5V-1

複数連鎖型待ち行列網モデルにおける イグザクト・アグリゲイションの解析

山本　彰　（日立製作所システム開発研究所）

1．はじめに

待ち行列網モデルにおいて、しばしばアグリゲイションという手法が用いられる。アグリゲイションとは、待ち行列網モデルにおけるサーバの部分集合、あるいは、状態の部分集合を１つのサーバ、あるいは、状態に纏め上げることをさす。この後アグリゲイトされたサーバの集合、あるいは、状態の集合の解析を行い、解を得る。この結果得られた解が、オリジナル・モデルを直接解析して得た解と等しい時、適用したアグリゲイションをイグザクト・アグリゲイションと呼ぶ。Chandy[1]らは、積形解[2]をもつ待ち行列網モデルに対して一種のアグリゲション手法であるパラメトリック・アナリシスと呼ばれる手法を適用した時に、厳密解が得られることを証明している。以来、報告者等の拡張[3]も含めて、いくつかの拡張が行われているが、これらはいずれもサーバ単位のアグリゲイションであり、幅広く状態単位のアグリゲイションは明らかにされていなかった。サーバ単位のアグリゲイションは、広い意味で考えると、あるサーバに関する特殊な状態の集合をアグリゲイトしているにすぎないと考えられる。本稿では、積形解をもつ複数連鎖型待ち行列網モデルにおいて、任意の状態の集合をアグリゲイションの対象としてもイグザクト・アグリゲイションが可能であることを示す。

2．解析対象モデル

本論文では、積形解をもつ複数連鎖型、いわゆる、ＢＣＭＰ型待ち行列網モデルを解析対象とする。連鎖とは処理要求が網の構成要素であるサーバ、および、サービス時間を定めるクラスの間を推移する確率を表したものである。ＢＣＭＰ型モデルには、複数個の連鎖が存在し、クローズド型とオープン型の連鎖が混在してよい。オープン型の連鎖では、処理要求が網の外部の発生／消滅源から到着し、退去する。一方、クローズド型の連鎖では、処理要求の網外からの到着、及び、退去が生じないため、連鎖上の処理要求の数は常に一定である。ただし、本稿では、処理要求は、クラス間を推移しないモデルを扱うため、１つの連鎖が１つのクラスに対応する。（本稿で証明する定理は、処理要求がクラス間を推移する場合にも容易に証明可能である。）

表１に記号の定義を示す。網は、サーバ１からサーバＭまでのサーバによって構成され、連鎖１から連鎖Ｊまでの連鎖が存在し、連鎖１→ｊをオープン型、連鎖ｊ＋１→Ｊをクローズド型の連鎖とする。モデルの状態は、各サーバにおける各連鎖の処理要求の滞在数Ｎで表わされる。また、サーバmにおける各クラスの処理要求の滞在数のベクトルをN_mとする。この時、ＢＣＭＰ型の待ち行列網では、状態Ｎが生起する確率Ｐ(Ｎ) は次式で定義されることが知られている。

$$P(N) = \Pi_{m=0}^{N_0-1} \lambda(n) * (\Pi_{m=1}^{M} f(N_m)) / G \qquad (2.1) \qquad G：正規化定数$$

図１を用いて、アグリゲイションの考え方について述べる。図１のモデルは、クローズド型の単一連鎖モデルで、サーバ数は３で、処理要求数は４である。この時、破線で分割したそれぞれ２つの状態の集合をアグリゲイションの単位とする。例えば、状態(１，２，１) は、オリジナル・モデルでは６個の状態へ遷移する。しかし、６個の状態のうち２個の状態は、アグリゲイションの集合に属さないため、アグリゲイションの際には、この２つの状態には遷移を起こさないように推移率を変更する必要がある。以下、イグザクト・アグリゲイションを可能にする推移率の算出法について述べる。

