漸化式を用いるベッセル関数 $J_n(x)$ の繰返し積分の数値計算法の誤差解析

吉田 年雄†

n 次の第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ の繰返し積分 $f_{r,n}(x)$（r：積分の回数を表す整数）は，$f_{0,n}(x)=J_n(x)$ とするとき，$f_{r,n}(x)=\int_0^x f_{r-1,n}(t)dt=(2^r)/(r-1)!\sum_{k=0}^{\infty}(r+k-1)!/k!\cdot J_{r+n+2k}(x)$ $(r\geq 1)$ で表すことができる．漸化式を用いる方法で計算された $J_{r+n+2k}(x)$（k=0,1,$\cdots$）の近似値を上式の右辺の有限項で打ち切ったものに代入することにより，$r\geq 1$ のときの繰返し積分 $f_{r,n}(x)$ の近似式を得ることができる．本論文では，この漸化式を用いる $f_{r,n}(x)$ の計算法の誤差解析を行い，誤差の有用な評価式を導出している．

Error Analysis of Recurrence Technique for the Calculation of Repeated Integral of Bessel Functions $J_n(x)$

Toshio Yoshida†

The repeated integral $f_{r,n}(x)$ of Bessel functions $J_n(x)$ can be expressed by $f_{r,n}(x)=(2^r)/(r-1)!\sum_{k=0}^{\infty}(r+k-1)!/k!\cdot J_{r+n+2k}(x)$ $(r\geq 1)$. The approximation to $f_{r,n}(x)$ is obtained by substituting approximations to $J_{r+n+2k}(x)$ computed by recurrence technique into the truncated form of the above expansion. In this paper, we describe the error analysis of this method and give an estimate of error.

1. はじめに

n 次の第 1 種ベッセル関数 $J_n(x)$ の繰返し積分 $f_{r,n}(x)$（r：積分の回数を表す整数）は，

$$f_{0,n}(x)=J_n(x) \tag{1}$$

とするとき，次式で定義される[1)]．

$$f_{r,n}(x)=\int_0^x f_{r-1,n}(t)dt \qquad (r\geq 1) \tag{2}$$

上式より，$r=1$ のときには，

$$f_{1,n}(x)=\int_0^x J_n(t)dt \tag{3}$$

である．$r\geq 1$ のとき，この繰返し積分 $f_{r,n}(x)$ は，$J_{r+n+2k}(x)$（k=0,1,$\cdots$）を用いて，次式のように表すことができる．

$$f_{r,n}(x)=\frac{2^r}{(r-1)!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(r+k-1)!}{k!}J_{r+n+2k}(x) \tag{4}$$

上式は，x が小さいときには収束は速いが，x が大きくなるにつれて，要求精度まで収束するために必要な項数は多くなる．

本論文では，n を整数，x を実数とし，$n\geq 0$，$r\geq 1$，$x>0$ の場合を扱う．ここで，漸化式を用いるベッセル関数 $J_i(x)$ の計算法について，簡単に触れておくことにする．

m（$m>r$）を，$n+m$ が偶数となるように適当に選ばれた整数とし，α を小さな任意定数とする．

$$F_{n+m+1}(x)=0,\quad F_{n+m}(x)=\alpha \tag{5}$$

を出発値として，$J_n(x)$ が満足する漸化式

$$F_{n-1}(x)=\frac{2n}{x}F_n(x)-F_{n+1}(x) \tag{6}$$

を繰り返し使うことにより，$F_{n+m-1}(x)$,$F_{n+m-2}(x)$,$\cdots$,$F_0(x)$ を順次，計算する．それを用いれば，i=0,1,$\cdots$,$n+m-1$ に対して，$J_i(x)$ は，次の近似式

$$J_i(x)\approx F_i(x)\bigg/\sum_{k=0}^{(n+m)/2}\epsilon_k F_{2k}(x) \tag{7}$$

で表すことができる．ただし，

$$\epsilon_0=1,\qquad \epsilon_k=2\ \ (k\geq 1) \tag{8}$$

である．

与えられた x について，m を十分大きくとれば，そ

† 中部大学工学部情報工学科
Department of Computer Science, Chubu University

の m に対して，$m_0(<m)$ が決まり，$J_i(x)$ の近似値である式 (7) の右辺の値は，$0 \le i \le m_0$ のすべてにおいて，ある精度 ϵ で（詳しくいえば，$J_i(x)$ が零になる付近を除いて，ほぼ，ある相対精度 ϵ で）求められる[2),3)]．$m_0 < i \le n+m$ のときの $J_i(x)$ の近似値の精度は，i が $n+m$ に近づくにつれて低くなる．漸化式のこの区間は，$0 \le i \le m_0$ での近似値の精度が ϵ となるための助走区間と考えることができる．逆に，要求精度 ϵ が与えられたとき，それに対して，m と m_0 が決まり，$0 \le i \le m_0$ で，その精度 ϵ で $J_i(x)$ が求められることになる．

