テクニカルノート

類似性判断に関する変換群構造説の2次元ドットパターンへの拡張

芝田安裕[†,☆] 高崎昌浩[†] 小西敏雄[††]
岡野大[†] 緒方秀教[†] 天野要[†]

類似性判断に関する変換群構造説を1次元楕円パターン（線形2値パターン）から2次元ドットパターン（正方2値行列パターン）へ拡張する．具体的には，パターン対の変換群構造を，恒等変換群，2面体群，並進変換群，反転変換群という4種の認知的変換群による相互変換可能性で定義し，類似度の順序関係を順序整合性の仮説と順序保存の仮説で予測する．簡単な実験と検定の結果はモデルの妥当性を支持している．

Extension of the Transformational Group Structure Theory on Similarity Judgments to Two-dimensional Dot Patterns

Yasuhiro Shibata,[†,☆] Masahiro Takasaki,[†] Toshio Konishi,[††]
Dai Okano,[†] Hidenori Ogata[†] and Kaname Amano[†]

We extend the transformational group structure theory on similarity judgments of one-dimensional elliptic patterns (linear binary patterns) to that of two-dimensional dot patterns (square binary matrix patterns). Specifically speaking, we define the transformational group structures of pattern pairs by the four cognitive transformation groups, i.e., the identity, the dihedral, the translation and the value-reversal transformation groups, and then predict their orders of similarity by the structures. Simple experiments and tests show the validity of the model.

1. はじめに

「パターン」,「似ているパターン」,「良いパターン」等は日常的に使用される概念で，情報処理という視点からも重要である．しかし，その本質は必ずしも十分に理解されていない．

類似性判断（パターン対の相対的な関係に関する認知判断）や良さ判断（パターンの個別的な性質に関する認知判断）のようなパターンに関する異質な認知判断を統一的に説明しようとする学説に今井の変換構造説[4),5)]がある．変換構造説によれば，人（認知系）は提示されたパターンに対していくつかの変換（認知的変換）を施し，そこで示される相互変換可能性または不変性によってその構造（変換構造）を認知し，この変換構造に基づいて認知判断を行うとされている．

天野・今井[1),2),6)]は，線形2値パターン，すなわち，白黒の楕円を横に並べた1次元楕円パターンを主な対象に，数学的な視点から変換構造説の再定式化を行った．具体的には，変換群を認知的変換の基本単位と考えることにより，提示されたパターンと認知的変換群の関係を明らかにし，それまでの変換構造説と同様な形式でパターンの変換群構造を定義して，類似度と良さの順序が予測できることを示した[1),2)]．さらに，恒等変換群を含む4種の変換群が存在する場合に，パターンを変換群構造に類別して，拡張された順序整合性の仮説と順序保存の仮説で類似度と良さの順序が予測できることを示した．また，その順序関係をハッセ図で表現した[6)]．このように変換群を用いて再定式化された変換構造説を変換群構造説と呼ぶことにする．

1次元楕円パターンの場合には，類似性判断に関する変換群構造説の妥当性が実験的にも検証されている[3)]．本稿の目的はこの類似性判断に関する変換群構

† 愛媛大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Faculty of Engineering, Ehime University
†† 松山東雲女子大学人文学部国際文化学科
Department of Communication and Culture, Faculty of Humanities, Matsuyama Shinonome College
☆ 現在，松下電器情報システム広島研究所
Presently with Matsushita Information Systems, Research Laboratory Hiroshima Co., Ltd.

