静電場的解釈による代数方程式の解法

1X-5

櫻井鉄也　鳥居達生　杉浦洋
(名古屋大学工学部)

1．まえがき

代数方程式f(z)=0の根を求める反復解法を示す．この方法は、静電場的なモデル（電荷量推定型2電荷モデル）によって得られる有理式によりf'(z)／f(z)を近似することに基づく方法で、f(z)が多重根を持つ場合でも収束が遅くならず、大域的収束性も良い．修正量の計算では、f(z)の4階導関数までを必要とするが、2次方程式を解くだけで4次収束する．

2．静電場的解釈[1]

n次代数方程式f(z)＝0のn個の根を ξ_1，ξ_2，…，ξ_n とする．f(z)で定義される“共役電場”e(z)を

$$e(z)=\frac{f'(z)}{f(z)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-\xi_i}$$

とする．これは、複素平面を2次元実ベクトル空間と同一視して、点 ξ_1，点 ξ_2，…，点 ξ_n に電荷量1の正電荷を置いたときに点zで観測される電場の共役複素数である．方程式f(z)＝0の解法をこの観点から導く．

1電荷モデル（Newton法）

点zで観測した共役電場e(z)が、点αにある電荷量1の正電荷のみによってつくられていると仮定すると、その式は

$$\frac{1}{z-\alpha}=e(z)$$

これより　Newton法

$$\alpha=z-\frac{1}{e(z)}=z-\frac{f(z)}{f'(z)}$$

を得る．

2電荷モデル（2次Taylor展開法）[2]

点zで観測した共役電場e(z)が、点 α_1，α_2 にある電荷量1の正電荷によってつくられていると仮定すると、その式は

$$\frac{1}{z-\alpha_1}+\frac{1}{z-\alpha_2}=e(z) \qquad (1)$$

$$\frac{1}{(z-\alpha_1)^2}+\frac{1}{(z-\alpha_2)^2}=-e'(z) \qquad (2)$$

ここで

$$e'(z)=\frac{f''(z)}{f(z)}-\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2$$

である．

修正量を $d_1=z-\alpha_1$，$d_2=z-\alpha_2$ とおくと式（1），（2）より d_1，d_2 の従う2次方程式

$$\{e^2(z)+e'(z)\}x^2+2e(z)x+2=0$$

を得る．これは、e(z)，e'(z)をf(z)，f'(z)，f''(z)で表わすと2次のTaylor展開法の式

$$f''(z)x^2+2f'(z)x+2f(z)=0$$

となる．一般に、k次Taylor展開法は、点zで観測した共役電場e(z)が点 α_1，α_2，…，α_k にある電荷量1のk個の電荷によってつくられていると仮定する“k電荷モデル”と考えられる．

3．電荷量推定型2電荷モデル

点zで観測した共役電場e(z)が点 α_1，α_2 にある電荷量がそれぞれ μ_1，μ_2 の電荷によってつくられていると仮定すると、その式は

$$\frac{\mu_1}{z-\alpha_1}+\frac{\mu_2}{z-\alpha_2}=e(z)\equiv c_1 \qquad (3)$$

$$\frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^2}+\frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^2}=-e'(z)\equiv c_2 \qquad (4)$$

$$\frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^3}+\frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^3}=\frac{1}{2}e''(z)\equiv c_3 \qquad (5)$$

$$\frac{\mu_1}{(z-\alpha_1)^4}+\frac{\mu_2}{(z-\alpha_2)^4}=-\frac{1}{6}e'''(z)\equiv c_4 \qquad (6)$$

式（3）～（6）より修正量 d_1，d_2 の従う

An Iterative Method for Finding a Root of Polynomial f(z),Based on an Electrostatic Interpretation

Tetsuya SAKURAI,Tatsuo TORII,Hirosi SUGIURA
NAGOYA Univ.