$f_{r,n}(x)$ を計算する最も簡単な方法（プログラムが簡単な方法）は，式 (4) が要求精度範囲内で収束するまで，個別に（k ごとに），ベッセル関数 $J_{r+n+2k}(x)$ の値をライブラリ・プログラムを使って求め，係数を乗じて和をとるものである．しかし，これは，次に述べる方法，すなわち，漸化式を用いて，一挙に，一連のベッセル関数の値を求める方法と比べて，能率が悪い．

文献 4) には，次のプログラムが載っている．まず，m を十分に大きくとり，漸化式を用いる方法で，助走区間を除いた $0 \le i \le m_0$ で $J_i(x)$ の近似値を要求精度以内で求め，それらを配列に入れておく．次に，式 (4) の和を要求精度の範囲内に収束するまでとる．この方法は，上の方法より能率的であるが，m を余裕をもって十分に大きくとって，少なくとも，収束するまでに必要な項のすべてを計算しておく必要がある．

さらに，能率的な方法として，漸化式の繰返し計算で得られるすべての値を用いることが考えられる．この方が漸化式の繰返し回数 $n+m$ が少なくて済む．精度の低い助走区間 $i > m_0$ の $J_i(x)$ の近似値も用いるので，これらが小さくても，具体的に $f_{r,n}(x)$ の計算値の精度にどのような影響を与えるかは，誤差解析を通じてしか知ることができない．この方法で $f_{r,n}(x)$ を計算のための近似式は，式 (4) を有限項（$k = [(m-r)/2]$ までの）で打ち切ったものに，式 (7) の右辺を代入することにより，次のように表される．

$$
\begin{aligned}
&f_{r,n}(x) \\
&\approx \frac{2^r}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \frac{(r+k-1)!}{k!} J_{r+n+2k}(x) \\
&\approx \frac{2^r \displaystyle\sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \frac{(r+k-1)!}{k!} F_{r+n+2k}(x)}{(r-1)! \displaystyle\sum_{k=0}^{(n+m)/2} \epsilon_k F_{2k}(x)} \qquad (9)
\end{aligned}
$$

上式の計算は，漸化式 (6) の 1 回の繰返し計算で，得られた $F_{n+m-1}(x)$,$F_{n+m-2}(x)$，$\cdots$,$F_0(x)$ を用いて，順次，分子，分母の和を求めることにより行う．

与えられた x，r，n に対して，要求精度で $f_{r,n}(x)$ を能率的に計算するためには，漸化式の繰返し回数 $n+m$ を最小のものにすることが必要である．この繰返し回数を求める問題は自明ではない．そこで，本論文では，上の計算法の誤差解析を行い，近似式の誤差の表示式および評価式を導出する．それを用いて，要求精度で計算するための最小の $n+m$ を求めている．

繰返し積分 $f_{r,n}(x)$（特に，$r=1$ と $r=2$ の場合）は，いろいろな分野で使用されると思われる．そのとき，繰返し積分の値を，数値積分により求めることは，特に r が 1 より大きいときには，非常に非能率であり，それにより計算することは避けるべきである．漸化式を用いる本計算法は，x が大きい場合を除いて，積分値を能率的に求めることができる優れた方法であるが，本研究以前には，この数値計算法についての誤差解析は行われていなかった．

本計算法は，文献 5) で述べた $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法（ν を整数 n に置き換えた場合）の拡張と考えることができる．なお，$f_{r,n}(x) > 0$ であることは証明できないが，$r = 1(1)20$, $n = 0(1)20$, $x = 1(1)10, 10(10)200$ のすべての組合せでの数値実験により，$f_{r,n}(x) > 0$ であることが確かめられている．

2. 誤差解析

$J_i(x)$ と，その計算式である式 (7) の右辺との間の関係式は，文献 5) の式 (14) において，$\mu \to 0$, $m \to n+m$，$\epsilon_k(\mu) \to \epsilon_k$ と置くことにより，

$$
\begin{aligned}
J_i(x) = {} & \frac{F_i(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(n+m)/2} \epsilon_k F_{n+2k}(x)} (1 - \Phi_{n,m}(x)) \\
& + \frac{J_{n+m+1}(x) Y_i(x)}{Y_{n+m+1}(x)} \qquad (10)
\end{aligned}
$$