造説を正方 2 値行列パターン，すなわち，白黒の小円を仮想的な正方形の枠内に配置した 2 次元ドットパターンへ拡張し，その妥当性を実験的に検証することである．

2. 2 次元ドットパターンの認知的変換群

変換群構造説を 2 次元ドットパターンへ拡張するためには，2 次元ドットパターンに対して認知的変換群をいかに設定するかが基本的な問題である．

まず，1 次元楕円パターンの認知的変換群について記す．n 要素からなる 1 次元楕円パターンの場合には，次の 4 種の変換群が用いられる[3]．

- 恒等変換群 $I = \{e\}$：e は恒等変換である．
- 鏡映変換群 $M = \{e, m\}$：m はパターンを構成する楕円要素の順序を左から右に $1, 2, \ldots, n$ から $n, n-1, \ldots, 1$ に逆転する．
- 位相変換群 $P = \{e, p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}\}$：$p_i$ は楕円要素の順序を i だけ右に平行移動し，右端にはみ出した要素を左端に順次組み込む．たとえば，p_1 によって要素の順序は $1, 2, \ldots, n$ から $n, 1, \ldots, n-1$ になる．
- 反転変換群 $R = \{e, r\}$：r はすべての楕円要素の色を反転する．

これらの変換群 M，P，R は互いに可換で，積もまた変換群である．

次に，本稿で扱う表 1 のような 2 次元ドットパターンの認知的変換群について記す．$n \times n$ 要素からなる 2 次元ドットパターンの場合には，次の 4 種の変換群を用いる．

- 恒等変換群 $I = \{e\}$：e は恒等変換である．
- 2 面体群 $D = D_4 = \{e, c_1, c_2, c_3, m_h, m_v, m_l, m_r\}$：仮想的な正方形に対する 4 次の 2 面対群，すなわち，c_1，c_2，c_3 はそれぞれ 90°，180°，270° の反時計回りの回転変換であり，m_h，m_v，m_l，m_r はそれぞれ水平，垂直，左上から右下，右上から左下への対称軸に対する鏡映変換である．
- 並進変換群 $P = P_h \times P_v = \{e, p_{h1}, p_{h2}, \ldots, p_{hn-1}\} \times \{e, p_{v1}, p_{v2}, \ldots, p_{vn-1}\}$：$p_{hi}$ は各列を i だけ右に平行移動し，右端にはみ出した要素は左端に順次組み込む．また，p_{vj} は各行を j だけ上に平行移動し，上端にはみ出した要素を下端に順次組み込む．
- 反転変換群 $R = \{e, r\}$：r はすべての要素の色を反転する．

これらの変換群は 1 次元楕円パターンの認知的変換群の自然な拡張であり，1 次元楕円パターンの M は

表 1 2 次元ドットパターン対の変換群構造と類似度の評定値（平均値と標準偏差）

Table 1 Two-dimensional dot pattern pairs and their transformational group structures with the rated similarity (average and standard deviation).

Pattern Pair	Transformational Group Structure	Average (SD)	Average (SD)
●● ●● ●● ●●	I	6.9 (0.9)	6.7 (0.9)
○○ ○○ ○○ ○○		6.9 (0.9)	
●● ●● ○○ ○○		6.9 (0.9)	
●○ ●○ ●○ ●○		6.8 (0.9)	
●○ ●○ ○● ○●		6.4 (1.6)	
○● ○● ●○ ●○		6.6 (1.1)	
○● ○● ●● ●●		6.8 (1.0)	
○● ○● ○○ ○○		6.7 (1.3)	
●● ●● ○● ○●		6.7 (1.3)	
○○ ○○ ○● ○●		6.7 (1.3)	
●○ ○● ●○ ○●	D ∧ P ∧ R	5.1 (1.3)	5.1 (1.2)
○○ ●● ●● ○○		4.7 (1.4)	
○● ●○ ●○ ○●		5.1 (1.4)	
●○ ○● ○● ●○		5.3 (1.2)	
○○ ○○ ○● ●○	D ∧ P	4.9 (1.5)	4.4 (1.3)
●● ●○ ○● ●●		4.6 (1.3)	
○○ ●○ ●○ ○○		4.2 (1.6)	
●● ○● ●○ ●●		4.0 (1.7)	
○● ○○ ○● ●●	D	4.1 (1.5)	4.0 (1.4)
●● ○● ○○ ○●		3.8 (1.5)	
●○ ○○ ●○ ●●		4.2 (1.5)	
●● ●○ ○○ ●○		4.0 (1.5)	
●● ○○ ●● ○○	R	5.1 (1.8)	4.5 (1.4)
○○ ●● ○○ ●●		5.2 (1.6)	
○● ●○ ●● ○○		4.0 (1.7)	
●○ ○● ●● ○○		4.2 (1.6)	
○○ ●● ●○ ○●		4.3 (1.6)	
○○ ●● ○● ●○		4.3 (1.6)	
●● ○○ ●○ ●○	PR ∧ RD	3.5 (1.6)	3.2 (1.3)
○○ ●○ ●○ ●●		3.3 (1.6)	
○○ ○● ●○ ●●		3.0 (1.7)	
○○ ○● ○● ●●		3.0 (1.4)	
○○ ○● ●● ●○	E	1.9 (1.0)	1.7 (0.7)
●○ ○● ○● ○●		1.9 (1.0)	
●● ●● ●● ○○		1.8 (0.9)	
○○ ●○ ○○ ●○		1.9 (1.2)	
●○ ●● ○● ●●		1.5 (0.9)	
○● ○○ ●○ ○○		1.4 (0.8)	
●○ ○○ ○○ ●●		1.4 (0.9)	
●○ ●○ ●● ●○		2.1 (1.4)	
●● ●● ○○ ○●		2.0 (1.3)	
●○ ○○ ●○ ○●		1.4 (1.0)	
●○ ●○ ○○ ○●		1.9 (1.2)	
●○ ●○ ○● ●●		1.9 (1.1)	
○○ ●● ○○ ○●		1.4 (0.8)	
○○ ●● ○● ●●		1.4 (0.8)	

