非線型微分方程式の記号的巾級数解法

3X-1

対馬勝英，佐藤季弘

大阪電気通信大学，　　DEC

我々はオペレタ，関数，独立変数を独立した情報構造として持つ数式処理機能ＩＣＡＳを、mu-SIMP,mu-MATH 上に作成した。[1),2)] このＩＣＡＳは，数理科学研究用のヒューマンフレンドリィな数式処理機能をユーザに提供する。

任意の非線型常微分方程式

$$\frac{d^n U(x)}{dx^n} = F\left(U^{(n-1)}(x),\ \cdots\cdots,\ U'(x),\ U(x),\ x\right) \qquad ①$$

の記号的巾級数解を求めるアルゴリスムをＩＣＡＳの上に作成し，かつ記号的なPade近似解を求めることに成功したので，報告する。[3)]（下に示す微分方程式②を例にとり，具体的に述べる。）

微分方程式

$$Uxx = U + Ux \qquad ②$$

を形式的に微分すると，

$$Uxxx = 2UUx + Uxx \qquad ③$$

$$Uxxxx = 2Ux + 2UUxx + Uxxx \qquad ④$$

等を得る。（独立変数x を省略して表記した。）

②の巾級数解は、

$$U(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \qquad ⑤$$

と表せるが，

$$a_i = \frac{U^{(i)}(0)}{i\,!} \qquad ⑥$$

であるので，高階微係数$U^{(n)}(x)$のx=0 での記号形 $U^{(n)}(0)$が求まれば，それを⑤に代入することで②の記号的巾級数解を得る。②を③に代入し，③を④に代入するという記号的逐次代入法により$U^{(i)} = \underbrace{x \cdots x}_{i\text{ケ}}$ は U(x=0)，Ux(x=0)のみで表せる。従って，初期条件 U(x=0)，Ux(x=0) を予め記号的に、または数値的に与えると，②の巾級数解⑤が記号的に求まる。

図１にＩＣＡＳを用いて求めた②の記号的巾級数解の例を示した。

巾級数解の展開係数 a_i を用いて，⑤に対応した〔N,N 〕Pade近似

$$[N/N] = \frac{\det\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_N \\ \vdots & & & \vdots \\ a_N & & & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sum_{j=0}^{N} a_j x^j \end{vmatrix}}{\det\begin{vmatrix} a_0 & \cdots & \cdots & a_N \\ \vdots & & & \vdots \\ x^N & \cdots & \cdots & 1 \end{vmatrix}} \qquad ⑦$$

Symbolic Power Series Solution of NLODE

K.Tsushima , T.Sato

Osaka Electro-Communiction Univ.,D.E.C.

を得ることができる。図1 で求めた記号的巾級数解の展開係数 a_i を用いて、①のPade近似解を得た。(図2)

ここに述べた処方は，任意の非線型常微分方程式①に対して適用できることは自明である。さらに，非線型連立常微分方程式系に対しても，この処方が使えることは自明であろう。

従来の記号的Newton法による線型化と微分方程式記号解法パッケジODE を用いた手法[4]に比較して，本手法は

1)高階の常微分方程式にも適用できる。

2)ODE をもちいないので高速である。

3)ICASのオペレタを扱う機能を利用しているので，アルゴリスムの自然的記述ができる。

という著しい特徴を持つ。またPade近似に関しても，従来の手法は代数方程式解法パッケジLINEQNを用いたため[5]，線型問題にしか対応出来なかったが，本手法は⑦を用いることで非線型問題への直接的対応を可能とした。本システムKAI,PADEはMS-DOSを持つパソコン上で稼動し、既に多くのユーザを獲得している。

〔参考文献〕

*) mu-SIMP,mu-MATH はSOFT WARE HOUSE 社の登録商標である。

1) 対馬，「小型数式処理システムと応用」，情報処理学会誌,27,4,379,('86)

2) Thushima,Sato,OAP … Operater Algebra Package, SIGSAM Bulletine,(to apper)

3) 対馬，「微分方程式のPADE近似解」,REDUCE プログラミング資料(3),('86)

4) Geddes:Convergence behavior of the Newton iteration for first oder differatial equation , EUROSAM '79.proceeding,189,'79

5)Hussain,Application of MACSYMA to calculations in applied mathematics,General Electric ,('83)

a)

```
6? A: KAI(Ux(x) + U(x)^2, 8, 0, 1, 1);
@: 1 + x + x^2 + 2/3 x^3 + 5/12 x^4 + x^5/4 + 53/360 x^6 + 71/840 x^7 + 137/
2880 x^8
```

b)

```
2? A: KAI(Ux(x) + U(x)^2, 6, x0, U0, Ux0);
@: U0 + x Ux0 + x^2 Ux0/2 + x^2 U0^2/2 + x^3 U0
Ux0/3 + x^3 Ux0/6 + x^3 U0^2/6 + x^4 U0 Ux0/6 + x^
4 Ux0/24 + x^4 U0^2/24 + x^4 U0^3/12 + x^4 Ux0^2/
12 + x^5 U0 Ux0/20 + x^5 Ux0/120 + x^5 U0^2/120 +
x^5 U0^2 Ux0/12 + x^5 U0^3/30 + x^5 Ux0^2/15 + x^6
 U0 Ux0/90 + x^6 U0 Ux0^2/36 + x^6 Ux0/720 + x^6
U0^2/720 + 19/360 x^6 U0^2 Ux0 + x^6 U0^3/120 + x^
6 U0^4/72 + 11/360 x^6 Ux0^2
```

図 1　②の巾級数解　a) x=0,U(0)=1,Ux(0)=1　b)　記号的初期条件

```
6?
ANSWER: EVAL (EVAL (P)/EVAL (Q));
@: (1 + 5/44 x + 29/308 x^2 - 829/9240 x^3 - 227/3696 x^4)/(1 - 39/44 x - 3/154
 x^2 + 1381/9240 x^3 - 317/18480 x^4)
```

図 2　②のPade近似解