と表される．ただし，

$$
\begin{aligned}
\Phi_{n,m}(x) = {} & \sum_{k=0}^{(n+m)/2} \epsilon_k \frac{J_{n+m+1}(x) Y_{2k}(x)}{Y_{n+m+1}(x)} \\
& + \sum_{(n+m)/2+1}^{\infty} \epsilon_k J_{2k}(x) \qquad (11)
\end{aligned}
$$

である．

式 (4) と式 (10) から次式を得る．

$f_{r,n}(x)$

$$= \frac{2^r \displaystyle\sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \frac{(r+k-1)!}{k!} F_{r+n+2k}(x)}{(r-1)! \displaystyle\sum_{k=0}^{(n+m)/2} \epsilon_k F_{2k}(x)}$$

$$\cdot (1 - \Phi_{n,m}(x)) + \frac{2^r J_{n+m+1}(x)}{(r-1)! Y_{n+m+1}(x)}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \frac{(r+k-1)!}{k!} Y_{n+r+2k}(x)$$

$$+ \frac{2^r}{(r-1)!} \sum_{k=[(m-r)/2]+1}^{\infty} \frac{(k+r-1)!}{k!} J_{r+n+2k}(x) \tag{12}$$

上式の第 2 と第 3 の部分の和を $f_{r,n}(x)$ で割ったものを次式で示すように，$\Psi_{r,n,m}(x)$ とする．

$$\Psi_{r,n,m}(x) = \frac{2^r}{f_{r,n}(x)(r-1)!}$$

$$\cdot \left(\frac{J_{n+m+1}(x)}{Y_{n+m+1}(x)} \sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \frac{(r+k-1)!}{k!} Y_{r+n+2k}(x) \right.$$

$$\left. + \sum_{k=[(m-r)/2]+1}^{\infty} \frac{(r+k-1)!}{k!} J_{r+n+2k}(x) \right) \tag{13}$$

したがって，式 (9) の右辺により，10 進 p 桁の精度で $f_{r,n}(x)$ が計算できるためには，

$$|\Phi_{n,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{14}$$

および

$$|\Psi_{r,n,m}(x)| < 0.5 \times 10^{-p} \tag{15}$$

が成り立てばよい．計算のための近似式である式 (9) の相対精度 $\Delta_{r,n,m}(x)$ は，式 (12) と (13) より，

$$\Delta_{r,n,m}(x) = \frac{\Phi_{m,n}(x) - \Psi_{r,n,m}(x)}{1 - \Phi_{m,n}(x)} \tag{16}$$

と表され，$|\Phi_{m,n}(x)| \ll 1$ のときには，

$$\Delta_{r,n,m}(x) \approx \Phi_{m,n}(x) - \Psi_{r,n,m}(x) \tag{17}$$

と表される．

2.1 $\Phi_{n,m}(x)$ の評価式

文献 5) で述べたように，式 (11) の右辺を変形すると，$n+m \gg x$ のとき，主要項を取り出すことができるので，$\Phi_{n,m}(x)$ の評価式 E_Φ は，

$$E_\Phi = \frac{-2x}{\pi(n+m)(n+m+2)Y_{n+m+1}(x)} \tag{18}$$

と表される．

2.2 $\Psi_{r,n,m}(x)$ の変形と評価式

式 (13) の $\Psi_{r,n,m}(x)$ は，式 (4) を用いれば，次のように変形できる．

$$\Psi_{r,n,m}(x) = \left[f_{r,n}(x) Y_{n+m+1}(x) + \frac{2^r}{(r-1)!} \right.$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \left\{ \frac{(r+k-1)!}{k!} (J_{n+m+1}(x) Y_{r+n+2k}(x) \right.$$

$$\left.\left. - Y_{n+m+1}(x) J_{r+n+2k}(x)) \right\} \right]$$

$$\Big/ (f_{r,n}(x) Y_{n+m+1}(x)) \tag{19}$$

上式を，Lommel の多項式[6]（x^{-1} の多項式）

$$R_{i,j}(x)$$

$$= \frac{\pi x}{2} \{ J_{i+j}(x) Y_{j-1}(x) - Y_{i+j}(x) J_{j-1}(x) \} \tag{20}$$

$$= \sum_{k=0}^{[i/2]} \frac{(-1)^k (i-k)!(i+j-k-1)!}{k!(i-2k)!(j+k-1)!} \left(\frac{2}{x}\right)^{i-2k} \tag{21}$$

を用いて書き換えると，次式が得られる．

$$\Psi_{r,n,m}(x)$$

$$= \frac{f_{r,n}(x) Y_{n+m+1}(x) + L_{r,n,m}(x)}{f_{r,n}(x) Y_{n+m+1}(x)} \tag{22}$$

