Vol.2015-AL-152 No.4
2015/3/3

有向グラフにおけるパリティハミルトン閉路問題

西山 宏[1]　山内 由紀子[1]　来嶋 秀治[1]　山下 雅史[1]

概要：パリティハミルトン閉路 (Parity Hamiltonian Cycle, PHC) はグラフのすべての頂点を奇数回訪問する巡回路である．本論文では，有向グラフにおける PHC 問題が $\mathcal{P}$ に属すことを示す．また，有向グラフに対して PHC を構成する多項式時間アルゴリズムを与える．

キーワード：ハミルトン閉路問題，線形代数

1. はじめに

パリティハミルトン閉路 (Parity Hamiltonian Cycle, PHC) は，グラフのすべての頂点を奇数回訪問する巡回路である．グラフに PHC が存在するかを判定する問題をパリティハミルトン閉路問題 (PHC 問題) と呼ぶ．PHC では，ハミルトン閉路と異なり，同じ辺を複数回通ることを許す．

Brigham ら [2] は任意の無向グラフがすべての頂点を奇数回通る歩道をもつことを示し，そのような歩道を構成する線形時間アルゴリズムを提案した[*1]．また西山ら [3] は，無向グラフが PHC が存在するための必要十分条件を与え，PHC 問題が $\mathcal{P}$ に属すことを示した．本論文では，有向グラフにおける PHC 問題を考え，問題が $\mathcal{P}$ に属すことを示す．さらに，有向グラフにおける PHC の構成が $\mathcal{O}(|V||E|^2)$ でできることを示す．

PHC 問題は $\mathcal{NP}$ 完全問題であるハミルトン閉路問題の制約を緩和した問題である．また，マッチングの拡張であり多項式時間計算可能な T-join，離散構造における凸集合に相当する jump system とも関係があると考えられる．PHC 問題を調査することによりこれらの関係を調べることが，本問題を導入する動機である．巡回セールスマン問題 (TSP) とマッチング，あるいは even factor との関係については，先行研究がある (e.g., [1], [4])．

本論文の構成は以下の通りである．2 節で記法と問題の定義を行う．3 節で有向グラフにおける PHC 問題について議論する．

1　九州大学
Kyushu University

*1　Brigham らは歩道として閉じていないものを許しており，PHC 問題とは差異がある．

2. 準備

2.1 記法と定義

有向グラフ $D = (V, A)$ は，頂点集合 V と有向辺の集合 $A \subseteq V \times V$ から成る組である．有向辺 $a = (u, v) \in A$ に対し，u を a の始点，v を a の終点と呼ぶ．頂点 $v \in V$ に対し，v を始点にもつ有向辺の集合を $\delta^+(v)$，v を終点にもつ有向辺の集合を $\delta^-(v)$ と書く．

有向グラフ D の巡回路は，頂点と有向辺の系列 $v_0 a_1 v_1 \dots a_\ell v_\ell (v_\ell = v_0)$ である．ただし $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ または $a_i = (v_i, v_{i-1})$ である．巡回路 C において，すべての $i = 1, \dots, \ell$ に対して $a_i = (v_{i-1}, v_i)$ が成り立つとき，C を有向巡回路と呼ぶ．閉路（有向閉路）は，各頂点が始点 v_0 を除き高々 1 度しか現れない巡回路（有向巡回路）である．有向グラフ D のすべての閉路の特性ベクトルで生成される GF[2] 上のベクトル空間を，D の閉路空間と呼ぶ．D の閉路空間の階数を，D の閉路階数と呼ぶ．

2.2 パリティハミルトン閉路

有向グラフの**パリティハミルトン閉路** (PHC) は，始めの頂点 v_0 を無視したとき，全ての頂点が奇数回現れる有向巡回路である．すなわち，辺 a の現れる回数を x_a とし，頂点 v に対して

$$\mathrm{visit}(v) = \sum_{a \in \delta^+(v)} x_a$$

と定めるとき，パリティハミルトン閉路はすべての頂点 v に対して $\mathrm{visit}(v) \equiv 1 \pmod 2$ が成り立つ有向巡回路である．パリティハミルトン閉路では，同じ辺を 2 回以上通過してよいことに注意する．

3. PHC 問題

この節では，有向グラフがパリティハミルトン閉路をもつための 2 つの特徴づけを示す．簡潔のため，$D = (V, A)$ に対し $n = |V|, m = |A|$ とおく．

有向グラフ $D = (V, A)$ に対し，GF[2] 上の $n \times m$ 型行列 $M^+ = [m^+_{va}], M^- = [m^-_{va}]$ をそれぞれ

$$m^+_{va} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in \delta^+(v), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$m^-_{va} = \begin{cases} 1 & \text{if } a \in \delta^-(v), \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

