Vol.2015-AL-152 No.3
2015/3/3

準完全有向グラフとその一般化に対するパス幅計算について

橘内 謙太[1] 小林 靖明[2] 玉木 久夫[1]

概要：有向グラフ G は，その各頂点 u が「辺 (u,v) も辺 (v,u) も存在しないような頂点 $v \neq u$ の個数は高々 h である」という性質を満たすとき，h 準完全であるという．0 準完全な有向グラフは準完全有向グラフとして知られ，トーナメントはその特別な場合である．本稿では，n 頂点の h 準完全有向グラフ G と正整数 k が与えられたとき，G のパス幅が k 以下であるかを判定する $(h+2k+1)^{2k}n^{O(1)}$ 時間のアルゴリズムを与える．この結果は，Pilipczuk の準完全有向グラフに対する結果を（n に対する依存度の犠牲のもとに）一般化している．我々のアルゴリズムは劣モジュラシステムにおける線形配置問題に対する Nagamochi のアルゴリズムを有向グラフのパス幅問題に特化し，我々の目的のために適合させたものである．「U を入次数（出次数）が k 以下であるような任意の頂点集合とするとき，$U \cup \{v\}$ の入次数（出次数）が k 以下であるような頂点 v の個数は 高々 b である」という性質を満たす有向グラフに対してこのアルゴリズムの実行時間は $b^{2k}n^{O(1)}$ である．

1. はじめに

無向グラフの**パス幅**（*pathwidth*）[2], [12] の概念は，Robertson と Seymour によるグラフマイナー理論 [12] の中で，重要な役割を果たすだけでなく，グラフアルゴリズムの世界でも重要なグラフパラメータとして認識されている．例えば，グラフのパス幅（さらに一般的には，グラフの木幅）が定数であるとき，多くの NP 困難なグラフ上の問題は多項式時間で解くことができることが知られている [2]．しかしながら，パス幅を決定する問題は NP 完全であることが知られている [7]．

このような背景の中で，パラメータ化計算量理論の世界でもパス幅決定アルゴリズムの研究は行われている．ある問題が**固定パラメータ容易**（*fixed parameter tractable*）であるとは，その問題のインスタンス I とパラメータ k が与えられたとき，その問題を解く $f(k)|I|^{O(1)}$ 時間アルゴリズムが存在することである．ここで，f は計算可能関数であり，$|I|$ はインスタンスのサイズであるとする．また，そのような実行時間のアルゴリズムを**固定パラメータアルゴリズム**（*fixed parameter algorithm*）と呼ぶ．グラフのパス幅がパラメータ以下であることを判定する問題は，パス幅がマイナー操作に関して単調であるため，固定パラメータ容易である [13], [14]．Bodlaender と Kloks は，その問題に対してグラフのサイズに対して線形時間で動作する固定パラメータアルゴリズムを与えた [2], [3]．

その一方で，有向グラフのパス幅を求めるアルゴリズムの研究も行われている．有向グラフのパス幅の概念は以下の理由により，無向グラフのパス幅の概念を一般化していると言える．無向グラフ G の各無向辺 $\{u,v\}$ を，2 つの有向辺 $(u,v),(v,u)$ に置き換えて得られる有向グラフを G' とするとき，G のパス幅と G' のパス幅は一致する [9][*1]．これにより，有向グラフのパス幅を決定する問題も同様に NP 完全であることがわかる．有向グラフのパス幅は，その無向基礎グラフのパス幅とは一般的には一致しないことに注意する．特に，有向無閉路グラフのパス幅は 0 であるのに対し，その無向基礎グラフの（無向グラフの）パス幅は任意に大きくなる．

無向グラフのパス幅が，あるパラメータ以下であるかを判定する問題が固定パラメータ容易であるのに対し，有向グラフでの同様の問題が固定パラメータ容易であるかは未解決問題である．その一方で，$n^{O(k)}$ 時間アルゴリズムが知られている [10], [15]．ここで，n は入力されるグラフの頂点数，k はパラメータとする．

無向グラフに対するグラフマイナー理論と類似の成功を得ることの可能な有向グラフのクラスの探求という文脈のなかで，Formin，Kim，Pilipczuk，Seymour[6], [8] および Chudnovsky，Fradkin，Seymour[4], [5] はトーナメントや**準完全有向グラフ**（*semi-complete digraph*）に対するパス幅やカット幅に対する固定パラメータアルゴリズムを与

1 明治大学
Meiji University
2 学習院大学
Gakushuin University

*1 ただし，無向グラフのパス幅の定義と有向グラフでの定義はわずかに異なる．

えた．準完全有向グラフとは，無向基礎グラフ（辺の向きを無視し，多重辺を取り除いてできる無向グラフ）が完全グラフであるような有向グラフのことを言う．これらの幅パラメータは，グラフマイナー理論によって得られた結果を，それらのグラフクラスに適用するために重要な役割を果たしている．上述のアルゴリズムが構成的ではないのに対し，Pilipczuk は構成的な固定パラメータアルゴリズムを与えた [11]．Pilipczuk のアルゴリズムは，n 頂点の準完全有向グラフと整数 k が与えられたとき，そのグラフのパス幅が k 以下であるかを $2^{O(k \log k)} n^2$ 時間で判定する．我々は，この結果を次のように一般化する．

非負整数 h に対して，有向グラフ $G = (V, E)$ が h **準完全**であるとは，その無向基礎グラフの最小次数が $|V| - h - 1$ 以上であることを言う．0 準完全性は準完全性と一致し，準完全有向グラフは任意の $h \geq 0$ に対して h 準完全である．

定理 1. h 準完全有向グラフ G と正整数 k が与えられたとき，G のパス幅が k 以下であるかを判定する $(h+2k+1)^{2k} n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムが存在する．つまり，$h + k$ をパラメータとしたとき，この問題は固定パラメータ容易である．

この結果は，次に定義する (k, b) 有界な有向グラフに対するより一般的な結果の帰結である．有向グラフ G と頂点集合 $U \subseteq V(G)$ に対して，U の G における**入次数** $d^-{}_G(U)$（**出次数** $d^+{}_G(U)$）を，$v \in V(G) \setminus U$ で v から U に入る（U から v に出る）辺が存在するようなものの個数とする．正整数 k, b に対して G が (k, b) **有界**であるとは，$d^-(U) \leq k$ を満たすような各 $U \subseteq V$ に対して，$d^-(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たすような $v \in V \setminus U$ が高々 b 個であり，かつ $d^+(U) \leq k$ を満たすような各 $U \subseteq V$ に対して，$d^+(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たすような $v \in V \setminus U$ が高々 b 個であることを言う．

