

パリティハミルトン閉路問題

西山 宏¹ 小林 佑輔² 山内 由紀子¹ 来嶋 秀治¹ 山下 雅史¹

概要：本論文では、ハミルトン閉路 (HC) 問題に対し、**パリティハミルトン閉路 (PHC) 問題** を導入する。PHC はグラフの全ての頂点を奇数回訪問する巡回路であり、PHC 問題はグラフに PHC が存在するかを判定する問題である。本論文では、辺の通過回数の上限を z としたとき、PHC 問題は $z \geq 4$ で \mathcal{P} 、 $z \leq 3$ で \mathcal{NP} -完全となることを示す。一方、 $z = 3$ のとき、4-辺連結グラフに対して PHC 問題は \mathcal{P} であり、2-辺連結グラフに対しては \mathcal{NP} -完全である。そこで 2-辺連結グラフに対する詳細な考察を行い、 $C_{\geq 5}$ -free グラフ、 P_6 -free グラフに対して $z = 3$ の場合に PHC 問題が \mathcal{P} に属することを示す。これらのグラフクラスに対し、HC 問題は \mathcal{NP} -完全である。PHC 問題は、 \mathcal{NP} -完全問題である HC 問題と \mathcal{P} である T -join との関係を見るための新しいアプローチとなり得る。これが本問題を導入する動機である。

キーワード：ハミルトン閉路問題、 T -join、グラフファクター

1. はじめに

ハミルトン閉路 (HC) 問題はよく知られた \mathcal{NP} -完全問題である。本論文では、HC 問題の制約を緩めた問題として、**パリティハミルトン閉路 (PHC) 問題** を調査する。PHC はグラフの全ての頂点を奇数回訪問する巡回路であり、PHC 問題はグラフに PHC が存在するかを判定する問題である。HC と異なり、PHC は同じ辺を 2 度以上通過することが許される点に注意する。全ての頂点を偶数回訪問する巡回路の存在性は明らかである (全域木を構成し、探索を 2 回行えばよい)。

Brigham ら [3] は PHC 問題に非常によく似た問題を議論しており、任意のグラフに対して全頂点を奇数回訪問する歩道を、深さ優先探索を用いて構成する線形時間アルゴリズムを提案した。^{*1}我々の知る限り、PHC 問題に関連した結果は [3] の他にはない。

PHC 問題は HC の制約を緩和した問題であり、 \mathcal{NP} -完全問題である HC 問題と多項式時間で計算可能である T -join (ある種のマッチングの一般化) との関係性を考察する新しいアプローチとなり得ると考えられる。これが本問題を導入する動機である。巡回セールスマン問題 (TSP) とマッチング、あるいは even factor との関係については、先

表 1 PHC 問題の時間計算量.

辺の通過回数の上限 z	計算量
$z \geq 4$	\mathcal{P} (定理 3.1)
$z = 3$	\mathcal{NP} -完全 (定理 3.6) \Rightarrow 表 2
$z = 2$	\mathcal{NP} -完全 (定理 3.5)
$z = 1$	\mathcal{NP} -完全 (定理 3.4)

行研究がある (e.g., [1], [12]).

本論文でははじめに、各辺を高々 $z = 4$ 回まで通過してよいとき、PHC 問題が \mathcal{P} に属することを示す。より正確には、グラフ G が PHC をもつための必要十分条件が、 G が非二部グラフであるか頂点数が偶数である、となることを示す。さらに、充分性の証明の中で、PHC を構成するための T -join を用いた線形時間アルゴリズムを与える。一方、 $z = 1, 2, 3$ に対しては、PHC 問題が \mathcal{NP} -完全となることを示す。^{*2}

$z = 3$ の場合を見ると、PHC 問題は 2-辺連結グラフに対して \mathcal{NP} -完全となる一方で、4-辺連結グラフに対しては \mathcal{P} となる。3-辺連結グラフに対する時間計算量はわかっていない (表 2)。

そこで我々は 3-辺連結グラフに対する $z = 3$ の PHC 問題に注目し、これに対する深い考察を与える。その考察の中で、**万能性**の概念を導入する。万能性はグラフが PHC をもつための 1 つの十分条件である。万能性に似た概念として、Catlin [4] が導入した *collapsible* の概念がある。Catlin