各状態の推移は、各連鎖ごとに、独立に発生し、かつ、推移率も連鎖ごとに独立に定義するため、推移率の算出は、連鎖ごとに独立に考えて良いことになる。１つのクローズド型の連鎖に関しては、各状態の推移は、それぞれのサーバ(Ｍ個) で、処理要求のサービスが完了した時、このサーバ以外のサーバ(Ｍ－１個)に処理要求が推移したときに発生する。従って、クローズド型連鎖の場合、それぞれの状態はＭ×(Ｍ－１) 個の状態と推移関係を持つ。一方、オープン型の連鎖の場合、クローズド型に加えて、さらに処理要求の外部からＭ個のサーバへの到着、および、Ｍ個のサーバからの退去があるため、それぞれの状態は、Ｍ×(Ｍ－１)＋２Ｍ個の状態と推移関係を持つ。(１つの状態は、以上の個数をすべての連鎖に関して加えた個数に等しい数の状態と推移関係を持つ。）従って、クローズド型の連鎖の場合、あるサーバmに着目した時、このサーバm上の処理要求が他のＭ－１個のサーバに推移したとき移る状態の集合と推移前の状態とをあわせたＭ個の状態を１つの集合として纏め、サーバmをサーバ１からサーバＭまで変化させて考えると、１つの状態はある連鎖に関してＭ個の集合に属することになる。オープン型の連鎖の場合、さらに、(１) サーバm上の処理要求が網の外部に退去した時に推移する状態を加えること、(２) この状態に外部からＭ個のサーバのうちのいずれかに処理要求が到着したときに推移する状態の集合の存在、以上を考慮する必要があるため、１つの状態はある連鎖に関し、Ｍ＋１個の状態からなるＭ＋１個の集合に属することになる。

以上の集合をここでは、推移率算出単位集合と呼ぶ。クローズド型連鎖ｉの場合、この集合は、状態$(N+\delta_{1i})$，状態$(N+\delta_{2i})$---，状態$(N+\delta_{Mi})$ により構成される。オープン型連鎖ｉのばあい、以上の状態に状態(Ｎ)を加えた状態の集合により推移率算出単位集合を構成する。クローズド型連鎖の場合、連鎖ｉはサーバ間の推移率を表すため、以上のＭ個の状態の間で独立した１つの推移率が定義されていると考えることができる。例えば、状態$(N+\delta_{mi})$ は、サーバmに対応し、状態$(N+\delta_{mi})$から状態$(N+\delta_{ki})$の推移率には、サーバmからサーバkへの推移率p_{mki}を対応させることが出来る。以下、サーバmを状態$(N+\delta_{mi})$ の対応サーバと呼ぶ。オープン型連鎖の場合も、上記の推移率算出単位集合の間で、１つの推移率が定義されていると考られる。ただし、状態(Ｎ) の対応サーバは発生／消滅源となる。(従って、対応サーバの集合は発生／消滅源を含みうる。）

Exact Aggregation in Multiple-chain Queueing Networks
Akira YAMAMOTO
Systems Development Laboratory, Hitachi Ltd.

アグリゲイションを行う際には、推移率算出単位集合ごとに推移率を算出する。この際、アグリゲイションを行う集合S^*の中に推移率算出単位集合内のすべての状態が含まれる時には、この推移率算出単位集合内の推移率は変更する必要がなく、アグリゲイションの対象となる状態の中に、すべての構成状態を含まない推移率算出単位集合内の状態の推移率のみ変更する必要がある。ある推移率算出単位集合の中で、アグリゲイションの対象となる状態に含まれる状態の対応サーバの集合をθ^*とする。ＢＣＭＰ型モデルでは、訪問回数e_{mi}と呼ばれる値が連鎖、サーバごとに次式で定義される。

オープン型連鎖：$e_{mi}=p_{smi}+\Sigma_{k=1}^{M} p_{kmi}\, e_{ki}$　クローズド型連鎖：$e_{mi}=\Sigma_{k=1}^{M} p_{kmi}\, e_{ki}$ (m=1-M,i=1-J)(2.2)

