

Volterra 級数展開を用いた非線形時系列のシステム同定

長 瀬 隆 久[†]

非線形のデジタル信号処理では、近年 Volterra 級数展開を用いた適応フィルタの研究が活発である。この手法は時系列予測にも応用することが可能であるが、実例はまだ少ない。そこで本研究では、簡単な低次の Volterra 級数展開をカオス時系列や経済時系列に適用した際の結果を報告する。特にカオス時系列に対する結果は良好であり、他の時系列への汎用性も示された。

System Identification of Nonlinear Time Series Using the Volterra Series Expansion

TAKAHISA NAGASE[†]

Recently in the non-linear DSP (digital signal processing), the study of adaptive filter using the Volterra series expansion is active. It is possible to apply this method to the time series forecasting, but there is a few this kind of studies. So in our study, we report the results of applying low-order Volterra series expansion to the chaos time series, the economic time series etc.

1. はじめに

近年、デジタル信号処理の分野では非線形ひずみ除去や非線形エコーキャンセラなどには線形のものでは限界があるため、非線形性を表現できる Volterra 級数展開を用いた Volterra フィルタが利用されている。また特にオンラインのリアルタイム処理に対応し、フィルタ係数を自動修正する適応 Volterra フィルタの研究^{1),2)}が活発に行われている。またさらに Volterra 級数展開を非線形時系列の予測を含めて利用している研究もある³⁾。しかし、非線形時系列の中でも、カオス時系列や経済時系列などを対象とした Volterra 級数展開の研究は、まだあまり行われていないようである。そこで本研究では、それらを対象とした分析結果を報告する。

2. 予測としての Volterra 級数展開

システムが因果性で非線形時不変であると仮定すれば、そのシステムは以下の Volterra 級数展開(以下ボルテラと略す)で表せることが知られている⁴⁾。

$$y(t) = \sum_{m_1=0}^{\infty} h_1(m_1)x(t-m_1) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} h_2(m_1, m_2)x(t-m_1)x(t-m_2) + \dots + \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_l=0}^{\infty} h_l(m_1, \dots, m_l)x(t-m_1) \dots x(t-m_l) \quad (1)$$

ここで単一の離散型時系列 $X(t)$ の予測を考えると、それは (1) の $Y(t)$ を $X(t+1)$ と見なしたシステム同定にほかならない。非線形次数が 1 のとき (\sum が 1 つ) は AR モデルであり、非線形次数 2、予測次数 2 の最もシンプルなボルテラは、 $h_2(0, 1)$ と $h_2(1, 0)$ が対称であるので、その片方を削除して考えると

$$x(t+1) = h_0 + h_1(0) \cdot x(t) + h_1(1) \cdot x(t-1) + h_2(0, 1) \cdot x(t)x(t-1) + h_2(0, 0) \cdot x(t)^2 + h_2(1, 1) \cdot x(t-1)^2 \quad (2)$$

となる。以下でも対称な項を削除した非線形自己帰帰モデルとして用いる。

ボルテラは非線形モデルであるがパラメータに関しては線形であるので、通常の線形理論が適用できる。本研究では最小 2 乗法によりパラメータ(ボルテラ核)を求める。また一般に、特に適応処理の場合は演算量が多くなるため非線形項は 2 次までのものを近似的に利用する機会が多い。本研究は適応処理ではないが、簡単のため非線形項は 2 次までとし、予測次数は

[†] 総務省郵政研究所第 2 経営経済研究部
Institute for Post and Telecommunications Policy, Ministry of Public Management

表 1 ボルテラによるロジスティック写像のシステム同定
Table 1 System identification of logistic-map using Volterra series expansion.

予測次数→	2	3	4	logistic-map
h0	1.61E-12	-4.2E-12	1.33E-08	
h1(0)	2.41841	3.357038	4.110977	3.7
h1(1)	4.741882	2.402915	-1.65715	
h1(2)		-4.19563	-3.45076	
h1(3)			14.63703	
h2(0,1)	1.96E-12	-3.3E-12	1.65E-09	
h2(0,2)		-2.6E-12	6E-09	
h2(0,3)			-7.4E-11	
h2(1,2)		-1.7E-12	1.26E-08	
h2(1,3)			1.39E-10	
h2(2,3)			1.72E-10	
h2(0,0)	-3.7	-3.7	-3.7	-3.7
h2(1,1)	-4.74188	-1.26896	1.520615	
h2(2,2)		4.195628	-0.5052	
h2(3,3)			-14.637	
MSE	4.56E-27	2.33E-27	1.33E-22	

表 2 ボルテラによるエノン写像のシステム同定
Table 2 System identification of henon-map using Volterra series expansion.