ただし，

$$L_{r,n,m}(x) = \frac{2^{r+1}}{(r-1)!\pi x}$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[(m-r)/2]} \frac{(r+k-1)!}{k!} R_{m-r-2k, r+n+2k+1}(x) \tag{23}$$

である．

式 (22) の分子の第 1 項は，$f_{r,n}(x)$ のベキ級数展開（$J_n(x)$ の r 回項別積分より得られる）

$$f_{r,n}(x)$$

$$= 2^r \left(\frac{x}{2}\right)^{r+n} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (n+2l)!}{l!(r+n+2l)!(n+l)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2l} \tag{24}$$

と $Y_{n+m+1}(x)$ のベキ級数展開[7] を用いて表し，主要な部分について，同じベキでまとめれば次式のようになる．

$$f_{r,n}(x) Y_{n+m+1}(x)$$

$$= -\frac{2^r}{\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{r-m-1} \sum_{l=0}^{n+m} (-1)^l \left(\frac{x}{2}\right)^{2l}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{l} \frac{(-1)^i (n+m-i)!(n+2l-2i)!}{i!(l-i)!(r+n+2l-2i)!(n+l-i)!}$$

$$+ \Lambda_{n,m}(x) + \Omega_{n,m}(x) \tag{25}$$

ただし，

$$\begin{aligned}&\Lambda_{n,m}(x)\\&=-\frac{2^r}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-m-1}\sum_{l=n+m+1}^{\infty}(-1)^l\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\\&\cdot\sum_{i=0}^{n+m}\frac{(-1)^i(n+m-i)!(n+2l-2i)!}{i!(l-i)!(r+n+2l-2i)!(n+l-i)!}\end{aligned}\tag{26}$$

$$\begin{aligned}&\Omega_{n,m}(x)\\&=\left\{2^r\left(\frac{x}{2}\right)^{n+r}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l(n+2l)!(x/2)^{2l}}{l!(r+n+2l)!(n+l)!}\right\}\\&\cdot\left\{\frac{2}{\pi}J_{n+m+1}(x)\ln\frac{x}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+m+1}\right.\\&\cdot\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{i!(n+m+i+1)!}\left(\frac{\Gamma'(n+m+i+2)}{\Gamma(n+m+i+2)}\right.\\&\left.\left.+\frac{\Gamma'(i+1)}{\Gamma(i+1)}\right)\left(\frac{x}{2}\right)^{2i}\right\}\end{aligned}\tag{27}$$

である．

式 (22) の分子の第 2 項は，Lommel の多項式のベキ級数展開式 (21) を用いて表し，同じベキで整理すると次式のようになる．

$$\begin{aligned}&L_{r,n,m}(x)\\&=\frac{2^r}{\pi(r-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-m-1}\sum_{l=0}^{[(m-r)/2]}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\\&\cdot\frac{1}{(m-r-2l)!}\sum_{i=0}^{l}\left\{\frac{(-1)^i(l-i+r-1)!}{i!(l-i)!}\right.\\&\left.\cdot\frac{(m-r-2l+i)!(n+m-i)!}{(r+n+2l-i)!}\right\}\end{aligned}\tag{28}$$

式 (25) と (28) を用いれば，式 (22) の分子は次のようになる．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\&=-\frac{2^r}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-m-1}\left[\sum_{l=0}^{n+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\left\{(-1)^l\right.\right.\\&\left.\cdot\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i(n+m-i)!(n+2l-2i)!}{i!(l-i)!(r+n+2l-2i)!(n+l-i)!}\right\}\\&-\sum_{l=0}^{[(m-r)/2]}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\left\{\frac{1}{(r-1)!(m-r-2l)!}\right.\\&\cdot\sum_{i=0}^{l}\left(\frac{(-1)^i(l-i+r-1)!(m-r-2l+i)!}{i!(l-i)!}\right.\\&\left.\left.\left.\cdot\frac{(n+m-i)!}{(r+n+2l-i)!}\right)\right\}\right]+\Lambda_{n,m}(x)+\Omega_{n,m}(x)\end{aligned}\tag{29}$$

上式の [ ] の中の 2 つの { } の部分は，$0\le l\le n+m$ なる整数に対して等しい（証明略）．それゆえ，$\sum_{l=0}^{n+m}-\sum_{l=0}^{[(m-r)/2]}=\sum_{l=[(m-r)/2]+1}^{n+m}$ となる（これにより，$\Psi_{r,n,m}(x)$ の絶対値が小さくなる）．したがって，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\&=-\frac{2^r}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-m-1}\sum_{l=[(m-r)/2]+1}^{n+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\left\{(-1)^l\right.\\&\left.\cdot\sum_{i=0}^{l}\frac{(-1)^i(n+m-i)!(n+2l-2i)!}{i!(l-i)!(r+n+2l-2i)!(n+l-i)!}\right\}\\&+\Lambda_{n,m}(x)+\Omega_{n,m}(x)\end{aligned}\tag{30}$$