定理 2. 正整数 k と (k, b) 有界な有向グラフ G が与えられたとき，G のパス幅が k 以下であるかを判定する $b^{2k} n^{O(1)}$ 時間アルゴリズムが存在する．

h 準完全有向グラフは $(k, h+2k+1)$ 有界であるので（補題 1 参照），定理 1 は定理 2 の直接の帰結である．

我々のアルゴリズムは，Nagamochi [10] による劣モジュラシステムにおける線形配置問題に対するアルゴリズムに基づいている．彼は，n 頂点有向グラフのパス幅が k 以下であるかを判定する問題に対して彼のアルゴリズムを適用した場合の計算時間が，$n^{2k+O(1)}$ であることを示した．(k, b) 有界な有向グラフに彼のアルゴリズムを適用すると，(k, b) 有界性のうち入次数に関する条件のみを活用することができて，計算時間の上界を $b^k n^{k+O(1)}$ に改良することができる．我々は，彼のアルゴリズムをパス幅計算に特化し，(k, b) 有界性における入次数と出次数の両方の条件を活用できるようなアルゴリズムを設計することにより，上述の結果を導く．

我々のアルゴリズムは Pilipczuk [11] の導入した**分離鎖**（*separation chain*）の（一般化した）概念を利用し，h 準完全グラフの $(k, h + 2k + 1)$ 有界性の証明に彼の用いた議論を用いるが，アルゴリズム自体は彼のアルゴリズムとは全く異なる原理に基づいている．実際，彼のアルゴリズムが準完全グラフの多くの性質に依存し，準完全グラフに対してのみ動作可能であるのに対して，我々のアルゴリズムは，一般の有向グラフに対して動作する：(k, b) 有界性は実行時間の解析でのみ使用される．

本稿の構成を以下に記す．2 節では本稿で使用する定義を基礎的な事実を与える．3 節ではアルゴリズムの設計と正しさの証明のためにキーとなるいくつかの補題を与える．4，5，6 節では，主定理のためのアルゴリズム，その正しさ，およびその実行時間の解析について述べる．

2. 準備

$G = (V, E)$ を頂点集合が V，辺集合が E であるような有向グラフとし，$n = |V|$ とする．本稿での有向グラフは**単純**，つまり自己ループを含まず，任意の相違なる 2 頂点 $u, v \in V$ において，有向辺 (u, v) は高々 1 つしか E に含まれないとする（ただし $(u, v), (v, u) \in E$ であることは許す）．$U \subseteq V$ によって誘導される G の部分グラフを $G[U]$ と表す．頂点 $v \in V$ において，$N^-{}_G(v) = \{u \in V : (u, v) \in E\}$ とし，$d^-{}_G(v) = |N^-{}_G(v)|$ とする．また，頂点集合 $U \subseteq V$ において $N^-{}_G(U) = \bigcup_{v \in U} N^-{}_G(v) \setminus U$，$d^-{}_G(U) = |N^-{}_G(U)|$ とする．さらに，$U \cup N^-{}_G(U)$ を $N^-{}_G[U]$ で表す．辺の向きを逆に見ることにより，$N^+{}_G$ および $d^+{}_G$ の記法を同様に定義する．以降では，文脈から対象のグラフ G 明らかなときは，上の記法の添え字 G を省略する．

正整数 k, b において G が (k, b) **有界**であるとは，$d^-(U) \leq k$ を満たす任意の $U \subseteq V$ において，$d^-(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たすような $v \in V \setminus U$ が高々 b 個であり，かつ $d^+(U) \leq k$ を満たす任意の $U \subseteq V$ において，$d^+(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たすような $v \in V \setminus U$ が高々 b 個であることをいう．

Pilipczuk [11] は，準完全有向グラフにおいて入り次数が k 以下であるような頂点の個数が高々 $2k + 1$ であることを示した．次の補題はその観察を一般化している．

補題 1. 任意の h 準完全有向グラフ $G = (V, E)$ は $(k, h + 2k + 1)$ 有界である．

証明． b を G が (k, b) 有界となるような最小の整数とする．このとき，(k, b) 有界の定義より，（1）$d^-(U) \leq k$ を満たす $U \subseteq V$ で，$d^-(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たす $v \in V \setminus U$ が b 個であるようなものが存在するか，または（2）$d^+(U) \leq k$ を満たす $U \subseteq V$ で，$d^+(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たす $v \in V \setminus U$ が b 個であるようなものが存在する．（1）の場合を考えるが，（2）の場合も同様である．（1）を満たす U を固定し，$d^-(U \cup \{v\}) \leq k$ を満たす $v \in V \setminus U$ からなる集合を X とする．h 準完全の定義より，$G[X]$ は少なくとも $b(b-h-1)/2$ 本の辺を含むので，$G[X]$ の平均入次数 $\sum_{v \in X} d^-(v)/b$ は

$(b-h-1)/2$ 以上である．一方，どの $v \in X$ に対しても $d^-(U \cup \{v\}) \leq k$ であるから，この平均入次数は k 以下でなければならない．したがって，$b-h-1 \leq 2k$，すなわち $b \leq h+2k+1$ を得る． □

$G=(V,E)$ を有向グラフとする．G の**パス分解**（*path decomposition*）とは, G の頂点集合の列 $P=(X_1, X_2, \dots, X_p)$ で,

(1) $\bigcup_{1 \leq i \leq p} X_i = V$，
(2) 各 $(u,v) \in E$ において $u \in X_i$ かつ $v \in X_j$ を満たす $i, j (1 \leq i \leq j \leq p)$ が存在し，
(3) 各 $u \in V$ において，$u \in X_i \cap X_j$ ならば $u \in X_k (i \leq k \leq j)$

を満たすものである．パス分解の P の**幅**（*width*）とは，$\max_{1 \leq i \leq p} |X_i| - 1$ のことであり，G の**パス幅**（*pathwidth*）とは，G が幅 k のパス分解を持つような最小の k であると定義する．

パス分解 $P=(X_1, X_2, \dots, X_p)$ が**好適である**（*nice*）とは，$X_1 = X_p = \emptyset$ であり，かつ任意の $1 \leq i \leq p-1$ について

- $X_i \subset X_{i+1}$ かつ $|X_{i+1}| = |X_i| + 1$
- $X_{i+1} \subset X_i$ かつ $|X_{i+1}| + 1 = |X_i|$