2次方程式

$$(c_2 c_0 - c_1^2)x^2 + (c_2 c_1 - c_3 c_0)x + c_3 c_1 - c_2^2 = 0$$

を得る．この方程式の2根のうち絶対値の小さいほうをd_1とし、つぎの近似根を$\alpha_1 = z - d_1$とする．

<u>収束の次数</u>

$$\tilde{e}(z) = \frac{\mu_1}{z-\alpha_1} + \frac{\mu_2}{z-\alpha_2}$$

によって共役電場$e(z) = f'(z)/f(z)$を近似すると考える．

ここで、

$$F(z) = 1/e(z)$$

$$G(z) = 1/\tilde{e}(z) = \frac{(z-\alpha_1)(z-\alpha_2)}{\mu_1(z-\alpha_2)+\mu_2(z-\alpha_1)}$$

とおく．式（3）～（6）が成立つとき、$F(z)$と$G(z)$は点zで3階微分まで一致する．よって、$F(\alpha_1)$と$G(\alpha_1)$をzでlaylor展開して、両辺をひくと

$$F(\alpha_1)-G(\alpha_1) = \frac{1}{4!}\left(F^{(4)}(z)-G^{(4)}(z)\right)(\alpha_1 - z)^4 + \cdots$$

$(\alpha_1 - z)^4$の係数をCとおけば、$G(z)$の定義より$G(\alpha_1)=0$であるから

$$F(\alpha_1) \approx C(\alpha_1 - z)^4$$

ここで、$F(z)$の真の根をα_tとすると

$$F(\alpha_1) \approx F(\alpha_t) + F'(\alpha_t)(\alpha_1 - \alpha_t)$$

$F(z)$は単根しか持たないので　$F'(\alpha_t) \neq 0$．$F(\alpha_t)=0$より

$$\alpha_1 - \alpha_t \approx \frac{C}{F'(\alpha_t)}(\alpha_1 - z)^4$$

よって、この方法は4次収束する．

<u>初期値，減次</u>

減次による誤差の蓄積を避けるために、平野の方法[3]を用いて減次する．しかし、初期値を一点に固定すると問題によっては残差の大きな根がでるため（例えば　$f(z) = \prod_{k=-m}^{m}(z-k)$において、正の根をすべて先に求めたときの負の根）、原点を中心として根の平均半径上に4点をとり、それらの点を順に初期値とし、原点のまわりで根の分布になるべく偏りが生じないようにする．

<u>収束判定</u>

$$|f(\alpha)| \le u\sum_{i=0}^{n}|a_i||\alpha|^{n-i}$$

（ここでu＝1.D-15とした）

となったときに収束したと判定する．

<u>数値例</u>

本方法を用いた計算結果を示す．$f(z)$の次数が$n=2$となったところで2次方程式を直接解いて最後の2根を得る．計算は倍精度で行なった．真の根と異なる最初の桁に下線をひいた．それぞれの根の後の括弧の中の値は反復回数を示す．

ここで、$f(z) = (z^2+z+2)^4(z^2+z+3)^4$

$$-0.49\underline{8}796 - 1.32\underline{4}275i \quad (3)$$
$$-0.49\underline{8}202 + 1.32\underline{3}262i \quad (3)$$
$$-0.50\underline{1}328 - 1.65\underline{9}773i \quad (3)$$
$$-0.50\underline{2}046 + 1.658\underline{0}81i \quad (3)$$
$$-0.49\underline{8}611 - 1.32\underline{1}683i \quad (4)$$
$$-0.499\underline{6}05 + 1.32\underline{1}092i \quad (4)$$
$$-0.50\underline{1}471 - 1.65\underline{6}973i \quad (4)$$
$$-0.500\underline{2}37 + 1.6\underline{6}0344i \quad (4)$$
$$-0.50\underline{1}410 - 1.32\underline{4}068i \quad (4)$$
$$-0.500\underline{4}01 + 1.32\underline{4}680i \quad (4)$$
$$-0.49\underline{8}550 - 1.65\underline{9}651i \quad (4)$$
$$-0.499\underline{7}55 + 1.65\underline{6}258i \quad (4)$$
$$-0.50\underline{1}181 - 1.32\underline{1}476i \quad (4)$$
$$-0.50\underline{1}790 + 1.322\underline{4}67i \quad (4)$$
$$-0.49\underline{7}961 + 1.658\underline{5}64i \quad (0)$$
$$-0.49\underline{8}649 - 1.65\underline{6}852i \quad (0)$$

この結果より、一根を求めるための反復回数は、平均して4回程度と少なく、回数のばらつきも小さいことがわかる．

参考文献

[1] M.Marden, The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variables, Amer.Math. Soc.,(1949)

[2] S.Hitotumatu, A Method of Successive Approximation Based on the Expansion of Second Order, Mathematica Japonicae 7,pp.31-50,(1966)

[3] 平野菅保, 代数方程式の減次, Computrol No.12, pp.92-95, (1985)