交代級数に対する最適線形加速法

1X-2

杉浦 洋
(名古屋大学工学部)

[0] はじめに

無限級数

$$S=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

に対する加速法とは，Sに対する近似列$\{\sigma_n\}$，

$$\sigma_n=\sigma_n(a_0,\cdots,a_n) \qquad (2)$$

である。σ_nが$a_0\sim a_n$に関して線形なら$\{\sigma_n\}$は線形加速法とよばれる。もちろんある線形加速法が有効に働くには，(1)の無限級数が何らかの仮定を満さねばならない。ここでは各項が，

$$a_n=(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,dx \qquad n\ge 0 \qquad (3)$$

となる級数を対象とした線形加速法について考える。(3)はやや恣意的のようであるが

$$a_n=(-1)^n\left(\frac{1}{n+\alpha+1}\right)^{\beta+1}=(-1)^n\int_0^1 x^n\frac{x^\alpha}{\Gamma(\beta+1)}\left(\log\frac{1}{x}\right)^\beta dx \qquad (4)$$

のような基本的な交代級数をふくんでいる。また，$f(1)\neq 0$ で1の近傍でfが連続ならnが十分大きいところではa_nの符号は交代し，$|a_n|\geq O(\frac{1}{n})$ で収束も遅い。

さて線形加速法を

$$\sigma_n=\sum_{l=0}^{n}\alpha_l^{(n)}(-1)^l a_l \qquad (5)$$

とすると(3)より

$$\sigma_n=\int_0^1\varphi_n(x)f(x)\,dx \qquad (6)$$

ここで

$$\varphi_n(x)=\sum_{l=0}^{n}\alpha_l^{(n)}x^l \qquad (7)$$

$\{\varphi_n\}$を$\{\sigma_n\}$の特性多項式とよぶ。

また同じく(3)より

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^1 x^n f(x)\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x}f(x)\,dx. \qquad (8)$$

故にσ_nの誤差は

$$S-\sigma_n=\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)\right\}f(x)\,dx \qquad (9)$$

したがって加速法の有効性は$1/(1+x)$に対する$\varphi_n(x)$の近似度で評価される。

あるノルムについて$\varphi_n(x)$が$1/(1+x)$のn次最良多項式近似なら$\{\sigma_n\}$を最適とよぶことにする。

[1] $\|\cdot\|_\infty$ についての最適加速法

Bernstein[1]によれば，$1/(1+x)$のn次最良多項式近似$\varphi_n(x)$について

$$\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)=\frac{\eta^n}{4}\cos(n\xi+\delta) \qquad (10)$$

ここで $\cos\xi=1-2x$, $\cos\delta=(3x-1)/(1+x)$
$\eta=3-\sqrt{8}$である。今，

$$\sigma_n^{(k)}=\sum_{l=0}^{k-1}a_l+\sum_{l=0}^{n}\alpha_l^{(n)}(-1)^l a_{k+l} \qquad (11)$$

とおけば(3),(7),(10)より

$$\begin{aligned}S-\sigma_n^{(k)}&=\sum_{l=k}^{\infty}a_l-(-1)^k\int_0^1\varphi_n(x)x^k f(x)\,dx\\&=(-1)^k\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)\right\}x^k f(x)\,dx\\&=\frac{(-1)^k\eta^n}{4}\int_0^1\cos(n\xi+\delta)x^k f(x)\,dx\end{aligned} \qquad (12)$$

$\cos\xi=1-2x$ と cos の加法定理より

$$\begin{aligned}\cos((n+1)\xi+\delta)&=2\cos\xi\cos(n\xi+\delta)-\cos((n-1)\xi+\delta)\\&=2(1-2x)\cos(n\xi+\delta)-\cos((n-1)\xi+\delta)\end{aligned} \qquad (13)$$

(12), (13)より

$$\frac{S-\sigma_{n+1}^{(k)}}{\eta^{n+1}}=2\frac{S-\sigma_n^{(k)}}{\eta^n}+4\frac{S-\sigma_n^{(k+1)}}{\eta^n}-\frac{S-\sigma_{n-1}^{(k)}}{\eta^{n-1}} \qquad (14)$$

Optimal linear Accerelation for Altenating Series.
Hirosi Sugiura
Nagoya Univercity

$\eta=3-\sqrt{8}$ より $\eta^2-6\eta+1=0$ で S の項は消えて，

$$\frac{\sigma_{n+1}^{(k)}}{\eta^{n+1}}=2\frac{\sigma_n^{(k)}}{\eta^n}+4\frac{\sigma_n^{(k+1)}}{\eta^n}-\frac{\sigma_{n-1}^{(k)}}{\eta^{n-1}} \text{.} \qquad (15)$$

又 $\varphi_0(x)=3/4$，$\varphi_1(x)=-\frac{1}{2}x+(2\sqrt{2}+1)/4$ より

$$\begin{cases} \sigma_0^{(k)}=\sum_{l=0}^{k-1} a_l+\frac{3}{4}a_k \\ \sigma_1^{(k)}=\sum_{l=0}^{k-1} a_l+\frac{2\sqrt{2}+1}{4}a_k+\frac{1}{2}a_{k+1} \end{cases} \qquad (16)$$