上式では，式 (29) の [ ] の中の前半部分の { } を採用している．一方，その後半部分の { } を採用すれば，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\&=-\frac{2^r}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{r-m-1}\\&\cdot\sum_{l=[(m-r)/2]+1}^{n+m}\left(\frac{x}{2}\right)^{2l}\left\{\frac{1}{(r-1)!(m-r-2l)!}\right.\\&\cdot\sum_{i=0}^{l}\left(\frac{(-1)^i(l+r-i-1)!(m-r-2l+i)!}{i!(l-i)!}\right.\\&\left.\left.\cdot\frac{(n+m-i)!}{(r+n+2l-i)!}\right)\right\}+\Lambda_{n,m}(x)+\Omega_{n,m}(x)\end{aligned}\tag{31}$$

上式 (30) あるいは (31) において，$m\gg x$ ならば，初項，すなわち，$l=[(m-r)/2]+1$ の項が主要項であることが，項の比較と数値実験より確かめられる．したがって，$f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)$ は次のように近似できる．ただし，それは，$m-r$ の偶奇によって異なる．

i) $m-r$ が偶数の場合（$l=(m-r)/2+1$）

式 (30) の { } で囲まれた部分を一般化された超幾何級数で表し，その和を簡単な形で求めることを試みた．しかし，そのための和の公式は発見できなかった．そこで，式 (30) の代わりに，式 (31) に着目してみると次式が得られることが分かった．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\&\approx-\frac{(-1)^{(m-r)/2}2^{r-1}x\left(\dfrac{m+r}{2}\right)!(n+m)!}{\pi(r-1)!\left(\dfrac{m-r}{2}+1\right)!(n+m+2)!}\end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{\frac{m-r}{2}+1} \frac{(-1)^i(-1)_i\left(\dfrac{-m+r}{2}-1\right)_i(-n-m-2)_i}{i!\left(\dfrac{-m-r}{2}\right)_i(-n-m)_i} \tag{32}$$

上式において，$(-1)_i$ は，$(-1)_0=1$，$(-1)_1=-1$，$(-1)_i=0$ $(i\geq 2)$ であることより，i=0 と 1 の項だけが残るので，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\ &\approx -\frac{2^{r-1}x\left(\dfrac{m+r}{2}-1\right)!(n+m-1)!}{\pi(r-1)!\left(\dfrac{m-r}{2}+1\right)!(n+m+2)!}\\ &\quad\cdot\{(m+1)(m+n)+m-r+2\}\end{aligned} \tag{33}$$

したがって，$\Psi_{r,n,m}(x)$ に対する評価式 E_Ψ は，次式のように表される．

$$\begin{aligned}&E_\Psi\\ &\approx -\frac{2^{r-1}x\left(\dfrac{m+r}{2}-1\right)!(n+m-1)!}{\pi(r-1)!\left(\dfrac{m-r}{2}+1\right)!(n+m+2)!}\\ &\quad\cdot\{(m+1)(n+m)+m-r+2\}\\ &\quad/\{f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)\}\end{aligned} \tag{34}$$

ii) $m-r$ が奇数の場合（$l=(m-r-1)/2+1$）

$m-r$ が偶数の場合と同様に，式 (30) の { } で囲まれた部分を一般化された超幾何級数で表したものに対して，その和を簡単な形で求めることを試みたが成功しなかった．しかし，式 (31) に着目することにより，次式が得られることが分かった．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\ &\approx -\frac{2^{r}\left(\dfrac{m+r-1}{2}\right)!(n+m)!}{\pi(r-1)!\left(\dfrac{m-r+1}{2}\right)!(n+m+1)!}\\ &\cdot \sum_{i=0}^{\frac{m-r-1}{2}+1} \frac{(-1)^i(0)_i\left(\dfrac{-m-r+1}{2}\right)_i(-n-m-1)_i}{i!\left(\dfrac{-m-r+1}{2}\right)_i(-n-m)_i}\end{aligned} \tag{35}$$

上式において，$(0)_i$ は，$(0)_0=1$，$(0)_i=0(i\geq 1)$ であることより，i=0 の項だけが残るので，次のように表すことができる．

$$\begin{aligned}&f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)+L_{r,n,m}(x)\\ &\approx -\frac{2^{r}\left(\dfrac{m+r-1}{2}\right)!(n+m)!}{\pi(r-1)!\left(\dfrac{m-r+1}{2}\right)!(n+m+1)!}\end{aligned} \tag{36}$$