のどちらかが成り立つことを言う．G のパス幅が w であれば，G は幅 w の好適なパス分解を持つことが良く知られている．

パス幅は，次に定義する**分離鎖**によって特徴付けることができる．

$G=(V,E)$ の頂点集合の対 (A,B) が $A \cup B = V$，$N^-[A \setminus B] \subseteq A$，かつ $N^+[B \setminus A] \subseteq B$ を満たすとき，(A,B) を G の**分離対**（*separation*）と呼ぶ．分離対 (A,B) の**位数**を $|A \cap B|$ と定める．$S, T \subseteq V$ について，分離対 (A,B) が，$S \subseteq A \setminus B$ かつ $T \subseteq B \setminus A$ を満たしているとき，(A,B) を S–T **分離対**という．また，(A,B) の位数が全ての S–T 分離対の中で最小であるとき，(A,B) を**最小** S–T **分離対**という．

S–T 分離対 (A,B) が S **自明である**とは，$A \setminus B = S$ であることを，T **自明である**とは $B \setminus A = T$ であることを言う．S 自明または T 自明な S–T 分離対は**自明である**という．非自明な最小 S-T 分離対が存在するとき，対 (S,T) は**可約**であるといい，そうでないとき (S,T) は**既約**であるという．

分離対の列 $((A_0,B_0),(A_1,B_1),\dots,(A_r,B_r))$ が $A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_r \subseteq V$，$B_r \subseteq B_{r-1} \subseteq \dots \subseteq B_0 \subseteq V$ を満たすとき，この列を　**分離鎖**と呼びそれに属する分離対の最大位数 $\max_{0 \leq i \leq r} |A_i \cap B_i|$ をその**幅**という．

$C = ((A_0,B_0),(A_1,B_2),\dots,(A_r,B_r))$ を分離鎖とする．C が**密である**とは，任意の隣り合う分離対 (A_i,B_i)，(A_{i+1},B_{i+1}) について，$|A_{i+1} \setminus A_i| \leq 1$ と $|B_i \setminus B_{i+1}| \leq 1$ の少なくとも一方が成り立つことをいう．この定義は同一の分離対の繰り返しを許すことに注意する．$S,T \subseteq V$ に対して，C が S–T **分離鎖**であるとは，$B_0 = V \setminus S$ かつ，$A_r = V \setminus T$ を満たしていることをいう．S–T 分離鎖を構成する分離対は，すべて S–T 分離対であることに注意する．

分離鎖 $C = ((A_0,B_0),(A_1,B_1,),\dots,(A_r,B_r))$ と $A_r \subseteq A'_0$ かつ $B'_0 \subseteq B_r$ を満たす分離鎖 $C' = ((A'_0,B'_0),(A'_1,B'_1,),\dots,(A'_s,B'_s))$ において，(C,C') で C の後ろに C' をつなげた分離鎖，つまり，

$$(C,C') = ((A_0,B_0),\dots,(A_r,B_r),(A'_0,B'_0),\dots,(A'_s,B'_s))$$

と表す．3 つ以上の分離鎖に関しても同様に表記する．

Pilipczuk の論文 [11] で，パス分解と分離鎖について以下の観察が示されている．

観察 1 ([11])**.** 以下のことが成り立つ．

- $W=(W_1,W_2,\dots,W_r)$ を幅 k 以下のパス分解とする．このとき，$(A_i,B_i) = (\bigcup_{j \leq i} X_j, \bigcup_{i<j} X_j)$ であるような $((A_1,B_1),(A_2,B_2),\dots,(A_r,B_r))$ は幅 k 以下の $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖である．
- $((A_1,B_1),(A_2,B_2),\dots,(A_r,B_r))$ を幅 k 以下の $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖とする．このとき，$W_i = A_i \cap B_{i-1}$ であるような $W=(W_1,W_2,\dots,W_r)$ は幅 $max_{0<i \leq r}|A_i \cap B_{i-1}| - 1$ であるようなパス分解である．

補題 2. G のパス幅が k 以下であることの必要十分条件は，幅が k 以下の密な $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖が存在することである．

証明. G のパス幅が k 以下であるとき，幅が k 以下の好適なパス分割 $(X_1,X_2,\dots,X_p)$ が存在する．このとき，観察 1 より，$1 \leq i \leq p$ に対して，$(A_i,B_i) = (\bigcup_{j \leq i} X_j, \bigcup_{j>i} X_j)$ とおくと，$((A_1,B_1),(A_2,B_2),\dots,(A_p,B_p))$ は幅 k 以下のの密な $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖である．他方，幅 k の密な $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖 $((A_0,B_0),(A_1,B_1),\dots,(A_r,B_r))$ が与えられたとき，観察 1 より，$1 \leq i \leq r$ に対して，$X_i = A_i \cap B_{i-1}$ とおくと $(X_1,X_2,\dots,X_r)$ は，幅が $max_{0<i \leq r}|A_i \cap B_{i-1}| - 1$ のパス分割である．密であることより，任意の隣り合う分離対 (A_{i-1},B_{i-1})，(A_i,B_i) について，$|A_i \setminus A_{i-1}| \leq 1$ または，$|B_{i-1} \setminus B_i| \leq 1$ を満たしている．前者を満たすとき，$|A_i \cap B_{i-1}| \leq |A_{i-1} \cap B_{i-1}| + 1 = k+1$ であり，後者を満たすとき，$|A_i \cap B_{i-1}| \leq |A_i \cap B_i| + 1 = k+1$ であるので，$max_{0<i \leq r}|A_i \cap B_{i-1}| - 1 \leq k$ となる． □

3. 補題

この節では，アルゴリズムの設計と正しさの証明に有用な補題と観察をいくつか与える．すべての補題において，有向グラフ $G=(V,E)$ が暗黙に仮定されている．

S–T 分離鎖 $C = ((A_0,B_0),(A_1,B_1),\dots,(A_r,B_r))$ が**好適である**とは任意の $0 \leq i < r$ について，$|A_{i+1} \setminus A_i| \leq 1$ かつ $|B_i \setminus B_{i+1}| \leq 1$ であることをいう．この定義は密な

分離鎖と同様に，同じ S–T 分離対の繰り返しを許している．また，好適な S–T 分離鎖は明らかに密な S–T 分離鎖であるといえる．S–T 分離鎖 C が**タイト**であるとは，$A_0 = N^-[S]$ かつ $B_r = N^+[T]$ であることをいう．