2 次元ドットパターンの $D = D_4$ に，同様に P は $P = P_h \times P_v$ に，R は R に対応している．変換群 D, P, R は互いに可換で，積もまた変換群となる．したがって，次章で示すように，類似性判断の変換群構造説を 2 次元ドットパターンへ拡張することができる．

3. 変換群構造と順序の予測

ここでは，パターン対の変換群構造を上記の認知的変換群による相互変換可能性（相互一致可能性）によって定義し，この変換群構造（正確には，パターン間変換群構造）を類似度の順序（大小）に関係づける．

まず，I を除いて，変換群によるパターン対の相互変換可能性とは e 以外のいずれかの変換要素により相互変換可能なことであると定義する．すると，変換群 D, P, R の可換性と変換群の再生性（たとえば，$D^2 = D$）により，2 次元ドットパターン対の全体を以下で定義される 20 個の変換群構造に類別することができる．

- 恒等変換群構造 I：変換群 I すなわち恒等変換 e で相互変換可能なパターン対の関係構造．
- 単一変換群構造 D，P，R：それぞれ変換群 D, P, R で相互変換可能なパターン対の関係構造．
- 積変換群構造 DP，PR，RD，DPR：それぞれ積変換群 DP, PR, RD, DPR ではじめて相互変換可能なパターン対の関係構造．ここに，たとえば構造 DP の定義には因子の変換群 D, P では相互変換不可能であることが含意されている．
- 多重変換群構造 D∧P，P∧R，R∧D，D∧P∧R，D∧PR，P∧RD，R∧DP，DP∧PR，PR∧RD，RD∧DP，DP∧PR∧RD：複数の変換群構造を併せ持つパターン対の関係構造．たとえば，D∧P は変換群 D, P の双方で相互変換可能なことを意味する．
- 空変換群構造 E：以上の相互変換可能性を持たないパターン対の関係構造．

そして，個々のパターン対はそれぞれの類に相当する変換群構造を持つという．なお，本稿では変換を斜体で構造を立体で記して区別している．

次に，このような変換群構造の定義に基づいて，パターン対の類似度の順序関係を順序整合性の仮説と順序保存の仮説で予測する[3)~5)]．順序整合性の仮説とは，変換群構造 T を持つパターン対の類似度を $S(\mathrm{T})$ として，変換群構造 T_i，T_j，T_k（単一変換群構造とは限らない）に対して

$$S(\mathrm{E}) \le S(\mathrm{T}_i), S(\mathrm{T}_j) \le S(\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j) \le S(\mathrm{I}), \quad (1)$$