^{*2} これらの結果の間には、因果関係がないことに注意する。例えば、 $z = 3$ の PHC 問題が \mathcal{NP} -完全であることは、 $z = 2$ の PHC 問題が \mathcal{NP} -完全であることとは無関係である。

¹ 九州大学
Kyushu University

² 東京大学
The University of Tokyo

^{*1} Brigham らの問題では歩道として始点と終点が異なるものを許しており、我々の問題とは少し異なっている。

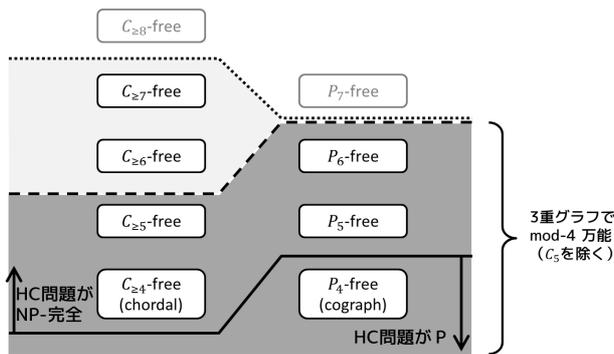


図 1 $C_{\geq 5}$ -free グラフ, P_6 -free グラフは万能である. $C_{\geq 6}$ -free グラフと $C_{\geq 7}$ -free グラフも万能であると思われるが, $C_{\geq 8}$ -free グラフ, P_7 -free グラフは万能ではなさそうである.

は全域 Euler 部分グラフを調べる意味で, この概念を導入している. 万能性は, collapsible の一般化に相当する.

本論文ではグラフが万能であるためのいくつかの必要条件, 十分条件を与え, それを用いていくつかのグラフクラスに属すグラフが万能であることを示す. はじめに, 2-辺連結弦グラフ ($C_{\geq 4}$ -free^{*3}, すなわち長さ 4 以上の閉路を誘導部分グラフにもたないグラフ) である. 記法は 2 節を参照) が万能であることを示す. 二部グラフは万能とならないため, 二部グラフに対しても万能性に対応する概念である二部万能性を定義し, 2-辺連結弦二部グラフが二部万能であることを示す. さらに, 2-辺連結 cograph (P_4 -free), 2-辺連結 $C_{\geq 5}$ -free グラフが万能であることを示す. 万能でないグラフも存在し, 例えば C_5 は反例の 1 つである. 一方, C_5 を除く 2-辺連結 P_6 -free グラフは万能である (図 1). 結果として, 2-辺連結 $C_{\geq 5}$ -free または P_6 -free グラフ G に対しては, 辺を高々 3 回までしか使わない PHC が存在するための必要十分条件が G が非二部グラフであるか, G が奇閉路をもつことであることが示せる. これに対し, HC 問題は $C_{\geq 4}$ -free グラフ, P_5 -free グラフにおいて NP-完全である.

本論文の構成は次の通りである. 2 節では, 記法と PHC 問題の定義を行う. 3 節では, z の値を変化させたときの PHC 問題の時間計算量について考察する. 4 節では, $z = 3$ の PHC 問題について議論する.

表 2 $z = 3$ の PHC 問題の時間計算量.

辺連結度	計算量	詳細な解析
4-辺連結	\mathcal{P} (定理 4.1)	
3-辺連結	未解決	図 1 (4 節)
2-辺連結	NP-完全 (定理 3.6)	
1-辺連結	NP-完全 (2-辺連結の場合から)	2-辺連結の場合に帰着 (命題 4.12, 4.13)

*3 通常, $C_{\geq \ell}$ ではなく " $C_{n+\ell}$ " と書くことが多い.

2. 準備

2.1 記法と定義

頂点集合 V と辺集合 E から成る連結無向グラフを $G = (V, E)$ とする. V, E をそれぞれ $V(G), E(G)$ と書くことがある. グラフ H が $V(H) \subseteq V(G)$ かつ $E(H) \subseteq E(G)$ を満たすとき, H は G の部分グラフであるという. 特に $V(H) = V(G)$ であるとき, H は G のファクターであるという.

