# 計算機による複素平面上における積分路の検出

2X-1

鈴木　博貴
日本大学大学院

## 1．はじめに

複素平面上の実軸近傍に特異点を持つ様な有理関数が被積分関数である場合には、実軸上に積分路を採って数値積分を行うと、特異点の影響を受けて計算の途中で関数値の絶対値が大きくなり、大きな誤差を伴う数値が現れる。そこで、その誤差を伴う数値を用いて更に計算を進めると、桁落ちを起こして絶対値の小さい数値積分値が得られるとき、その結果の数値積分値は精度を失ってしまい、桁落ちしただけ相対誤差が大きくなる。その様な場合、積分路を複素領域に採ることによって桁落ち誤差を防ぐことができるときがある。

しかし、複素領域における特異点を検出し、次いでそれらの特異点の影響を考慮して適当な積分路を決定することは容易ではない。

そこで、適当な積分路を検出する方法について研究してみた。ここに、その検出方法のひとつを提案する。ただし、ここで用いた数値積分法は、シンプソンの 1／3 公式である。また、使用した計算機は、TOSBAC UX-300 （16進６桁計算機）である。

## 2・検出方法

実軸上に積分路を採ると、特異点の影響を受けて桁落ち誤差を生じ、数値積分値が精度を失ってしまう場合とは、絶対値の大きな正の関数値と、その正の関数値とほぼ等しい絶対値である負の関数値が現れるためである。そこで、数値積分を行うのに適当な積分路を計算しながら決定し、絶対値の大きな関数値が数値積分の計算中に現れることをできるだけ防ぐ方法を考えてみた。

積分路の決定は、次の様に行った。

1）今、積分路上の $i$ 番目の点 $X_i$ において、“ある間隔”だけ離れた４つの点について考える。（図１参照）
2）それら４つの点における関数値の内、絶対値の最大となるものを見つける。
3）絶対値が最大となる関数値の点に対して、＋９０°の方向に位置する点を積分路に採り、これを積分路上の $i+2$ 番目の点 $X_{i+2}$ とする。

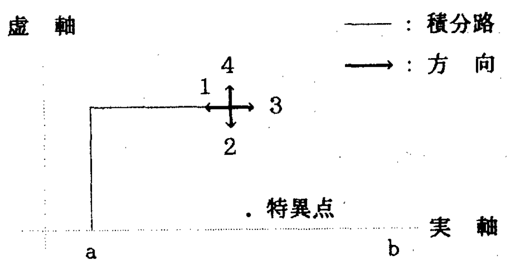

図１．積分路とその方向

たとえば、今、図１の点 $X_i$ で１～４番の点を考えたとする。２番目の点のとき関数値の絶対値が最大となる点であったとするならば、積分路は３番目の点を $i+2$ 番目の点 $X_{i+2}$ として採ることになる。また、点 $X_i$ と点 $X_{i+2}$ の中間点を点 $X_{i+1}$ とする。ここで、問題となるのは“ある間隔”をどの様に決めれば良いのかということである。

この場合、分かっているものは積分区間が実軸上の［ａ，ｂ］ということである。

そこで、端点“ａ”と“ｂ”をもとにこの区間を等分割して、そのひとつの間隔を“ある間隔”として採用することにした。

Computerized searching method for the path of integration on a complex plane
Hiroki SUZUKI
NIHON,Univ.

3．被積分関数と計算結果

実例として２つの関数を採り上げた。ここに、被積分関数と計算結果を示す。ただし、積分区間はすべて［０，１］とした。被積分関数を $fi(x)$ 又は $gj(x)$ とするならば、

$\int fi(x)\,dx = Fi(x) + Ci$ ，$\int gj(x)\,dx = Gj(x) + Cj$ （$Ci$ ，$Cj$ ：積分定数）

で表される。計算結果の定積分値は、$Fi(1) - Fi(0)$ ，$Gj(1) - Gj(0)$ によって求めた。

また、「２．検出方法」の“ある間隔”は積分区間の［０，１］を16分割して求めた。

被積分関数：

$$fi(x) = \frac{Ai4\,x + Ai5}{(Ai1\,x^2 + Ai2\,x + Ai3)^2} \quad \cdots \text{(i)}, \quad Fi(x) = \frac{1}{Ai1\,x^2 + Ai2\,x + Ai3} \quad \cdots \text{(I)}$$

$$gj(x) = \frac{Bj4\,x + Bj5}{Bj1\,x^2 + Bj2\,x + Bj3} \quad \cdots \text{(ii)}, \quad Gj(x) = \log(Bj1\,x^2 + Bj2\,x + Bj3) \quad \cdots \text{(II)}$$