補題 3. 幅 k 以下の密な S–T 分離鎖 $((A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_r, B_r))$ が存在するとき，幅 k 以下のタイトでありかつ好適な S–T 分離鎖が存在する．

証明． S–T 分離鎖 $C = ((A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_r, B_r))$ において，$\delta(C)$ を

$$\begin{aligned}\delta(C) &= |A_0 \setminus N^-[S]| + |B_0 \setminus N^+[T]| \\ &\quad + \sum_{0 \le i < r} (\max\{0, |A_{i+1} \setminus A_i| - 1\}) \\ &\quad + \sum_{0 \le i < r} (\max\{0, |B_i \setminus B_{i+1}| - 1\})\end{aligned}$$

と定義する．ここで，C を幅 k 以下の S–T 分離鎖の中で $\delta(C)$ が最小であるものとする．もし，$\delta(C) = 0$ であれば C はタイトであり，かつ好適であるので，証明を終了する．以下では $\delta(C) > 0$ を仮定して矛盾を導く．まず，$v \in A_0 \setminus N^-[S]$ がある場合について考える．このとき，$(A_0 \setminus \{v\}, B_0)$ を C の先頭に追加したものを C' とすると，C' は密な S–T 分離鎖である．また，$(A_0 \setminus \{v\}, B_0)$ の位数は (A_0, B_0) の位数よりも小さいので C' の幅は k 以下である．明らかに $\delta(C') = \delta(C) - 1$ であるので，$\delta(C)$ が最小であることに矛盾する．同様にして，$v \in B_r \setminus N^+[T]$ である場合についても矛盾が導かれる．

最後に $0 \le i < r$ について，$|A_{i+1} \setminus A_i| \ge 2$ である場合を考える．ここで，$v \in A_{i+1} \setminus A_i$ について，$(A_i \cup \{u\}, B_i)$ は S–T 分離対であり，密である条件から，$|B_i \setminus B_{i+1}| \le 1$ であるため，$(A_i \cup \{v\}, B_i)$ の位数は (A_{i+1}, B_{i+1}) の位数以下である．よって，C の (A_i, B_i) と (A_{i+1}, B_{i+1}) の間に $(A_i \cup \{v\}, B_i)$ を追加したものを C' とすると，C' は幅 k 以下の密な S–T 分離鎖である．ここで

$$\begin{aligned}\delta(C') &= \delta(C) \\ &\quad - \max\{0, |A_{i+1} \setminus A_i| - 1\} \\ &\quad - \max\{0, |B_i \setminus B_{i+1}| - 1\} \\ &\quad + \max\{0, |\{v\}| - 1\} \\ &\quad + \max\{0, |B_i \setminus B_i| - 1\} \\ &\quad + \max\{0, |A_{i+1} \setminus (A_i \cup \{v\})| - 1\} \\ &\quad + \max\{0, |B_i \setminus B_{i+1}| - 1\} \\ &\le \delta(C) - \max\{0, |A_{i+1} \setminus A_i| - 1]\} \\ &\quad + \max\{0, |A_{i+1} \setminus (A_i \cup \{v\})| - 1\}\end{aligned}$$

であり，$|A_{i+1} \setminus A_i| > 1$ であることから

$$\delta(C') \le \delta(C) - 1$$

となる．よって $\delta(C)$ が最小であることに矛盾する．同様にして $|B_i \setminus B_{i+1}| \ge 2$ である場合についても矛盾が導かれる． □

V の部分集合 $S, T \subseteq V$ について，幅 k 以下の密な S–T 分離鎖が存在するとき，(S, T) は k **分離可能**であるという．また，$N^-[S] \cap T = \emptyset$ （したがって，$S \cap N^+[T] = \emptyset$)，$d^-(S) \le k$，かつ $d^+(T) \le k$ であるとき，(S, T) は**弱 k 分離可能**であるという．次の観察は自明であろう．

観察 2. (S, T) が弱 k 分離可能であることは，(S, T) が k 分離可能であるための必要条件である．

補題 4. 弱 k 分離可能な対 (S, T) が $|V \setminus (S \cup T)| \le k + 1$ を満たすとき，(S, T) は k 分離可能である．

証明． 証明は背理法による．補題が成り立たないと仮定し，弱 k 分離可能な対 (S, T) で，$|V \setminus (S \cup T)| \le k+1$ であるにもかかわらず k 分離可能でないものを，$|V \setminus (S \cup T)|$ が最小になるように選ぶ．もし，$V \setminus (S \cup T) = N^-(S) = N^+(T)$ であれば，$(N^-[S], N^+[T])$ は，単独で幅 k 以下の密な S–T 分離鎖を構成するので，これはあり得ない．したがって，ある $v \in V \setminus (S \cup T)$ で，(1) $v \notin N^-(S)$ または (2) $v \notin N^-(T)$ であるものが存在する．（1）の場合，$T' = T \cup \{v\}$ とおくと，$v \notin N^-(S)$ より，$N^+(T') \subseteq V \setminus (S \cup T \cup \{v\})$ であるから，$|N^+(T')| \le k$ が成り立つ．また，$v \notin N^-(S)$ より $N^-[S] \cap T' = \emptyset$ も成り立つ．よって，(S, T') は弱 k 分離可能である．$|V \setminus (S \cup T')| < |V \setminus (S \cup T)| \le k + 1$ であるので，(S, T) の選び方から，(S, T') は k 分離可能であり，幅 k 以下の密な S–T' 分離鎖 C' が存在する．C' の最後の分離対を (A, B) とおくと，$A = (V \setminus T') \subseteq (V \setminus T)$ であり $B \supseteq N^+[T'] \supseteq N^+[T]$ なので，C' の直後に $(V \setminus T, N^+[T])$ を追加してできる列 C は S–T 分離鎖である．また，C' が密でありかつ $(V \setminus T) \setminus A = \{v\}$ であるので，C も密である．さらに，C' の幅が k 以下でありかつ $(V \setminus T, N^+[T])$ の位数が $|N^+(T)| \le k$ であるので，C の幅も k 以下である．以上より，(S, T) が k 分離可能であることが結論され，仮定に矛盾する．（2）の場合も，（1）の場合と対称な議論により，矛盾が導かれる． □

上の証明は背理法の形をとっているが実質は帰納法であり，条件を満たす対 (S, T) から幅 k 以下の密な (S, T) 分離鎖を構成する手続きを与えていることに注意する．