イグザクト・アグリゲイションを行うためには、連鎖ｉに関する推移率を新たに算出する場合、各推移率算出単位集合内のθ^*に属する訪問回数を保存するために、アグリゲイションの対象に属する推移率算出単位集合θ^*内の状態間の推移率$p_{mki}^{\theta^*}$を次式を満たす示すように定める。ただし、$\theta^{*\prime}$をθ^*から発生/消滅源を除いたサーバの集合とする。

オープン型連鎖、かつ、発生／消滅源$\in\theta^*$：$e_{mi}=p_{smi}^{\theta^*}+\Sigma_{k\in\theta^{*\prime}} p_{kmi}^{\theta^*}\, e_{ki}$　($\forall m,\forall k\in\theta^{*\prime}$)(2.3)

上記条件以外：$e_{mi}=\Sigma_{k\in\theta^*} p_{kmi}^{\theta^*}\, e_k$　($\forall m,\forall k\in\theta$)　(2.4)

訪問回数の保持によりアグリゲイションの対象となる状態の中で、ある状態が生起する確率は次式で定義可能となる。(証明は原稿枚数の関係で省略する。)以下、アグリゲイションを適用した結果をアグリゲイト・モデルS^*と呼ぶ。

$P^*(N)=\Pi_{n=0}^{N_0-1}\lambda(n)*(\Pi_{m=1}^{M} f(N_m))/G(S^*)$ (2.5)　$G(S^*)$：状態集合Ｓ に関する正規化定数

３．アグリゲイト・モデル間の解析

次に、前節で示したアグリゲイト・モデル間の解析を示す。このモデルをS^*とS^{**}とする。この時、S^*とS^{**}はオリジナル・モデルにおいて、お互いに推移関係を持つ状態が少なくとも１組存在する必要がある。これは、言い替えるとS^*とS^{**}は少なくとも１つの推移率算出単位集合を共有していることになる。オリジナル・モデルにおいて、S^*とS^{**}からなる状態の集合を直接アグリゲイトした時、状態Ｎが生起する確率$P^{**}(N)$は次式で定義できる。

$P^{**}(N)=\Pi_{n=0}^{N_0-1}\lambda(n)*(\Pi_{m=1}^{M} f(N_m))/G(S^*+S^{**})$ (3.1)

一方、アグリゲイト・モデルS^*とS^{**}を解析した時、解析後の新しいアグリゲイト・モデルで状態Ｎ が生起する確率は次式で定義できる。ただし、$P(S^*/(S^*+S^{**}))$を解析後のモデルでＳ が生起する確率とする。(3.2式は、ＮがS^*に属する場合である。S^{**}に属する場合は、$S^*/(S^*+S^{**})$を$S^{**}/(S^*+S^{**})$に変えればよい。)

$P^{***}(N)=P^*(N)*P(S^*/(S^*+S^{**}))$ (3.2)

この時、イグザクト・アグリゲイションが成立するということは、次の定理が成立することに他ならない。

［定理１］　$P^{**}(N)=P^{***}(N)$　(3.3)

以下、定理１の証明を行う。定理１は$P(S^*/(S^*+S^{**}))=G(S^*)/G(S^*+S^{**})$ (3.4)が成立すれば証明可能となることは明らかである。$P(S^*/(S^*+S^{**}))$を得るためには、２つのアグリゲイト・モデル間の処理要求の流量が等しいという方程式を解く必要がある。２つのモデル間の処理要求の流れは、オリジナル・モデルにおいてお互いに、推移関係を持っている状態のあいだに発生する。S^*とS^{**}は、１つ以上の推移率算出単位集合を共有する。従って、S^*とS^{**}に共有されるそれぞれの推移率算出単位集合に属するS^*内の状態とS^{**}内の状態の間の流量が等しければ、全体の流量も等しくなることになる。以下、3.4式が成立した時、１つの推移率算出単位集合のなかに含まれる状態間の流量が等しくなることを証明する。ここでは、連鎖ｉのある１つの推移率算出集合に着目する。S^*, S^{**}それぞれに属する推移率算出単位集合の対応サーバの集合をθ^*，θ^{**}とする。この時、解析に用いる推移率は、オリジナル・モデルのθ^*, θ^{**}に属するサーバにおける連鎖ｉの訪問回数を保持している必要がある。以上を纏めると、S^*とS^{**}に共有される連鎖ｉに関する推移率算出単位集合内の状態の間の状態方程式は、以下のように整理できる。