で定義する．

D の閉路階数を $k = m - n + 1$ とする．D の k 個の線形独立な有向閉路の特性ベクトルを $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k \in \mathrm{GF}[2]^m$ とし，行列 C_A を

$$C_A = [\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k]$$

で定義する．さらに行列 C_V を

$$C_V = M^+ C_A = M^- C_A$$

で定義する．C_V の各列は，頂点の特性ベクトルで有向閉路を表したものになっている．また，$\mathbb{1}$ ですべての成分が 1 のベクトルを表す．

補題 3.1. D が PHC をもつための必要十分条件は，$C_V \boldsymbol{x} = \mathbb{1}$ が解をもつことである．

証明． **必要性** D が PHC をもつとする．$\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_\ell \in \mathrm{GF}[2]^\ell$ を D の全ての有向閉路の特性ベクトルとする．このとき，ある $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^\ell$ が存在し，$\boldsymbol{c} = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i \boldsymbol{c}_i$ とおくと任意の $v \in V$ に対して $(\chi(\delta^+(v)))^\top \boldsymbol{c} = 1$ が成り立つ．ここで $\chi(F) \in \mathrm{GF}[2]^m$ は $F \subseteq A$ の特性ベクトルである．いま，任意の有向閉路は $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_k$ の線形結合で書けるから，ℓ を k に置き換えることができる．すなわち

$$\begin{aligned}
&\exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^k, \forall v \in V, (\chi(\delta^+(v)))^\top \boldsymbol{c} = 1 \ (\boldsymbol{c} = \textstyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{c}_i) \\
&\Rightarrow \exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^k, M^+ \boldsymbol{c} = \mathbb{1} \ (\boldsymbol{c} = C_A \boldsymbol{\alpha}) \\
&\Rightarrow \exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^k, M^+ C_A \boldsymbol{\alpha} = \mathbb{1} \\
&\Rightarrow \exists \boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^k, C_V \boldsymbol{\alpha} = \mathbb{1}
\end{aligned}$$

となり，$C_V \boldsymbol{x} = \mathbb{1}$ は $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^k$ を解にもつ．

十分性 $C_V \boldsymbol{x} = \mathbb{1}$ の解を $\boldsymbol{\alpha} \in \mathrm{GF}[2]^k$ とする．C_V の各列ベクトル $\boldsymbol{c}_i$ に対応する閉路を C_i とすると，$\alpha_i = 1$ のとき C_i を 1 回，$\alpha_i = 0$ のとき C_i を 2 回周回する．このようにして得られる有向巡回路は明らかに D の PHC である． ■

行列 M を

$$M = \begin{bmatrix} M^+ \\ M^- \end{bmatrix}$$

で定義する．

補題 3.2. D が PHC をもつための必要十分条件は，$M\boldsymbol{x} = \mathbb{1}$ が解をもつことである．

補題 3.2 から，次が言える．

定理 3.3. 有向グラフに対する PHC 問題は $\mathcal{P}$ に属す．

有向グラフに PHC を構成するアルゴリズムを示す．

アルゴリズム 1 有向グラフ上の PHC の構成．

```
Mx = 𝟙 を解く
x ∈ GF[2]^m を x ∈ ℤ^m に取り直す
フロー f を構成し，x ← x + f
while x で与えられる有向巡回路が非連結 do
    有向巡回路を連結にする閉路 C を見つけ，x ← x + 2χ(C)
end while
return x
```

アルゴリズム 1 の時間計算量は $\mathcal{O}(nm^2)$ である．

4. おわりに

本論文では有向グラフにおけるパリティハミルトン閉路問題が $\mathcal{P}$ に属すことを示し，パリティハミルトン閉路を構成する多項式時間アルゴリズムを与えた．

今後の課題としては，パリティハミルトン閉路問題とハミルトン閉路問題，even factor，extended complexity，jump system 等との関係の調査が挙げられる．また，重み付きグラフの重み最小 PHC を求める厳密アルゴリズムの設計，なども興味深い問題である．

参考文献

[1] S. Boyd, S. Iwata, K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP walks in cubic graphs, SIAM Journal on Discrete Mathematics, **27** (2013), 918–939.

[2] R.C. Brigham, R.D. Dutton, P.Z. Chinn, F. Harary: Realization of parity visits in walking a graph, The College Mathematics Journal, **16** (1985), 280–282.

[3] H. Nishiyama, Y. Kobayashi, Y. Yamauchi, S. Kijima, M. Yamashita: The parity Hamiltonian cycle problem, arXiv.org e-Print archive abs/1501.06323.

[4] M. Yannakakis: Expressing combinatorial optimization problems by linear programs, Journal of Computer and System Sciences, **43** (1991), 441–466.