補題 5. 対 (S, T) が k 分離可能であるとする．もし $|V \setminus (S \cup T)| \ge k + 2$ であるならば相異なる頂点 $u \in V \setminus (S \cup N^+[T])$ と $v \in V \setminus (T \cup N^-[S])$ の対で，$(S \cup \{u\}, T)$，$(S, T \cup \{v\})$，および $(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ のいずれも k 分離可能であるようなものが存在する．

証明． (S, T) は k 分離可能であるので，補題 3 より，幅 k 以下のタイトかつ好適な S–T 分離鎖 $C = ((A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_r, B_r))$ が存在する．C はタイ

トであるので，$B_r = N^+[T]$ であり，また $B_0 = V \setminus S$ である．したがって，$|B_0| \geq |T| + k + 2 \geq |B_r| + 2$ が成り立つ．$0 < i \leq r$ の範囲で $|B_{i-1} \setminus B_i| = 1$ であるような最小の i を j で表す．$B_{j-1} \setminus B_j = \{u\}$，$C' = ((A_j, B_j), (A_{j+1}, B_{j+1}), \ldots, (A_r, B_r))$ とおくと，$B_j = V \setminus (S \cup \{u\})$ であり，$A_r = V \setminus T$ であるので，C' は幅 k 以下の密な $(S \cup \{u\})$–T 分離鎖である．この u は，$B_r \setminus B_0 = V \setminus (S \cup N^+[T])$ に属すので，補題の条件を満たしている．$(S \cup \{u\}, T)$ が k 分離可能であるので，幅 k 以下のタイトかつ好適な $(S \cup \{u\})$–T 分離鎖が存在する．$|A_r| \geq |A_0 \setminus \{u\}| + 1$ であることに注意して上と対称な議論を用いることにより，頂点 $v \in V \setminus (T \cup N^-[S])$ で，$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ が k 分離可能であるものの存在が示される．幅 k 以下の密な $(S \cup \{u\})$–$(T \cup \{v\})$ 分離鎖の前に $(N^-[S], V \setminus T)$ を置いてできる分離鎖の幅は k 以下であるので，$(S, T \cup \{v\})$ もまた k 分離可能である．□

最後に，可約な対 (S, T) に対する問題の分割を可能にする補題を挙げる．

補題 6. (X, Y) を最小 S–T 分離対であるとする．このとき，任意の S–T 分離対 (A, B) について，

$$|(A \cap X) \cap (B \cup Y)| \leq |A \cap B|$$
$$|(A \cup X) \cap (B \cap Y)| \leq |A \cap B|$$

が成り立つ．

証明． まず，$|A \cap B| + |X \cap Y| = |(A \cap X) \cap (B \cup Y)| + |(A \cup X) \cap (B \cap Y)|$ である．これは任意の頂点 v に対して左辺で v が数えれれる回数と右辺で v が数えられる回数が一致することからわかる．

(X, Y) と (A, B) がともに S–T 分離対であるので，$((A \cap X), (B \cup Y))$ と $((A \cup X), (B \cap Y))$ はともに S–T 分離対である．(X, Y) は S–T 分離対の中で位数が最小であるので，$|X \cap Y| \leq |(A \cup X) \cap (B \cap Y)|$ である．よって，$|(A \cap X) \cap (B \cup Y)| \leq |A \cap B|$ がいえる．

また，$|X \cap Y| \leq |(A \cap X) \cap (B \cup Y)|$ でもあるので，$|(A \cup X) \cap (B \cap Y)| \leq |A \cap B|$ もいえる □

補題 7. (X, Y) を最小 S–T 分離対とする．このとき，(S, T) が k 分離可能であるならば，$(S, Y \setminus X)$ および $(X \setminus Y, T)$ はどちらも k 分離可能である．

証明． (S, T) は k 分離可能であるので，幅が k 以下の密な S–T 分離鎖が存在する．そのような分離鎖を $C = ((A_0, B_0), (A_1, B_1), \ldots, (A_r, B_r))$ とする．このとき，$B_0 = V \setminus S$，$A_r = V \setminus T$ である．C は S–T 分離鎖であるので，$C' = ((A_0 \cap X, B_0 \cup Y), (A_1 \cap X, B_1 \cup Y), \ldots, (A_r \cap X, B_r \cup Y))$ も S–T 分離鎖である．

ここで，C は密な分離鎖であり，かつ $N^-[S] \subseteq X$ かつ $N^+[T] \subseteq Y$ を満たしている．よって，$B_0 \cup Y = (V \setminus S) \cup Y = (V \setminus S)$ であり，$A_r \cap X = (V \setminus T) \cap X = X = V \setminus (Y \setminus X)$ である．また，(X, Y) は最小 S–T 分離対であるので，$X \cap Y = N^-(X \setminus Y) = N^+(Y \setminus X)$ である．

よって，C' は，密な S–$(Y \setminus X)$ 分離鎖である．補題 6 より，$0 \leq i \leq r$ に対して $|(A_i \cap X) \cap (B_i \cup Y)| \leq |A_i \cap B_i|$ であるので，その幅は k 以下である．

$((A_0 \cup X, B_0 \cap Y), (A_1 \cup X, B_1 \cap Y), \ldots, (A_r \cup X, B_r \cap Y))$ についても同様の議論より，密な $(X \setminus Y)$–T 分離鎖であり，その幅は k 以下であることが示せる．□

4. アルゴリズム

有向グラフ $G = (V, E)$ と正整数 k を入力し，G のパス幅が k 以下であるかどうかを判定するアルゴリズムを記述する．答えが肯定的であるとき，アルゴリズムは幅が k 以下の $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖を構築する．

以下のアルゴリズム記述では，入力のグラフ G と正整数 k を固定する．再帰関数 SC は，弱 k 分離可能な対 (S, T) に対して (S, T) が k 分離可能であるかを判定し，もし可能であれば幅 k 以下の密な S–T 分離鎖を，そうでなければ特別な値 FAILURE を返す．関数 SC のなかでは，対 (S, T) が可約であるかを検査し，可約な場合には非自明な最小分離対を求める必要がある．S も T も空でないときにはこれは，最大流アルゴリズムによって実装することができる．S が空である場合には，$(\emptyset, V)$ は位数 0 の自明な最小 S–T 分離対である．この場合に，非自明な最小 S–T 分離対が存在するかどうかは，強連結成分分解アルゴリズムによって判定することができる．T が空の場合も同様である．