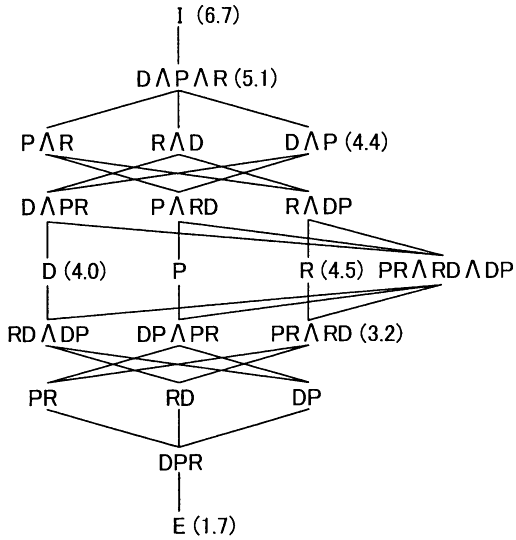

図 1　2 次元ドットパターン対の類似度の順序を予測するハッセ図と評定値

Fig. 1　Hasse diagram which predicts similarity order of two-dimensional dot pattern pairs with the rated similarity.

$$S(\mathrm{E}) \le S(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_k \wedge \mathrm{T}_j\mathrm{T}_k) \le S(\mathrm{T}_k) \le S(\mathrm{I}) \quad (2)$$

なる関係が成立することである．前者は，多重変換群構造 $\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_j$ を持つパターン対の類似度は変換群構造 T_i，T_j を持つパターン対の類似度以上であることを意味する．後者は，変換群構造 T_k を因子とする積変換群構造のみからなる多重変換群構造を持つパターン対の類似度は変換群構造 T_k を持つパターン対の類似度以下であること意味する．特に，恒等変換群構造 I を持つパターン対は同一で，類似度は最も高い．また，空変換群構造 E を持つパターン対の類似度は最も低い．順序保存の仮説とは，次の 3 つの不等式

$$S(\mathrm{T}_i) \le S(\mathrm{T}_j), \quad (3)$$

$$S(\mathrm{T}_i \wedge \mathrm{T}_k) \le S(\mathrm{T}_j \wedge \mathrm{T}_k), \quad (4)$$

$$S(\mathrm{T}_i\mathrm{T}_k) \le S(\mathrm{T}_j\mathrm{T}_k) \quad (5)$$

で表現される順序関係が同値になることである．すなわち，変換群構造 T_i，T_j を持つパターン対の間の順序は T_k との組合せに対して保存されることである．

上記の 2 つの仮説から，前述の 20 個の変換群構造間の類似度の順序関係がすべて定まる．この順序関係を図示したものが図 1 のハッセ図である（数値は後述の実験の評定値）．この図は実線で結ばれた 2 個の変換群構造に対して上位の構造のパターン対は下位の構造のパターン対より類似度が高いことを示している．

4. 実験と考察

前章に記したパターン対の類似度の順序関係に関す

る予測の妥当性を検証するために，次のような実験を行った．

- 実施年月日：1999 年 12 月 1 日
- 被験者：愛媛大学農学部 1 回生 43 名（男子 18 名，女子 25 名）
- パターン：2 × 2 要素パターン対 46 組
- 評定法：最低 1 点，最高 7 点の 7 段階評定
- 反復数：2 回

実験では，可能なパターン対，全 $2^4 \times 2^4 = 256$ 組から構造や要素の白黒比が偏らないように 46 組を選び☆，1 組ごとにカード上に印刷して☆☆，まとめて被験者に配布した．被験者には実験の意図は説明されていない．被験者は，まず配布された 46 枚のカードをシャッフルして，これにひととおり目を通した．次に，再びシャッフルして，カード上のパターン対の類似度を 1 点から 7 点までの整数点で 1 組ずつ 7 段階評定した．さらに，シャッフルし直して評定するという作業を反復した．分析には 2 回目のデータを採用した．