G の頂点 v に対して, $N_G(v), \delta_G(v)$ をそれぞれ v の隣接頂点の集合, 接続辺の集合とする. 考えているグラフ G が明らかである場合, 単に $N(v), \delta(v)$ と書くことがある. $d_G(v) = |\delta_G(v)|$ を G における v の次数と呼び, 混乱がなければ単に $d(v)$ と書く. G と $S \subseteq V$ に対し, G から S に属す頂点とその接続辺を全て取り除いてできるグラフを $G - S$ と書く. 同様に, G と $F \subseteq E$ に対し, G から F に属す辺を全て取り除いてできるグラフを $G - F$ と書く.

$C_l(P_l)$ を l 頂点から成る閉路 (パス) とする. グラフ G が P_l を誘導部分グラフにもたないとき, G を P_l -free であるという. P_4 -free グラフのクラスは, cograph のクラスと等価であることが知られている. 同様に, G が C_l を誘導部分グラフにもたないとき, G を C_l -free であるという. G が任意の $m \geq l$ に対して C_m -free であるとき, G を $C_{\geq l}$ -free であるという. $C_{\geq 4}$ -free グラフのクラスは, 弦グラフのクラスと等価であることが知られている.

T -join $G = (V, E)$ に対し, $T \subseteq V$ が $|T| =$ 偶数 を満たすとする. V と $J \subseteq E$ から成るグラフを $K = (V, J)$ とおき, 任意の $v \in V$ に対して

$$d_K(v) \equiv \begin{cases} 1 & \text{if } v \in T, \\ 0 & \text{if } v \notin T \end{cases} \pmod{2} \quad (1)$$

が成り立つとき, J を G の T -join と呼ぶ [11]. 任意の G と T に対して, T -join は $O(|V| + |E|)$ 時間で構成できることが知られている (cf. [7]).

2.2 パリティハミルトン閉路

グラフ G の歩道は, 頂点と辺の系列 $v_0 e_1 v_1 \dots e_\ell v_\ell$ である. ただし $e_i (1 \leq i \leq \ell)$ は v_{i-1} と v_i 間の辺である. $v_0 = v_\ell$ であるとき, 歩道は閉じているといい, 閉じた歩道を巡回路と呼ぶ. 巡回路に全ての頂点が少なくとも 1 度現れるとき, 巡回路は全域であるという. G のパリティハミルトン閉路 (PHC) は, 始点 v_0 を無視したとき, 全ての頂点が奇数回現れるような巡回路である. 閉じた歩道において, 辺 e の現れる回数を x_e とし, 頂点 v の訪問数を

$$\text{visit}(v) = \frac{1}{2} \sum_{e \in \delta(v)} x_e \quad (2)$$

で定める. すなわち, パリティハミルトン閉路は, 全ての

頂点 v に対して $\text{visit}(v) \equiv 1 \pmod{2}$ が成り立つような巡回回路である。

パリティハミルトン閉路では、同一の辺 e を 2 回以上通ってよい。各辺を高々 z 回しか通らないようなパリティハミルトン閉路を PHC_z と表記する。また、 PHC_z が入力グラフに存在するか否かを判定する問題を PHC_z 問題と表記する。

3. PHC_z の計算量

3.1 $z \geq 4$ の場合

この節の目標は、次の定理を示すことである。

定理 3.1. $z \geq 4$ のとき、 PHC_z 問題は \mathcal{P} に属す。

まず、以下の補題 3.2 を示す。Brigham ら [3] による証明も同様の主張を与えるが、ここでは T -join を用いた別の証明を行う。

補題 3.2 (cf. [3]). 任意のグラフには、 $|V| - 1$ 個以上の頂点を奇数回訪問し、かつ各辺を高々 4 回しか通らない全域巡回回路が存在する。

証明. $T \subseteq V$ を、 $|V|$ が偶数ならば $T = V$ 、 $|V|$ が奇数ならば適当な頂点 v を選び $T = V \setminus \{v\}$ と定める。 T -join J を構成し、 x_e を

$$x_e \leftarrow \begin{cases} 2 & \text{if } e \in J, \\ 4 & \text{if } e \notin J \end{cases}$$

とする。このとき、 $(x_e)_{e \in E}$ が定める巡回回路は全域巡回回路であり、かつ明らかに $|V| - 1$ 個以上の頂点を奇数回訪問する。 ■

定理 3.3. $z \geq 4$ のとき、グラフ $G = (V, E)$ が PHC_z をもつための必要十分条件は、 $|V|$ が偶数である、または G が奇閉路をもつことである。