したがって，$\Psi_{r,n,m}(x)$ に対する評価式 E_Ψ は，次のように表される．

$$\begin{aligned}&E_\Psi\\ &=-\frac{2^{r}\left(\dfrac{m+r-1}{2}\right)!}{(n+m+1)\pi\ (r-1)!\left(\dfrac{m-r+1}{2}\right)!}\\ &\quad/\{f_{r,n}(x)Y_{n+m+1}(x)\}\end{aligned} \tag{37}$$

3. 数 値 例

表 1 には，x=10，n=0，m=30 に対して，r=1，2，3，5，10，20 の場合について，式 (9) の計算値，相対誤差，$\Phi_{n,m}(x)$，その評価式 E_Φ，$\Psi_{r,n,m}(x)$，その評価式 E_Ψ，$\Phi_{n,m}(x)-\Psi_{r,n,m}(x)$，および，$E_\Phi-E_\Psi$ の値を示す．式 (9) の計算値と $\Phi_{n,m}(x)-\Psi_{r,n,m}(x)$ の値は一致しており，誤差解析が正しいことを裏付けている．E_Φ と E_Ψ は，それぞれ，$\Phi_{n,m}(x)$ と $\Psi_{r,n,m}(x)$ の良い近似になっている．

表 2 には，x=5，r=2 に対して，n=0，2，4 の場合についての結果を示す．この場合にも，表 1 と同様なことがいえる．

さて，$M >> x$ のとき，$Y_M(x)$ は，Debye の漸近展開[2] の初項

$$\begin{aligned}Y_M(x)&\approx -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{M+\sqrt{M^2-x^2}}{x}\right)^M\\ &\cdot\ e^{-\sqrt{M^2-x^2}}(M^2-x^2)^{-\frac{1}{4}}\end{aligned} \tag{38}$$

で近似でき，そのとき，$|Y_M(x)|$ は M の単調増加関数であると考えられる．このことより，式 (18) の $\Phi_{n,m}(x)$ の評価式 E_Φ は m の単調減少関数となることが分かる．実際に，数値実験により，$x=1(1)10$, $10(10)200$ に対して，$n+m+1>x$ ならば，E_Φ の値は正で，m（この場合には，$n+m$）の単調減少関数となることが数値実験により確かめられた．

式 (34) あるいは (37) で与えられる $\Psi_{r,n,m}(x)$ の評価式 E_Ψ の m に対する振舞いを，パラメータ x，n，r，m の範囲が次のような場合について（「パラメータ範囲」ということにする），数値実験により調べた．$x=1(1)10,10(10)200$，$n=0(1)20$，$r=1(1)20$ のすべての組合せについて，$n+m+1>x$，$m>r$，および，式 (18) の E_Φ が $10^{-7}<E_\Phi<10^{-50}$ を満足する m の場合について，E_Ψ の値を調べた結果，その値は正で，m の単調減少関数であることが確められた．

上述の「パラメータ範囲」のとき，E_Φ および E_Ψ は，ともに m の単調減少関数であるが，そのとき，近似式 (9) の相対誤差 (式 (16) あるいは (17)）の近似値を表す $|E_\Phi-E_\Psi|$ は m の単調減少関数になるとは限らない．しかし，そのとき，$|E_\Phi-E_\Psi|<E_\Psi$ であ

表 1　$x = 10$, $n = 0$, $m = 30$ に対する $\Phi_{n,m}(x)$ およびその評価式 E_Φ の値, $\Psi_{r,n,m}(x)$ およびその評価式 E_Ψ の値, $\Phi_{n,m}(x) - \Psi_{r,n,m}(x)$, $E_\Phi - E_\Psi$

Table 1　$\Phi_{n,m}(x)$,E_Φ,$\Psi_{r,n,m}(x)$,E_Ψ and $E_\Phi - E_\Psi$ for $x = 10$,$n = 0$ and $m = 30$ where E_Φ is estimate of $\Phi_{n,m}(x)$ and E_Ψ is that of $\Psi_{r,n,m}(x)$.