Algorithm 1 SC(S, T)

if $|V \setminus (S \cup T)| \leq k + 1$ **then**
  return 補題 4 によって構築される幅 k 以下の S–T 分離鎖
else if (S, T) が可約である． **then**
  SC(S, T)-分割の処理を行う．
else if $d^-(S) = d^+(T)$ **then**
  SC(S, T)-等しいの処理を行う．
else if $d^-(S) < d^+(T)$ **then**
  SC(S, T)-小さいの処理を行う．
else
  SC(S, T)-大きいの処理を行う．
end if

Algorithm 2 SC(S, T)-分割

(X, Y) を非自明な最小 S–T 分離対とする．
SC$(S, Y \setminus X)$ と SC$(X \setminus Y, T)$ を呼び出す．
if どちらかの結果が FAILURE である **then**
  return FAILURE
end if
SC$(S, Y \setminus X)$ の返した分離鎖を C，SC$(X \setminus Y, T)$ の返した分離鎖を C' とする．
return $(C, (X, Y), C')$．

対 (S,T) が既約である場合には，補題 5 に基づいて，解の可能性を探索する．

Algorithm 3 SC(S,T)-等しい

```
for d⁻(S ∪ {u}) ≤ k である各 u ∈ V \ (S ∪ N⁺[T]) と
  d⁺(T ∪ {v}) ≤ k である各 v ∈ V \ (N⁻[S] ∪ T ∪ {u}) do
    SC(S ∪ {u}, T ∪ {v}) を呼び出す.
    if 結果が分離鎖 C である then
        return ((N⁻[S], V \ S), C, (V \ T, N⁺[T])).
    end if
end for
return FAILURE
```

Algorithm 4 SC(S,T)-小さい

```
for d⁻(S ∪ {u}) ≤ k である各 u ∈ V \ (S ∪ N⁺[T]) do
    SC(S ∪ {u}, T) を呼び出す.
    if 結果が分離鎖 C である then
        return ((N⁻[S], V \ S), C).
    end if
end for
return FAILURE
```

Algorithm 5 SC(S,T)-大きい

```
for d⁺(T ∪ {v}) ≤ k である各 v ∈ V \ (N⁻[S] ∪ T) do
    SC(S, T ∪ {v}) を呼び出す.
    if 結果が分離鎖 C である then
        return (C, (V \ T, N⁺[T])).
    end if
end for
return FAILURE
```

5. 正しさの証明

補題 8. 弱 k 分離可能な対 (S,T) に対する呼び出し *SC*(S,T) は，(S,T) が k 分離可能であるとき幅 k 以下の密な S–T 分離鎖を，そうでないときは *FAILURE* を返す．

証明． $|V \setminus (S \cup T)|$ についての帰納法で証明する．基底は $|V \setminus (S \cup T)| \le k+1$ のときであり，補題 4 より，SC(S,T) は正しい値を返す．

次に，$|V \setminus (S \cup T)| \ge k+2$ のときを考える．まず (S,T) が可約であるとする．このとき，非自明な最小 S–T 分離対 (X,Y) に対して，SC$(S, Y \setminus X)$ と SC$(X \setminus Y, T)$ が呼ばれる．(X,Y) が非自明な最小 S–T 分離対であることから，$Y \setminus X$ は S にも T にも属さない頂点を要素として持ち，$X \setminus Y$ も同様である．したがって $|V \setminus (S \cup (Y \setminus X))| < |V \setminus (S \cup T)|$ かつ $|V \setminus ((X \setminus Y) \cup T)| < |V \setminus (S \cup T)|$ が成り立つ．もし，(S,T) が k 分離可能であるならば，補題 7 により，$(S, Y \setminus X)$ と $(X \setminus Y, T)$ はともに k 分離可能であり，したがって弱 k 分離可能でもある．このとき，帰納法の仮定により，SC$(S, Y \setminus X)$ と SC$(X \setminus Y, T)$ はそれぞれ幅 k 以下の密な S–$(Y \setminus X)$ 分離鎖 $C = ((A_0,B_0),(A_1,B_1),\ldots,(A_p,B_p))$ と幅 k 以下の密な $(X \setminus Y)$–T 分離鎖 $C' = ((A'_0,B'_0),\ldots,(A'_q,B'_q))$ を返す．このとき，$A_p = V \setminus (Y \setminus X) = X$ かつ $N^+[Y \setminus X] \subseteq B_p$ であり $N^-[X \setminus Y] \subseteq A'_0$ かつ $B'_0 = V \setminus (X \setminus Y) = Y$ であるので，SC(S,T) の返す分離鎖 $(C, (X,Y), C')$ は幅 k 以下の密な S–T 分離鎖である．一方，(S,T) が k 分離可能でなければ，$(S, Y \setminus X)$ と $(X \setminus Y, T)$ の少なくとも一方は k 分離可能ではなく，したがって，SC(S,T) は FAILURE を返す．

次に (S,T) が既約であり，SC(S,T)-等しいの処理が行われる場合を考える．この処理においては，$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ が弱 k 分離可能であるような $u \in V \setminus (S \cup N^+[T])$ と $v \in V \setminus (N^-[S] \cup T)$ の対のすべてに対して，SC$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ が呼ばれる．もし (S,T) が k 分離可能であれば，補題 7 により，そのような u と v の対のなかで，$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ が k 分離可能であるようなものが存在する．帰納法の仮定より，そのような u と v の対に対して，SC$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ は幅 k 以下の密な $(S \cup \{u\})$–$(T \cup \{v\})$ 分離鎖を返す．このとき，SC(S,T) の返す分離鎖は，この分離鎖の先頭に $(N^-[S], V \setminus S)$ を追加し，後尾に $(V \setminus T, N^+[T])$ を追加したものであるので，幅 k 以下の密な S–T 分離鎖である．一方，(S,T) が k 分離可能でないならば，SC$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ の呼び出しのどれについても，$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ が k 分離可能ではないので，帰納法の仮定により，FAILURE が返る．したがって，SC(S,T) も正しい値 FAILURE を返す．

(S,T) が既約であり，SC(S,T)-小さいまたは SC(S,T)-大きいの処理が行われる場合も同様である． □

系 1. 呼び出し *SC*$(\emptyset,\emptyset)$ は，G のパス幅が k 以下のとき密な $\emptyset$–$\emptyset$ 分離鎖を返し，そうでないとき *FAILURE* を返す．