証明. **十分性** $|V|$ が偶数のときは、補題 3.2 から G は PHC をもつ。

$|V|$ が奇数かつ G が奇閉路をもつとする。構成的証明を与える。奇閉路を C とし、 $T = V \setminus V(C)$ に対し T -join J を構成する。 x_e の値を

$$x_e \leftarrow \begin{cases} 1 & \text{if } e \notin J \text{ and } e \in E(C), \\ 2 & \text{if } e \in J \text{ and } e \notin E(C), \\ 3 & \text{if } e \in J \text{ and } e \in E(C), \\ 4 & \text{if } e \notin J \text{ and } e \notin E(C) \end{cases}$$

とすると、 $(x_e)_{e \in E}$ は全域巡回回路であり、全ての頂点を奇数回訪問する。

必要性 $G = (U, V; E)$ を奇数頂点の二部グラフとする。 G が PHC をもつと仮定する。 PHC では任意の $v \in U \cup V$ に対して $\text{visit}(v) \equiv 1 \pmod{2}$ であるから、

$$\begin{aligned} \sum_{v \in U \cup V} \text{visit}(v) &\equiv \sum_{v \in U \cup V} 1 \\ &\equiv |U \cup V| \equiv 1 \pmod{2}. \end{aligned} \quad (3)$$

一方、 G は二部グラフであるから、任意の巡回回路は

$$\sum_{u \in U} \text{visit}(u) = \sum_{v \in V} \text{visit}(v) \quad (4)$$

を満たす。(4) より

$$\begin{aligned} \sum_{v \in U \cup V} \text{visit}(v) &= \sum_{v \in U} \text{visit}(v) + \sum_{v \in V} \text{visit}(v) \\ &= 2 \sum_{v \in U} \text{visit}(v) \equiv 0 \pmod{2} \end{aligned} \quad (5)$$

となり、これは (3) に矛盾する。したがって、 G は PHC をもたない。 ■

定理 3.1 は、定理 3.3 から直ちに得られる。さらに定理 3.3 の証明は、グラフに PHC_4 を構成する線形時間アルゴリズムも与えている。

3.2 $z = 1, 2, 3$ の場合

前節では、 $z \geq 4$ のとき PHC_z 問題が \mathcal{P} に属すことを示した。この節では、 $z = 1, 2, 3$ のとき PHC_z 問題が \mathcal{NP} -完全となることを示す。ここで、定理 3.4, 3.5, 3.6 は互いに独立であり、必要条件、十分条件の関係はない。

定理 3.4. PHC_1 問題は \mathcal{NP} -完全である。

証明. HC 問題は 3-辺連結 3 正則平面的グラフにおいて \mathcal{NP} -完全であることが知られている [5]。このグラフクラスにおいて PHC_1 問題は HC 問題と等価である。 ■

定理 3.5. PHC_2 問題は 2-辺連結グラフにおいて \mathcal{NP} -完全である。

証明. 3 正則グラフにおける HC 問題からの還元を行う。 G を HC 問題の入力グラフとする。 PHC_2 問題の入力グラフ H を以下のように構成する (図 2)。

- 各辺 $e = \{v, u\} \in E(G)$ を長さ 3 のパスに分割する。すなわち、 e を 2 つの頂点 v_e, u_e と 3 つの辺 $\{v, v_e\}$, $\{v_e, u_e\}$, $\{u_e, u\}$ で置き換える。
- 各頂点 $v \in V(G)$ に長さ 4 の閉路を付け加える。すなわち、3 つの頂点 w_{v1}, w_{v2}, w_{v3} と 4 つの辺 $\{v, w_{v1}\}$, $\{w_{v1}, w_{v2}\}$, $\{w_{v2}, w_{v3}\}$, $\{w_{v3}, v\}$ を追加する。

簡潔のため、 V をもとの頂点集合 (すなわち $V = V(G)$)、 V_s を辺の分割によって追加された頂点 u_e, v_e の集合、 V_c を閉路の付加によって追加された頂点 w_{v1}, w_{v2}, w_{v3} の集合とする。すなわち、 $V(H) = V \cup V_s \cup V_c$ である。以下、 G が HC をもつことと H が PHC_2 をもつことが等価であることを示す。

