礎研究部長、塚本統括、増田第三研究室長、ならびにご討論頂いた室員諸氏に深謝いたします。

(文献) [1] P. S. Heckbert, et al., 'Beam ...', Computer Graphics, 18, No. 3, p. 119-127 (1984)  
 [2] 秋本 他, '隣接画素の類似性にもとづく光線追跡の高速化', 第30回情報処理学会大会, pp. 2059 (1985)  
 [3] 新谷, 高橋, 内藤, '光束追跡法による画像生成原理', 昭60年度信学システム全大, 90 (1985)  
 [4] G. A. Deschamps, 'Ray ...', Proceedings of the IEEE, 60, pp. 1022-1035 (1972)