	$(a)\ r = 1$	$(b)\ r = 2$	$(c)\ r = 3$
Approximation	$1.06701130395638 \cdot 10^0$	$4.94137434149069 \cdot 10^1$	$4.94137434149069 \cdot 10^1$
Relative error	$-3.33 \cdot 10^{-13}$	$-3.55 \cdot 10^{-13}$	$-5.10 \cdot 10^{-12}$
$\Phi_{n,m}(x)$	$1.75 \cdot 10^{-13}$	$1.75 \cdot 10^{-13}$	$1.75 \cdot 10^{-13}$
E_Φ	$1.57 \cdot 10^{-13}$	$1.57 \cdot 10^{-13}$	$1.57 \cdot 10^{-13}$
$\Psi_{r,n,m}(x)$	$5.09 \cdot 10^{-13}$	$5.30 \cdot 10^{-13}$	$5.27 \cdot 10^{-12}$
E_Ψ	$4.56 \cdot 10^{-13}$	$4.75 \cdot 10^{-13}$	$4.72 \cdot 10^{-12}$
$\Phi_{n,m}(x) - \Psi_{r,n,m}(x)$	$-3.33 \cdot 10^{-13}$	$-3.55 \cdot 10^{-13}$	$-5.10 \cdot 10^{-12}$
$E_\Phi - E_\Psi$	$-2.99 \cdot 10^{-13}$	$-3.18 \cdot 10^{-13}$	$-4.57 \cdot 10^{-12}$

	$(d)\ r = 5$	$(e)\ r = 10$	$(f)\ r = 20$
Approximation	$3.92142136392223 \cdot 10^2$	$2.02699448166748 \cdot 10^3$	$3.71794886755064 \cdot 10^1$
Relative error	$-5.25 \cdot 10^{-11}$	$-5.73 \cdot 10^{-9}$	$-2.78 \cdot 10^{-4}$
$\Phi_{n,m}(x)$	$1.75 \cdot 10^{-13}$	$1.75 \cdot 10^{-13}$	$1.75 \cdot 10^{-13}$
E_Φ	$1.57 \cdot 10^{-13}$	$1.57 \cdot 10^{-13}$	$1.57 \cdot 10^{-13}$
$\Psi_{r,n,m}(x)$	$5.27 \cdot 10^{-11}$	$5.73 \cdot 10^{-9}$	$2.78 \cdot 10^{-4}$
E_Ψ	$4.72 \cdot 10^{-11}$	$5.11 \cdot 10^{-9}$	$2.38 \cdot 10^{-4}$
$\Phi_{n,m}(x) - \Psi_{r,n,m}(x)$	$-5.25 \cdot 10^{-11}$	$-5.73 \cdot 10^{-9}$	$-2.78 \cdot 10^{-4}$
$E_\Phi - E_\Psi$	$-4.70 \cdot 10^{-11}$	$-5.11 \cdot 10^{-9}$	$-2.38 \cdot 10^{-4}$

表 2　$x = 5$, $r = 2$ に対する $\Phi_{n,m}(x)$ およびその評価式 E_Φ の値, $\Psi_{r,n,m}(x)$ およびその評価式 E_Ψ の値, $\Phi_{n,m}(x) - \Psi_{r,n,m}(x)$, $E_\Phi - E_\Psi$

Table 2　$\Phi_{n,m}(x)$,E_Φ,$\Psi_{r,n,m}(x)$,E_Ψ and $E_\Phi - E_\Psi$ for $x = 5$ and $r = 2$ where E_Φ is estimate of $\Phi_{n,m}(x)$ and E_Ψ is that of $\Psi_{r,n,m}(x)$.

	$(a)\ n = 0\ \ m = 20$	$(b)\ n = 2\ \ m = 18$	$(c)\ n = 4\ \ m = 16$
Approximation	$5.21445527685530 \cdot 10^0$	$2.85926173422604 \cdot 10^0$	$6.90328656708090 \cdot 10^{-1}$
Relative error	$-4.96 \cdot 10^{-12}$	$-9.25 \cdot 10^{-12}$	$-3.87 \cdot 10^{-11}$
$\Phi_{n,m}(x)$	$1.65 \cdot 10^{-12}$	$1.65 \cdot 10^{-12}$	$1.65 \cdot 10^{-12}$
E_Φ	$1.55 \cdot 10^{-12}$	$1.55 \cdot 10^{-12}$	$1.55 \cdot 10^{-12}$
$\Psi_{r,n,m}(x)$	$6.61 \cdot 10^{-12}$	$1.09 \cdot 10^{-11}$	$4.04 \cdot 10^{-11}$
E_Ψ	$6.23 \cdot 10^{-12}$	$1.03 \cdot 10^{-11}$	$3.81 \cdot 10^{-11}$
$\Phi_{n,m}(x) - \Psi_{r,n,m}(x)$	$-4.96 \cdot 10^{-12}$	$-9.25 \cdot 10^{-12}$	$-3.87 \cdot 10^{-11}$
$E_\Phi - E_\Psi$	$-4.68 \cdot 10^{-12}$	$-8.72 \cdot 10^{-12}$	$-3.65 \cdot 10^{-11}$