予測次数→	2	3	4	henon-map	
h0		1	0.470968	0.149906	1
h1(0)	-4.6E-15	0.529032	-0.04942		
h1(1)		0.3	0.3	1.199509	0.3
h1(2)			-0.15871	0.014825	
h1(3)				-0.26985	
h2(0,1)	-7.4E-16	2.95E-16	1.87E-15		
h2(0,2)		3.68E-15	2.26E-15		
h2(0,3)				1.87E-15	
h2(1,2)		1.85E-15	1.49E-15		
h2(1,3)				1.77E-15	
h2(2,3)				1.17E-16	
h2(0,0)	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4	-1.4
h2(1,1)	-7.4E-15	0.740645	-0.06918		
h2(2,2)		-2.9E-14	1.259313		
h2(3,3)				-6.7E-15	
MSE	1.7E-30	1.40E-29	1.78E-30		

2~4 とシンプルなもの考える .

3. カオス時系列のシステム同定

ここで, ボルテラを用いてカオスを有する非線形写像であるロジスティック写像⁵⁾,

$$X_t = \alpha X_{t-1} (1 - X_{t-1}) \quad \alpha = 3.7, X_0 = 0.1 \tag{3}$$

エノン写像⁶⁾

$$\begin{aligned} X_t &= 1 + Y_{t-1} - 1.4X_{t-1}^2 \\ Y_t &= 0.3X_{t-1} \quad X_0 = 0.1, Y_0 = 0.1 \end{aligned} \tag{4}$$

のシステム同定を予測次数 2~4 で行った結果, MSE とパラメータは表 1, 表 2 のようになった. 両写像とも 100 個のデータから推定した. パラメータの値に多少のずれはあるものの, どの予測次数でも誤差はほとんどなく, 決定論であればカオスであろうともシステムを近似することが可能であることを示すことができた.

また, GP (遺伝的プログラミング) 用いて同様にカオス時系列のシステム同定を行い, それをカオス制御などに応用した研究^{7),8)}も存在するが, ボルテラを用いても同様の応用可能性が存在する. ただし, ボルテラの場合は GP のように, 三角関数などを予測式に含めた近似を考えることはできない. ところが三角関数を含みカオスを内包する池田写像⁹⁾

$$\begin{aligned} X_{t+1} &= q + b(X_t \cos \theta - Y_t \sin \theta) \\ Y_{t+1} &= b(X_t \sin \theta + Y_t \cos \theta) \end{aligned}$$

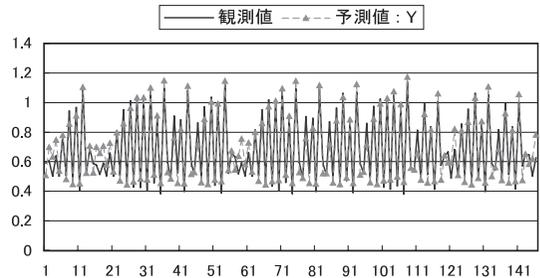


図 1 ボルテラによる池田写像のシステム同定
Fig. 1 System identification of ikeda-map using Volterra series expansion.

$$\begin{aligned} \theta &= \gamma - a/(1 + X_t^2 + Y_t^2) \\ (X_0 = 0.5, Y_0 = 0.7, q = 1.0, \\ \gamma &= 0.4, a = 6.0, b = 0.7) \end{aligned} \tag{5}$$

も, たかだか予想次数 2 のボルテラで良好に推定できる. X_{t+1} の予測において図 1 がボルテラによるもの, 図 2 がパラメータ数を同じにした線形の AR (5) モデルであるが, ボルテラは振幅の大小の変化もとらえているのが明らかである. MSE はボルテラ : 0.00472, AR (5) : 0.01872 である. これを見ると予測式に三角関数などを含むことはできないが, システム自体は近似できる可能性が十分にある. 先に述べた GP などは局所解も存在し最適解に収束する保証がないのが難点であるが, ボルテラの場合は予測次数や非線形項の次数をいくつにするかの問題はあるが, その次数の枠組みの中では最適解が求まるのが利点である.

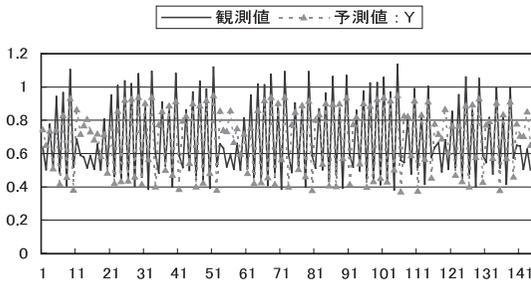


図2 AR(5)による池田写像のシステム同定

Fig. 2 System identification of ikeda-map using AR(5).

