2X-4

確率微分方程式の ルンゲ・クッタ解（I）

（岡山理科大学理学研究科）
榊原道夫，仁木　滉，日吉由美

1．まえがき；確率微分方程式(SDE)は，種々な確率過程に支配されている現象を記述する方程式である．例えばブラウン運動および統計的に制御されている力学系などである．通常の微分方程式の初値問題に対する数値解法としてルンゲ・クッタ法がよく知られている．本報告において筆者らは，SDEに対するルンゲ・クッタ解について考察する．この分野の研究はいくらか存在する[1,2]．しかしあまり詳しくは調べられていないようである．SDEにルンゲ・クッタ法を用いた場合の問題点の考察，および従来，得られている結果との比較検討を行う．

2．確率微分方程式；　SDE:

$$dx(t)=a(x,t)dt+b(x,t)dW(t) \qquad (1)$$

について考えよう．いまブラウン運動を考えるならば，W(t)はウィーナー過程であり，W[t;h]=W(t+h)-W(t)は正規分布となる．ところでEq.(1)は積分方程式

$$x(t)=x(0)+\int_0^t a(s,x(s))ds + \int_0^t b(s,x(s))dW(s) \qquad (2)$$

と等価である．確率積分の定義として伊藤の規約

$$\int_0^t b(x)\,dW(t)=\lim_{h\to 0}\sum b(x(t_k))W[t_k;h]$$

およびストラトノビッチの規約

$$S\!\!\int_0^t b(x)\,dW(t)=\lim_{h\to 0}\sum b(x((t_k+t_{k+1})/2))W[t_k;h]$$

が知られている．それらの規約の間には次の関係が存在する．

$$S\!\!\int b(x)dW(t)=\int b(x)dW(t)+\frac{1}{2}\int\frac{db}{dx}dW(t) \qquad (3)$$

例として次の簡単な確率微分方程式

$$dx(t) = x(t)dW(t) \qquad (4)$$

を考えよう．Eq.(3)に対する伊藤の解およびストラトノビッチの解はそれぞれ

$$x(t) = \exp[-(1/2)t + W(t)],$$

$$x(t) = \exp[W(t)]$$

となる．

3．ルンゲ・クッタ法；　Eq.(2)の数値解法としてルンゲ・クッタ法を考える．それらは次のようになる．（２次のルンゲ・クッタ　スキーム）

x<n+1>=x<n>+x[n;h], x[n,h]=(k1+k2)/2
k1=a(<n>,x<n>)h+b(<n>,x<n>)W[<n>;h]
k2=a(<n+1>,x<k+1>+k1)h
　　+b(<n+1>,x<n+1>+k1)W[<n>;h]

（４次のルンゲ・クッタ　スキーム）

x<n+1>=X<n>+(1/6)(k1+k2+k3+k4)
k1=a(<n>,x<n>)h+b(<n>,x<n>)W[<n>;h]
k2=a(<n+1/2>,x<n>+k1/2)h
　　+b(<n+1/2>,x<n>+k1/2)W[<n>;h]
k3=a(<n+1/2>,x<n>+k2/2)h
　　+b(<n+1/2>,x<n>+k2/2)W[<n>;h]
k4=a(<n+1>,x<n>+k3)h
　　+b(<n+1>,x<n>+k3)W[<n>;h]

ここで<n>=n*h,<n+1/2>=n*h+h/2．

4．数値例；　Eq.(4)に対して２次および４次のルンゲ・クッタ　スキームを適用した結果をしめす．表１および表２においてt=1における誤差の分布をしめす．

Runge-Kutta solutions to the stochastic differential equation (I)
Michio Sakakihara, Hiroshi Niki, Yumi Hiyoshi
Okayama University of Science

文献： [1]D.J.Wright,The digital simulation of stochastic differential equations,IEEE Trans. Automatic Contorol AC-19 75-76 (1974).[2]P.E.Kloedenand R.A. Pearson,The numerical solution of stochastic differential equation,J.Austral .Math.Soc.20(Series B)8-12 (1977).