6. 実行時間の解析

関数 SC の入力となる対 (S,T) の「大きさ」を表現するために，ふたつの関数 $\gamma(S,T)$ および $\mu(S,T)$ を定義する．まず，$\gamma(S,T)$ は，最小 S–T 分離対の位数を表す．また，$\mu(S,T)$ は

$$\mu(S,T) = 2|V \setminus (N^-[S] \cup N^+[T])| + |N^-(S) \Delta N^+(T)|$$

によって定義する．ここで，$X \Delta Y$ は，X と Y の対称差 $(X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ を表す．

補題 9. (X,Y) を最小 S–T 分離対とする．このとき，

$$\mu(S, Y \setminus X) + \mu(X \setminus Y, T) = \mu(S,T)$$

が成り立つ．

証明． (X,Y) が最小 S–T 分離対であることから，$N^-(X \setminus Y) = N^+(Y \setminus X) = X \cap Y$ であり，したがって $N^-[X \setminus Y] = X$，$N^+[Y \setminus X] = Y$ である．互いに素な 3 つの集合 C_0, C_1, C_2 を

$$
\begin{aligned}
C_0 &= X \cap Y \setminus (N^-(S) \cup N^+(T)) \\
C_1 &= X \cap Y \cap (N^-(S) \setminus N^+(T)) \\
C_2 &= X \cap Y \cap (N^+(T) \setminus N^-(S))
\end{aligned}
$$

によって定義する．このとき，$(X \cap Y) \setminus N^+(T) = C_0 \cup C_1$ であることや $N^+(T) \cap (X \setminus Y) = \emptyset$ であるから $N^+(T) \setminus (X \cap Y) = N^+(T) \setminus X$ が成り立つことを用いて，

$$
\begin{aligned}
\mu(X \setminus Y, T) &= 2|V \setminus (X \cup N^+[T])| + |(X \cap Y)\Delta N^+(T)| \\
&= 2|V \setminus (X \cup N^+[T])| \\
&\quad +|C_0| + |C_1| + |N^+(T) \setminus X|
\end{aligned}
$$

を得る．同様にして，

$$
\begin{aligned}
\mu(S, Y \setminus T) &= 2|V \setminus (N^-[S] \cup Y)| + |N^-(S)\Delta(X \cap Y)| \\
&= 2|V \setminus (N^-[S] \cup Y)| \\
&\quad +|C_0| + |C_2| + |N^-(S) \setminus Y|
\end{aligned}
$$

を得る．また

$$
\begin{aligned}
|V \setminus (N^-[S] \cup N^+[T])| &= |V \setminus (Y \cup N^-[S])| \\
&\quad +|V \setminus (X \cup N^+[T])| + |C_0|
\end{aligned}
$$

および

$$
\begin{aligned}
|N^-(S)\Delta N^+(T)| &= |C_1| + |C_2| \\
&\quad +|N^-(S) \setminus Y| + |N^+(T) \setminus X|
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって，

$$
\begin{aligned}
\mu(S,T) &= 2|V \setminus (N^-[S] \cup N^+[T])| + |N^-(S)\Delta N^+(T)| \\
&= 2|V \setminus (Y \cup N^-[S])| + 2|(V \setminus (X \cup N^+[T])| \\
&\quad +2|C_0| + |C_1| + |C_2| \\
&\quad +|N^-(S) \setminus Y| + |N^+(T) \setminus X| \\
&= \mu(S, Y \setminus X) + \mu(X \setminus Y, T)
\end{aligned}
$$

であり，補題の等式を得る．□

補題 10. (X, Y) を非自明な S–T 分離対であるとき，$\mu(S, Y \setminus X) \geq 1$ かつ $\mu(X \setminus Y, T) \geq 1$ が成り立つ．

証明．対称性より，最初の不等式を証明すれば十分である．(X, Y) は非自明な S–T 分離対であるから，$(X \setminus Y) \setminus S$ に属す頂点 v が存在する．分離対の定義より，$N^+[Y \setminus X] \subseteq Y$ であるから，$v \notin N^+[Y \setminus X]$ が成り立つ．$v \in N^-(S)$ であれば，$v \in N^-(S)\Delta N^+(Y \setminus X)$ であり，$v \notin N^-(S)$ であれば，$v \in V \setminus (N^-[S] \cup N^+[Y \setminus X])$ である． したがって，いずれの場合にも

$$
\begin{aligned}
\mu(S, Y \setminus X) &= 2|V \setminus (N^-[S] \cup N^+[Y \setminus X])| \\
&\quad +|N^-(S)\Delta N^+(Y \setminus X)| \\
&\geq 1
\end{aligned}
$$

を得る．□

以下の解析では，$R(S,T)$ によって，$\mathrm{SC}(S,T)$ を呼び出すことで引き起こされる呼び出し $\mathrm{SC}(S',T')$($\mathrm{SC}(S,T)$ 自身を含む) のうち，$|V \setminus (S \cup T)| \geq k+2$ であるようなものの個数を表す．また，$\mu'(S,T) = \max\{0, 2\mu(S,T) - 1\}$ によって μ' を定義する．

補題 11. 入力グラフ G が (k,b) 有界であるとき，弱 k 分離可能な対 (S,T) のそれぞれに対して，

$$
R(S,T) \leq \mu'(S,T) \cdot b^{2(k-\gamma(S,T))} \tag{1}
$$

が成り立つ．

証明．証明は，再帰の構造に基づく帰納法による．

呼び出し $\mathrm{SC}(S,T)$ が，$|V \setminus (S \cup T)| \leq k+1$ であるためにそれ以上再帰をしないときには，$R(S,T) = 0$ であるので，不等式（1）が成り立つ．$\mu(S,T) = 0$ のときは，$V \setminus (S \cup T) = N^-(S) = N^+(T)$ であるので，この場合が該当することに注意する．

次に呼び出し $\mathrm{SC}(S,T)$ が「分割」の処理において，$\mathrm{SC}(S,T')$ と $\mathrm{SC}(S',T)$ を呼び出す場合を考える．ここで，(S,T) の非自明な最小分離対 (X,Y) に対して，$S' = X \setminus Y$ であり，$T' = Y \setminus X$ である．このとき，補題 9 により，$\mu(S,T) = \mu(S,T') + \mu(S',T)$ が成り立つ．さらに，補題 10 により $\mu(S,T') \geq 1$ かつ $\mu(S',T) \geq 1$ であるので，

$$
\begin{aligned}
\mu'(S,T) &= 2\mu(S,T) - 1 \\
&= (2\mu(S,T') - 1) + (2\mu(S',T) - 1) + 1 \\
&= \mu'(S,T') + \mu'(S',T) + 1
\end{aligned}
$$