表3 カナディアン・リンクス・データにおけるボルテラとARモデル

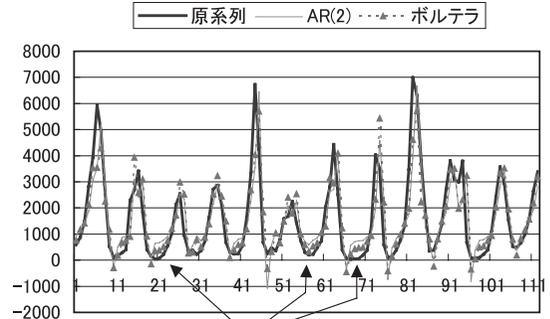
Table 3 Volterra series expansion & AR model for Canadian lynx data.

	MSE
ボルテラ	693932.8
AR(2)	798053.3
AR(5)	777958.1

4. カナディアン・リンクスデータにおける線形モデルとの比較

次に非線形時系列の中でも、カナディアン・リンクス・データと呼ばれるものを扱う。この時系列データは対数変換し非線形性をある程度除去した後、線形モデルをあてはめることによって、フィットした同定ができることが知られているが¹⁰⁾、ここでは線形モデルとボルテラの違いを明らかにするため、非線形性の強い原系列をそのまま扱ってみる。ボルテラは予測次数2とし、表3では、予測次数を同じにしたAR(2)モデルとパラメータ数を同じにしたAR(5)の両線形モデルとの誤差の比較がある。数値ではボルテラのほうに優位性があるのは確かだが、図3、図4によれば、特に時系列の立ち上がりの部分でボルテラが優位であるのが分かる。

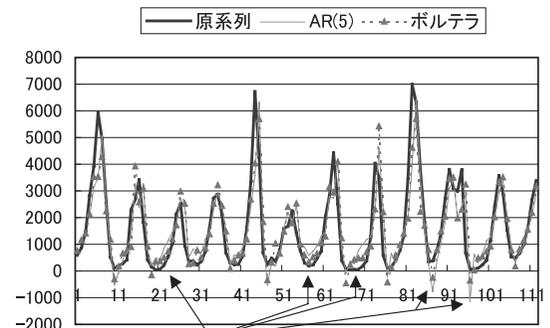
しかし、このタイプの非線形時系列特有の特徴を利用した前述の対数変換を行ったものに、たとえばAR(2)をあてはめて予測した値 Z_t を10の Z_t 乗で元に戻した予測は図5でありMSEは770199.1とボルテラより少し大きいですが、頂点の予測を外しているいくつかの点の影響が大きく、その非線形性の特徴、特に値が1000以上の部分と以下の部分の違いはボルテラよりもよくつかんでいる。すなわち時系列データに対応する個別の非線形予測法が開発されていれば、同じ予測次数あるいは同じパラメータ数でも、そのほうが精度が勝る可能性があることが分かる。しかし、そ



ボルテラのほうが優れている部分

図3 カナディアン・リンクス・データに対するボルテラとAR(2)

Fig. 3 Volterra & AR(2) for Canadian lynx data.



ボルテラのほうが優れている部分

図4 カナディアン・リンクス・データに対するボルテラとAR(5)

Fig. 4 Volterra & AR(5) for Canadian lynx data.

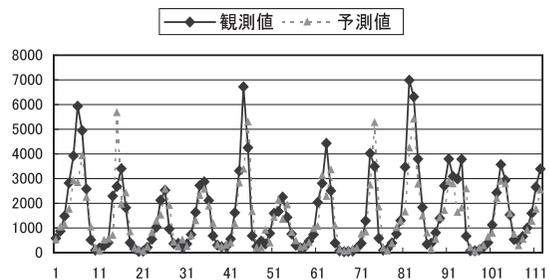


図5 対数変換を利用した予測

Fig. 5 Forecasting using logarithmic transformation.

の個別の予測法には他の時系列への汎用性がないという問題もまた同時に発生する。

またこのデータの場合、図の縦軸の値でも分かる通り非常に値が大きく、MSEやパラメータの値には若干の注意が必要である。

- 原系列が1よりも大きい値 → 非線形項はさらに大きい値 → パラメータは小さくなる
- 原系列が1よりも小さい値 → 非線形項はさらに小さい値 → パラメータは大きくなる

表 4 経済時系列におけるボルテラと AR モデル
Table 4 Volterra series expansion & AR model for economic time series.