表１．被積分関数の係数および積分路

| 例 | f (x) | 係　　　数 | 積　分　路 |
|---|---|---|---|
| 1 | f 1(x)<br><br><br><br>特　異　点 | A11= 1.000000E 0,A12=-8.485282E-1,A13= 1.800010E-1<br>A14=-2.000000E 0,A15= 8.485282E-1<br><br><br>f 1(x):　( 4.242640E-1 , ±1.003494E-3 ) | ( 0.0 , 0.0 )<br>( 0.0 , 4.375E-1)<br>( 8.750E-1, 4.375E-1)<br>( 8.750E-1, 0.0 )<br>( 1.000E 0, 0.0 ) |
| 2 | f 1(x)<br>+ f 2(x)<br>+ g 1(x)<br><br><br><br><br>特　異　点 | A11= 1.000000E 0,A12=-9.210430E-1,A13= 2.120773E-1<br>A14=-2.000000E 0,A15= 9.120340E-1<br>A21= 1.000000E 0,A22=-1.414214E-1,A23= 1.850000E-1<br>A24=-2.000000E 0,A25= 1.414214E-1<br>B11= 1.000000E 0,B12=-1.549193E 0,B13= 6.000010E-1<br>B14= 2.000000E 0,B15=-1.549193E 0<br><br><br>f 1(x):　( 4.605170E-1 , ±1.169963E-3 )<br>f 2(x):　( 7.071066E-2 , ±4.242640E-1 )<br>g 1(x):　( 7.745963E-1 , ±1.307742E-3 ) | ( 0.0 , 0.0 )<br>( 0.0 , 1.250E-1)<br>( 6.250E-2, 1.250E-1)<br>( 6.250E-2, 2.500E-1)<br>(-1.875E-1, 2.500E-1)<br>(-1.875E-1, 9.375E-1)<br>( 3.125E-1, 9.375E-1)<br>( 3.125E-1, 3.750E-1)<br>( 8.750E-1, 3.750E-1)<br>( 8.750E-1, 0.0 )<br>( 1.0 , 0.0 ) |

表２．計算結果

| | | 分割数 | 刻み幅（絶対値） | 積分値（ 実部，虚部 ） | 誤差（実部） | 有効桁数 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 例１ | 数値積分値 | 60<br>120 | 3.125000E-2<br>1.562500E-2 | -2.5387716E 0, 8.5830688E-6<br>-2.5386801E 0, 6.6757202E-6 | 0.0000896E 0<br>0.0000019E 0 | 4.45<br>6.13 |
| | 定積分値 | | | -2.5386820E 0, 0.0 | | |
| 例２ | 数値積分値 | 108<br>216 | 3.125000E-2<br>1.562500E-2 | -8.1959572E 0,-6.2831669E 0<br>-8.1953592E 0,-6.2831583E 0 | 0.0005684E 0<br>0.0000295E 0 | 4.16<br>5.44 |
| | 定積分値 | | | -8.1953888E 0, 0.0 | | |

注）「刻み幅」は“ある間隔”の 1／2 又は 1／4 の絶対値を表している。「誤差（実部）」は実部における相対誤差である。また、「有効桁数」は実部における有効桁数である。

5．おわりに

以上述べてきた様に、積分路を計算しながら決定し、絶対値の大きな関数値が計算中に現れることをできるだけ防ぐ方法を考えれば、この様な実軸近傍に特異点を持つ有理関数が被積分関数の場合、特異点を検出してそれらの特異点の影響を考慮する手間を省いても、実軸に積分路を採ったときよりも精度の良い数値積分値が容易に得られる。また、一度積分路を検出してしまえば、刻み幅を 1／2 に変更したときでも改めて積分路を検出しなくても良いことになる。

ただし、例２の様に被積分関数の留数和 $m \neq 0$ のとき、数値積分値には $-2m\pi i$ の不要な数値が虚部に入ってくることに注意する必要がある。