ることが数値実験により確かめられた．したがって，近似式 (9) の相対誤差は，E_Ψ で見積もってもよいことになる．これにより，10 進 16 桁の精度で，$f_{r,n}(x)$ を計算するために必要な m の値を求めることにした（式 (5) より，$n+m$ の値が漸化式 (6) の繰返し回数である）．n=0,1,2,3,4，r=1,2,3，x=1(1)10,10(10)100 に対して，$E_\Psi < 0.5 \cdot 10^{-16}$ を満足する最小の m を求めたものを**表 3** に示す．実際の計算では，用いる n と r に対して，プログラム中に，これらの値を表にしたもの，あるいは，適当な区間ごとに，x の 1 次式で近似したものを用意しておき，それにより，漸化式の繰返し回数を求めるとよい．

4. おわりに

本論文では，漸化式を用いる関数 $J_n(x)$ の繰返し積分の数値計算法の誤差解析を行った．その結果として，有用な誤差の評価式が得られた．

参　考　文　献

1) Abramowitz, M. and Stegun, I.A.: *Handbook of Mathematical Functions*, p.482, Dover, New York (1968).
2) 二宮市三：漸化式による Bessel 関数の計算，電子計算機のための数値計算法 II，pp.103–110，培風館，東京 (1965).
3) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数の積分 $I_\nu(x)$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学会論文誌，Vol.31, No.8, pp.1159–1167 (1990).
4) Baker, L.: *C Mathematical Function Handbook*, McGraw-Hill (1992). 吉田弘一郎（訳）：C 言語数学関数ハンドブック，pp.247–267，技術評論社，東京 (1993).
5) 吉田年雄：漸化式を用いるベッセル関数の積分 $\int_0^x J_\nu(t)dt$ の数値計算法の誤差解析，情報処理学

表 3　10 進 16 桁の精度で $f_{r,n}(x)$ を求めるために必要な m
Table 3　m for computing $f_{r,n}(x)$ with 16 significant digits.

x	$n=0$			$n=1$			$n=2$			$n=3$			$n=4$		
	r			r			r			r			r		
	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
1	14	16	16	13	15	15	14	14	16	13	15	15	14	14	16
2	18	18	20	17	19	19	18	18	20	15	17	19	16	16	18
3	22	22	24	19	21	21	20	20	22	19	21	21	18	18	20
4	24	24	26	23	23	23	22	22	24	21	23	23	20	22	22
5	26	26	28	25	25	27	24	24	26	23	25	25	22	22	24
6	28	28	30	27	29	29	26	26	28	25	27	27	24	24	26
7	30	30	32	29	31	31	28	28	30	27	29	29	26	26	28
8	32	32	34	31	31	33	30	30	32	29	31	31	28	28	30
9	34	34	36	33	33	33	32	32	34	31	31	33	30	30	32
10	36	36	38	35	35	35	34	34	36	33	33	33	32	32	34
20	52	52	52	51	51	51	50	50	52	49	49	49	48	48	50
30	66	66	68	65	65	65	64	64	66	63	63	63	62	62	64
40	80	80	80	77	79	79	78	78	78	75	77	77	76	76	76
50	92	92	94	91	91	91	90	90	92	89	89	89	88	88	90
60	104	104	106	103	103	103	102	102	104	101	101	101	100	100	102
70	116	116	118	115	117	117	114	114	116	113	115	115	112	112	114
80	128	128	130	127	129	129	126	126	128	125	127	127	124	124	126
90	140	140	142	139	139	139	138	138	140	137	137	137	136	136	138
100	152	152	154	151	151	151	150	150	152	149	149	149	148	148	150

会論文誌，Vol.35, No.5, pp.917–925 (1994).
6) 森口繁一，宇田川銈久，一松　信：数学公式 III, p.225，岩波書店，東京 (1968).
7) Andrews, G.E., Askey, R. and Roy, R.: *Special Functions*, p.200, Cambridge University Press, Cambridge (1999).

(平成 14 年 1 月 9 日受付)
(平成 14 年 9 月 5 日採録)

吉田　年雄（正会員）

昭和 19 年名古屋市生．昭和 43 年慶應義塾大学工学部電気工学科卒業．昭和 45 年名古屋大学大学院工学研究科修士課程（電子工学専攻）修了．昭和 48 年同博士課程満了．同年名古屋大学工学部助手．昭和 60 年同講師．昭和 61 年中部大学工学部助教授．昭和 63 年同経営情報学部に配置転換．平成 2 年同教授．平成 12 年同工学部情報工学科に配置換．数値解析の研究に従事．特殊関数とくにベッセル関数の数値計算法の研究，開発に興味を持っている．工学博士．電子情報通信学会，日本応用数理学会各会員．