	予測次数→	2	3	4
TOPIX	ボルテラ	0.000162	0.000163	0.000161
	AR	0.000163	0.000159	0.000158
¥/\$ RATE	ボルテラ	0.000423	0.000425	0.000430
	AR	0.000439	0.000436	0.000413

原系列にボルテラを用いると、定数項だけが際だって大きく、その他のパラメータはほぼ 0 となるが、これは非線形項の値が大きくなりすぎたため、そのようなパラメータを 0 として予測を行うとかなりの誤差が発生する。

5. 経済時系列における線形モデルとの比較

次に ARCH モデルなどの登場で非線形性が指摘されている経済時系列だが、その中でも TOPIX (1998–1999) の日次収益率と円・ドル為替レートの月次収益率 (1973–1999) に対して線形 AR モデルとボルテラをあてはめた MSE の結果が表 4 である。表の上の段にはボルテラの予測次数を示し、AR モデルはボルテラとパラメータ数を同一としたものである (AR (5), AR (9), AR (15))。TOPIX の日次では AR モデルのほうが、為替の月次ではボルテラのほうが若干良いという結果であるが、ほとんど差はないといったほうがよい。経済時系列の分野では線形モデルと ARCH, GARCH, SETAR などの非線形モデルとの比較¹¹⁾が行われているが、その差は微々たるものであることから、このボルテラを用いた結果も精度は上がらなかったが妥当なものといえるであろう。

6. おわりに

本研究ではボルテラ級数展開をフィルタではなく予測として考えた際のシステム同定について、いくつかの非線形時系列を対象として分析した。ボルテラはカオス時系列にも対応できることが分かり、かつ実際の経済時系列などでは ARCH や SETAR などと線形モデルを比較した場合と遜色のない結果が得られたため、ボルテラは非線形時系列モデルの中では比較的汎用性のあるものと思われる。それらによりボルテラは非線形時系列の 1 つの予測法として十分に価値があることが分かった。また、本研究では非線形項を 2 次までとし、予測次数も最大で 4 次までのシンプルなものしか扱わなかったため、より高次のモデルは今後の課題である。

またデジタル信号処理の分野では適応 Volterra

フィルタなるリアルタイム処理の逐次更新アルゴリズムの研究が活発である。経済時系列などでは、カルマン・フィルタを用いた時変係数 AR モデル¹²⁾などがパラメータの逐次更新型モデルとして扱われているが、ボルテラを予測に用いる際にも、この適応的な逐次更新処理を用いることにより精度の向上が期待できるであろう。

謝辞 東京理科大学大学院工学研究科の古川利博助教授には、多大なご指導をいただいたのでここに感謝の意を述べさせていただきます。

参考文献

- 1) 趙 晋輝, 宇野晋平ほか: Volterra 形非線形 FIR 適応フィルタの高速収束算法に関する考察, 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol.J83-A, No.4, pp.370–378 (2000).
- 2) 梶川嘉延: 適応 Volterra の現状と展望, 電子情報通信学会論文誌 (A), Vol.J82-A, No.6, pp.759–768 (1999).
- 3) 横田康成, 小泉将臣, 松岡智毅: 非線形自己帰帰モデルによる心電図の予測符号化法, 電子情報通信学会論文誌 (D-II), Vol.J81-D-II, No.10, pp.2467–2474 (1998).
- 4) Schetzen, M.: *The Volterra and Wiener theories of nonlinear system*, Kriger, Florida (1989).
- 5) 合原一幸: カオス学入門, pp.58–69, 放送大学教育振興会 (2001).
- 6) エドガー・ピーターズ (著) 新田 功 (訳): カオスと資本市場, pp.166–170, 白桃書房 (1994).
- 7) Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Approximation of Chaotic Dynamics by Using Smaller Number of Data Based upon the Genetic Programming and Its Applications, *Trans. IEICE*, Vol.E83-A, No.8, pp.1599–1607 (2000).
- 8) Ikeda, Y. and Tokinaga, S.: Controlling the chaotic dynamics by using approximated system equations obtained by the genetic programming, *Trans. IEICE*, Vol.E84-A, No.9, pp.2118–2127 (2001).
- 9) Ikeda, K.: Multiple-Valued Stationary State And Its Instability Of The Transmitted Light by a Ring Cavity System, *Optics Communications*, Vol.30, No.2, pp.257–261 (1979).
- 10) 赤池弘次, 尾崎 統, 北川原四郎: 時系列解析の方法, p.153, 朝倉書店 (1998).
- 11) 刈屋武昭, 照井伸彦: 非線形経済時系列分析法とその応用, pp.121–130, 岩波書店 (1997).
- 12) 北川源四郎: 時系列解析プログラミング, pp.295–319, 岩波書店 (1993).

(平成 14 年 4 月 30 日受付)

(平成 14 年 9 月 5 日採録)