----- Storatonovich solution ---

=== the limit ========	count	== ratio ==============	normal distribution =================
-0.0650 <= x< -0.0600	(0)	0.000 %	
-0.0600 <= x< -0.0550	(17)	1.700 %	*****************
-0.0550 <= x< -0.0500	(19)	1.900 %	*******************
-0.0500 <= x< -0.0450	(30)	3.000 %	******************************
-0.0450 <= x< -0.0400	(23)	2.300 %	***********************
-0.0400 <= x< -0.0350	(24)	2.400 %	************************
-0.0350 <= x< -0.0300	(33)	3.300 %	*********************************
-0.0300 <= x< -0.0250	(31)	3.100 %	*******************************
-0.0250 <= x< -0.0200	(42)	4.200 %	**
-0.0200 <= x< -0.0150	(42)	4.200 %	**
-0.0150 <= x< -0.0100	(38)	3.800 %	**************************************
-0.0100 <= x< -0.0050	(44)	4.400 %	**
-0.0050 <= x< 0.0000	(49)	4.900 %	***
0.0000 <= x< 0.0050	(33)	3.300 %	*********************************
0.0050 <= x< 0.0100	(32)	3.200 %	********************************
0.0100 <= x< 0.0150	(24)	2.400 %	************************
0.0150 <= x< 0.0200	(13)	1.300 %	*************
0.0200 <= x< 0.0250	(12)	1.200 %	************
0.0250 <= x< 0.0300	(16)	1.600 %	****************
0.0300 <= x< 0.0350	(12)	1.200 %	************
0.0350 <= x< 0.0400	(9)	0.900 %	*********
0.0400 <= x< 0.0450	(17)	1.700 %	*****************
0.0450 <= x< 0.0500	(8)	0.800 %	********
0.0500 <= x< 0.0550	(8)	0.800 %	********
0.0550 <= x< 0.0600	(8)	0.800 %	********
0.0600 <= x< 0.0650	(5)	0.500 %	*****

mean value = 0.1157414

2次-ルンゲ・クッタ 反復スキームにおける
誤差の分布(時間t=1 反復回数 5回 データ回数1000個)

=== the limit ========	count	== ratio ============	normal distribution ==================
-0.0325 <= x < -0.0300	(0)	0.000 %	
-0.0300 <= x < -0.0275	(1)	0.100 %	
-0.0275 <= x < -0.0250	(1)	0.100 %	
-0.0250 <= x < -0.0225	(0)	0.000 %	
-0.0225 <= x < -0.0200	(5)	0.500 %	
-0.0200 <= x < -0.0175	(5)	0.500 %	
-0.0175 <= x < -0.0150	(5)	0.500 %	
-0.0150 <= x < -0.0125	(12)	1.200 %	*
-0.0125 <= x < -0.0100	(12)	1.200 %	*
-0.0100 <= x < -0.0075	(18)	1.800 %	*
-0.0075 <= x < -0.0050	(30)	3.000 %	***
-0.0050 <= x < -0.0025	(42)	4.200 %	****
-0.0025 <= x < 0.0000	(120)	12.000 %	************
0.0000 <= x < 0.0025	(499)	49.900 %	***
0.0025 <= x < 0.0050	(89)	8.900 %	********
0.0050 <= x < 0.0075	(34)	3.400 %	***
0.0075 <= x < 0.0100	(28)	2.800 %	**
0.0100 <= x < 0.0125	(15)	1.500 %	*
0.0125 <= x < 0.0150	(13)	1.300 %	*
0.0150 <= x < 0.0175	(6)	0.600 %	
0.0175 <= x < 0.0200	(8)	0.800 %	
0.0200 <= x < 0.0225	(5)	0.500 %	
0.0225 <= x < 0.0250	(7)	0.700 %	
0.0250 <= x < 0.0275	(4)	0.400 %	
0.0275 <= x < 0.0300	(5)	0.500 %	
0.0300 <= x < 0.0325	(2)	0.200 %	

mean value = 5.2969200E-03

4次-ルンゲ・クッタ 反復スキームにおける
誤差の分布(時間t=1 反復回数 5回 データ回数1000個)