オープン型連鎖、かつ、発生／消滅源$\in\theta^*+\theta^{**}$：$\Pi_{n=0}^{N_0}\lambda(n)*(\Pi_{m=1}^{M} f(N_m))\{\Sigma_{k\in\theta^{**}} p_{ski}^{\theta^*+\theta^{**}}+\Sigma_{m\in\theta^{*\prime}}(\Sigma_{k\in\theta^{**}} p_{mki}^{\theta^*+\theta^{**}})\, e_{mi}\}/G(S^*+S^{**})=\Pi_{n=0}^{N_0}\lambda(n)*(\Pi_{m=1}^{M} f(N_m))\{\Sigma_{m\in\theta^{**}}(\Sigma_{k\in\theta^*} p_{mki}^{\theta^*+\theta^{**}})\, e_{mi}/G(S^*+S^{**})$ (本式では、発生／消滅源$\in\theta^*$。θ^{**}に含まれる場合は発生/消滅源からの流量が左辺にくる。) (3.5)

上記以外：$\Pi_{n=0}^{N_0}\lambda(n)*(\Pi_{m=1}^{M} f(N_m))\{\Sigma_{m\in\theta^*}(\Sigma_{k\in\theta^{**}} p_{mki}^{\theta^*+\theta^{**}})\, e_{mi}\}/G(S^*+S^{**})=\Pi_{n=0}^{N_0}\lambda(n)*(\Pi_{m=1}^{M} f(N_m))\{\Sigma_{m\in\theta^{**}}(\Sigma_{k\in\theta^*} p_{mki}^{\theta^*+\theta^{**}})\, e_{mi}/G(S^*+S^{**})$ (3.6)

3.5,3.6式の両辺が等しいことは用意に証明可能である。以上により、定理１が証明可能となる。

４．おわりに

複数連鎖型待ち行列網において任意の状態の集合に対してイグザクト・アグリゲイションが可能であることを証明した。

［参考文献］

1) Chandy,K.M. et al:Parametric Analysis of Queueing Networks, IBM J. Res. Dev.,Vol.19, No.1,pp.36-42 (1975)
2) Baskett,F. et al : Open,Closed,and Mixed Networks of Queues with Different Classes of Customers, J.ACM, Vol.22, No.2, pp.248-260 (1975)
3)山本：複数クラス待ち行列網モデルにおけるNortonの定理の拡張,情報処理学会第30回全国大会予稿集

表１．記号の定義

N_0:モデル内のオープン型連鎖上の処理要求滞在数
$\lambda(n)$:オープン型連鎖上の処理要求滞在数がｎの時の到着率
$f(N_m)$:サーバのタイプにより定まる関数
δ_{mj}: M*J個の要素の内(m-1)*J+j番目が1で他は0のベクトル
p_{mki}:連鎖iのサーバmからサーバk(発生/消滅源も含む)への推移
p_{ski}:連鎖iの発生/消滅源からサーバkへの推移率

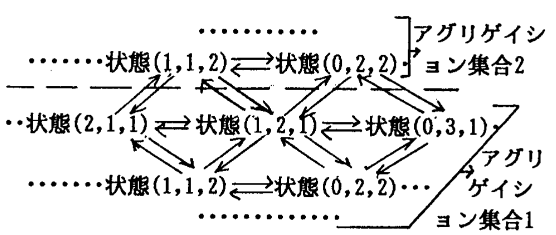

図１．状態推移図