(15),(16) により $\sigma_n=\sigma_n^{(0)}$ を順次計算する。

(12)より誤差の絶対値は

$$|S-\sigma_n|\le\frac{\eta^n}{4}\cdot\int_0^1|f(x)|dx \qquad (17)$$

で公比 η (≈0.17) の等比級数より早く 0 に収束する。

[2] $\|\cdot\|_2$ についての最適加速法

ずらし Legendre 多項式 $P_n^*(x)=P_n(2x-1)$ で $1/(1+x)$ を展開すると

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\rho_n P_n^*(x)\text{，}\quad \rho_n=(2n+1)\int_0^1\frac{P_n^*(x)}{x+1}dx \qquad (18)$$

ここで特性多項式を

$$\varphi_n(x)=\sum_{l=0}^{n}\rho_l P_l^*(x) \qquad (19)$$

とすると $\{P_l^*(x)\}$ の直交性より

$$\left\|\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)\right\|_2=\min_{\deg\psi_n(x)=n}\left\|\frac{1}{1+x}-\psi_n(x)\right\|_2 \qquad (20)$$

で，$\{\sigma_n\}$ は最適となる。

$f\in L_2(0,1)$ なら Schwarz の不等式より

$$|S-\sigma_n|=\left|\int_0^1\left\{\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)\right\}f(x)dx\right|$$

$$\le\left\|\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)\right\|_2\cdot\|f(x)\|_2 \text{.} \qquad (21)$$

(20) と (10) より

$$\left\|\frac{1}{1+x}-\varphi_n(x)\right\|_2\le\left\|\frac{\eta^n}{4}\cos(n\xi+\delta)\right\|_2\le\frac{\eta^n}{4} \qquad (22)$$

だから

$$|S-\sigma_n|\le\frac{\eta^2}{4}\|f(x)\|_2 \qquad (23)$$

でやはり公比 η の等比級数より早く 0 に収束する。

$$\mu_n=\int_0^1 P_n^*(x)f(x)dx \qquad (24)$$

で定義すると

$$\sigma_n=\int_0^1\varphi_n(x)f(x)dx$$

$$=\sum_{l=0}^{n}\rho_l\int_0^1 P_l^*(x)f(x)dx=\sum_{l=0}^{n}\rho_l\alpha_l \qquad (25)$$

だから $\{\rho_l\}$ と $\{\alpha_l\}$ の計算法を確立すればよい。

$P_n^*(x)$ の 3 項漸化式

$$(n+1)P_{n+1}^*(x)=(2n+1)(2x-1)P_n^*(x)-nP_{n-1}^*(x) \qquad (26)$$

と ρ_n の定義より $\rho_n'=\frac{1}{2n+1}\rho_n$ について

$$(n+1)\rho_{n+1}'=(6n+3)\rho_n'-n\rho_{n-1}' \qquad (27)$$

$$\rho_0'=\log 2\text{，}\ \rho_1'=2-3\log 2\text{.}$$

この漸化式は前進が不安定なので，Miller の算法[2]を用いてあらかじめ必要な個数（100 個くらい）を計算し保存しておく。 次に

$$\mu_n^{(k)}=\int_0^1 P_n^*(x)x^k f(x)dx \qquad (28)$$

とおくとやはり漸化式 (27) より

$$(n+1)\mu_{n+1}^{(k)}=(2n+1)(2\mu_n^{(k+1)}-\mu_n^{(k)})-n\mu_{n-1}^{(k)} \qquad (29)$$

$$\mu_0^{(k)}=(-1)^k a_k$$

となり $\mu_n=\mu_n^{(0)}$ が順次得られる。

[3] 実験結果

Smith-Ford の問題[3]

(1) $a_n=(-1)^n/(n+1)$，(2) $a_n=(-1)^n/(2n+1)$，(3) $a_n=(-1)^n/\sqrt{n+1}$

(4) $a_n=\binom{-1/2}{n}/n$，(5) $a_n=(-1)^n\binom{-1/2}{n}^2$

について $-\log_{10}|S-\sigma_n|$ は [1],[2] の方法で

	問題番号	(1)	(2)	(3	(4)	(5)
方	[1]	11.5	10.9	11.3	15.8	9.8
法	[2]	16.9	9.1	9.2	9.0	8.7

表で [1] の(4)，[2] の(1) は理論的には ∞ である。 その他の問題では [1] が良い結果となっている。

<参考文献>

[1] Bernstein,S.N.:Leçons sur les propriétés extrémales et la milleure apporoximation des fonctions analytiques d'une variabele réele. Paris:Gauthier-Villars 1926.

[2]Miller,J.C.P.:Bessel Functions.Part II, Math.Tables, vol.10,British Assoc. Adv. Sci., Cambridge Univ. Press. 1952.

[3]Smith,D.A. and Ford,W.F.:Acceleration of linear and logarithmic convergence. SIAM J.Numer.Anal. Vol.16,No.2 ,PP.223-240. 1979.