表 1 は実験に用いたパターン対 46 組の変換群構造と類似度の評定値であり，図 1 はその平均値をハッセ図に記入したものである．

図 1 のように，パターン対の類似度の平均評定値は変換群構造説の順序の予測を完全に支持している．Microsoft Excel 97 の統計関数で対応のある場合の平均値の差の検定（t 検定）を行ったところ，これらの平均値には有意水準 1%で有意差があった．順序整合性の仮説 (1) については，D∧P∧R (5.1) と D∧P (4.4) の間と，D ∧ P (4.4) と D (4.0) の間で成立を確認することができる．順序整合性の仮説 (2) についても，構造 R (4.5) と PR ∧ RD (3.2) の間で成立を確認することができる．しかし，順序保存の仮説 (3)〜(5) については，2 × 2 要素で現れる変換群構造が限られているため，この実験で成立を確認することはできない．

なお，同じ実験を異なる被験者を対象に再度行った．

- 実施年月日：2001 年 11 月 28 日
- 被験者：愛媛大学工学部 1 回生 39 名（男子 34 名，女子 5 名）

2 つの実験の評定値間の相関係数は 0.98 であり，再現性は非常に高い．

☆ 表 1 がそれぞれの変換群構造を持つパターン対の割合を表現しているわけではない．たとえば，構造 E を持つパターン対の割合は 168/256 = 0.656 であるが，この割合は要素数の増加とともに急速に大きくなる．

☆☆ 横型 A7 のカード上に灰色の背景領域（4 cm × 9 cm）をとり，白黒の小円（直径 8 mm，間隔 4 mm）が等しいコントラストを見せるようにした．

5. おわりに

類似性判断に関する変換群構造説を 2 次元ドットパターンへ拡張し，実験的にその妥当性を検証した．実験に 2 × 2 要素のパターン対を用いたことには，パターン対の系統的な選択を容易にするという長所と，現れる変換群構造が限られる，たとえば単一変換群構造 P は現れない，という短所がある．3 × 3 要素のパターン対を用いれば P を含む 11 個の変換群構造が現れ，4 × 4 要素のパターン対を用いれば 20 個すべての変換群構造が現れる．今後，要素数を増した実験を行って，変換群構造 P の効果に関する検討や順序保存の仮説の検証等を行う計画である．

謝辞　共同で実験を行った元愛媛大学工学部情報工学科学生の肥田庸市，門前智美，石丸尊久，岡田耕一，近藤裕之，金平　淑の諸氏と，実験に協力して下さった愛媛大学学生の皆様に感謝いたします．また，日頃から研究に有益な助言をいただく今井四郎北海道大学名誉教授，濱田治良徳島大学教授，福士顕士文部科学省初等中等教育局主任教科書調査官に感謝いたします．

参 考 文 献

1) 天野　要，今井四郎：パターンの変換構造と類似性認知に関する群論的研究，心理学研究，Vol.60, No.5, pp.297–303 (1989).

2) 天野　要，今井四郎：パターンの変換構造と良さの認知に関する群論的研究，心理学研究，Vol.63, No.3, pp.181–187 (1992).

3) 天野　要，岡野　大，緒方秀教，芝田安裕，小西敏雄，福士顕士，濱田治良，今井四郎：パターンの類似性判断に関する変換群構造説，情報処理学会論文誌，Vol.42, No.11, pp.2733–2742 (2001).

4) 今井四郎：パターン認知の変換構造説，日本心理学会心理学モノグラフ，No.17，東京大学出版会，東京 (1986).

5) Imai, S.: Fundamentals of Cognitive Judgments of Pattern, *Cognition, Information Processing, and Phychophysics: Basic Issues*, Geissler, H.-G., Link, S.W. and Townsend, J.T. (Eds.), pp.225–265, Lawrence Erlbaum Associates, New Jersey (1992).

6) 今井四郎，天野　要：変換と写像の概念に基づくパターン認知論，応用数理，Vol.8, No.1, pp.30–45 (1998).

(平成 14 年 5 月 29 日受付)
(平成 14 年 9 月 5 日採録)