を得る．また，S–T' 分離対のどれもが S–T 分離対であることから，$\gamma(S,T') \geq \gamma(S,T)$ が成り立ち，同様に $\gamma(S',T) \geq \gamma(S,T)$ が成り立つ．帰納法の仮定を対 (S,T') と (S',T) に適用することにより，

$$
\begin{aligned}
R(S,T) &= 1 + R(S,T') + R(S',T) \\
&\leq 1 + (\mu'(S,T') + \mu'(S',T)) \cdot b^{2(k-\gamma(S,T))} \\
&\leq 1 + (\mu'(S,T) - 1) \cdot b^{2(k-\gamma(S,T))} \\
&\leq \mu'(S,T) \cdot b^{2(k-\gamma(S,T))}
\end{aligned}
$$

すなわち，不等式（1）が成り立つ．

次に，(S,T) が既約であり $d^-(S) = d^+(T)$ である場合を考える．このとき，「等しい」の処理によって，$(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$ が弱 k 分離可能であるような $u \in V \setminus (S \cup N^+[T])$ と $v \in V \setminus (N^-[S] \cup T)$ の対のすべてに対して，$\mathrm{SC}(S \cup \{u\}, T \cup \{v\})$

が呼ばれる．グラフは (k, b) 有界であるので，そのような u と v の対の個数は b^2 以下である．帰納法の仮定により，u と v の各対に対して，

$$\begin{aligned} &R(S \cup \{u\}, T \cup \{v\}) \\ &\quad \leq \mu'(S \cup \{u\}, T \cup \{v\}) \cdot b^{2(k-\gamma(S\cup\{u\}, S\cup\{v\}))} \end{aligned}$$

が成り立つ．(S, T) が既約であるので，$\gamma(S \cup \{u\}, T \cup \{v\}) > \gamma(S, T)$ が成り立つ．また $\mu(S \cup \{v\}, T \cup \{v\}) < \mu(S, T)$ および $\mu(S, T) > 0$ より，$\mu'(S \cup \{v\}, T \cup \{v\}) < \mu'(S, T)$ が成り立つ．したがって，

$$\begin{aligned} R(S, T) &\leq 1 + \sum_{u,v} R(S \cup \{u\}, T \cup \{v\}) \\ &\leq 1 + b^2 \cdot (\mu'(S, T) - 1) \cdot b^{2(k-\gamma(S,T)-1)} \\ &\leq \mu'(S, T) \cdot b^{2(k-\gamma(S,T))} \end{aligned}$$

すなわち，不等式（1）が成り立つ．

(S, T) が既約でありかつ $d^-(S) > d^+(T)$ または $d^-(S) < d^+(T)$ である場合の解析も同様である． □

定理 2 の証明：与えられた有向グラフ G と正整数 k に対して，$\mathrm{SC}(\emptyset, \emptyset)$ を実行することによって，G のパス幅が k 以下であるかを判定することができる．この呼び出しによって発生する SC の呼び出しで基底を除いたものの回数は $R(\emptyset, \emptyset) \leq b^{2k}n$ である．基底以外の SC のそれぞれの実行において，再帰呼び出しに費やされる部分を除いた実行時間は $n^{O(1)}$ である．また，SC の呼び出しのうち，基底であるものの回数は，基底以外の呼び出し一回あたりたかだか b である．故に，$\mathrm{SC}(\emptyset, \emptyset)$ の実行に要する時間の合計は $b^{2k}n^{O(1)}$ である．

参考文献

[1] H.L. Bodlaender: A Tourist Guide Through Treewidth. Acta Cybernetica 11, 1–23 (1993)

[2] H.L. Bodlaender: A linear-time algorithm for finding tree-decompositions of small treewidth. SIAM Journal on Computing 25(6), 1305–1317 (1996)

[3] H.L. Bodlaender and T. Kloks: Efficient and constructive algorithms for the pathwidth and treewidth of graphs. Journal of Algorithms 21(2), 358–402 (96)

[4] M. Chudnovsky, A. Fradkin, P.D. Seymour: Tournament immersion and cutwisth. Journal of Combinatorial Theory, Series B 102(1), 93–101 (2012)

[5] M. Chudnovsky, P.D. Seymour: A well-quasi-order for tournaments. Journal of Combinatorial Theory, Series B 101(1), 47–53 (2011)

[6] F.V. Fomin, M. Pilipczuk: Jungles, bundles, and fixed-parameter tractability. In: Proceedings of 24th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (SODA2013), pp. 396–413 (2013)

[7] T. Kashiwabara and T. Fujisawa: NP-completeness of the problem of finding a minimum-clique-number interval graph containing a given graph as a subgraph. In: Proceedings of International Symposium on Circuits and Systems, pp. 657–660 (1979)

[8] I. Kim, P.D. Seymour: Tournament minors. CoRR. abs/1206.3135 (2012)

[9] K. Kitsunai, Y. Kobayashi, K. Komuro, H. Tamaki, T. Tano: Computing directed pathwidth in $O(1.89^n)$ time. In: Proceedings of the 7th International Symposium on Parameterized and Exact Computation (IPEC2012), pp. 182–193 (2012)

[10] H. Nagamochi: Linear layouts in submodular systems. In: Proceedings of the 23rd Internal Symposium on Algorithms and Computation (ISAAC2012), pp. 475–484 (2012)

[11] M. Pilipczuk: Computing cutwidth and pathwidth of semi-complete digraphs via degree orderings. In: Proceedings of the 30th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2013), pp. 197–208 (2013)

[12] N. Robertson, P.D. Seymour: Graph minors. I. Excluding a forest. Journal of Combinatorial Theory, Series B 35(1), 39–61 (1983)

[13] N. Robertson, P.D. Seymour: Graph minors Ⅷ. The disjoint paths problem. Journal of Combinatorial Theory, Series B 63(1), 65–110 (1995)

[14] N. Robertson, P.D. Seymour: Graph minors XX. Wagner's conjecture. Journal of Combinatorial Theory, Series B 92(2), 325–257 (2004)

[15] H. Tamaki: A polynomial time algorithm for bounded directed pathwidth. In: Proceedings of 37th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG2011), pp. 331-342 (2011)

[16] B. Yang, Y. Cao: Digraph searching, directed vertex separation and directed pathwidth. Discrete Applied Mathematics 156(10), 1822–1837 (2008)