G に HC が存在するならば、 H は PHC_2 をもつことを示す。 G の HC を $C \subseteq E(G)$ とおく。 H において、

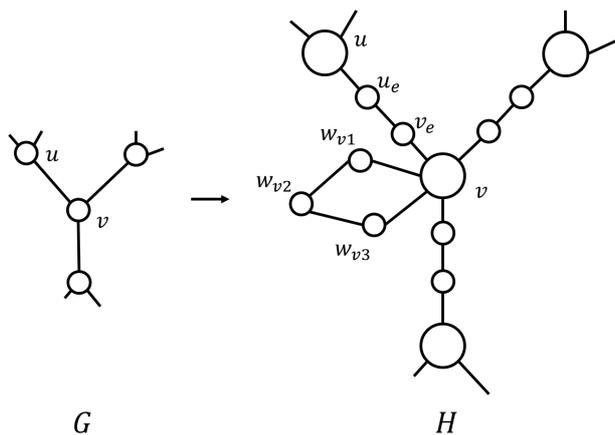


図 2 定理 3.5 の還元を用いるガジェット.

$e \in E(C)$ に対して $x_{\{v,v_e\}} = x_{\{v_e,u_e\}} = x_{\{u_e,u\}} = 1$, $e \notin E(C)$ に対して $x_{\{v,v_e\}} = x_{\{u_e,u\}} = 2$, $x_{\{v_e,u_e\}} = 0$ とする. また, 各 $v \in V(G)$ に付加された閉路に対して, $x_{\{v,w_{v1}\}} = x_{\{w_{v1},w_{v2}\}} = x_{\{w_{v2},w_{v3}\}} = x_{\{w_{v3},v\}} = 1$ とする (図 3). C は G での HC であり, また各 $v' \in V(H)$ に対して $\sum_{e' \in \delta_H(v')} x_{e'} = \text{偶数}$ であるから, x は H 上の巡回路となる.

また, $V_s \cup V_c$ の頂点の訪問数は 1, V の頂点の訪問数は 3 であるから, H の全ての頂点の訪問数が奇数であることも容易に確かめられる. したがって, x は H における PHC_2 になっている.

次に, H が PHC_2 をもつならば, G が HC をもつことを示す. まず, H の PHC_2 において $V_s \cup V_c$ の訪問数は 1 である. なぜなら, 各辺は 2 回までしか通過できず, かつ $v' \in V_s \cup V_c$ に対して $d_H(v') = 2$ だからである. よって, 分割された辺 $\{v, v_e\}, \{v_e, u_e\}, \{u_e, u\}$ に対して, $(x_{\{v,v_e\}}, x_{\{v_e,u_e\}}, x_{\{u_e,u\}})$ の値の組の候補は $(1, 1, 1), (2, 0, 2), (0, 2, 0)$ の 3 通りのみである. さらに $(0, 2, 0)$ は PHC_2 の連結性に反するため, 不適である. また, G は 3 正則グラフであるから, 各 $v \in V$ の次数は 5 である. v の接続辺のうち, $\{v, w_{v1}\}, \{v, w_{v3}\}$ でないものを $a, b, c \in E(H)$ とおくと, PHC_2 における $x_a, x_b, x_c, x_{\{v,w_{v1}\}}, x_{\{v,w_{v3}\}}$ の値は

$$x_a + x_b + x_c + x_{\{v,w_{v1}\}} + x_{\{v,w_{v3}\}} \equiv 2 \pmod{4}$$

を満たす (visit(v) = 奇数より). いま, $x_{\{v,w_{v1}\}} = x_{\{v,w_{v3}\}} = 1$ であるから,

$$x_a + x_b + x_c \equiv 0 \pmod{4}$$

が成立する. 各 x_a, x_b, x_c の値は高々 2 であり, かつどれも 0 ではない. したがって, x_a, x_b, x_c のうち 2 つの値は 1, 残りの 1 つの値は 2 である. すなわち, v に接続する 3 つのパスに割り当てられた値は, 2 つが $(1, 1, 1)$, 1 つが $(2, 0, 2)$ となっている.

H における PHC_2 で $(1, 1, 1)$ が割り当てられたパスに対

応する G の辺の集合を $C' \subset E(G)$ とおく. PHC_2 の連結性から, C' は G の HC となっている. ■

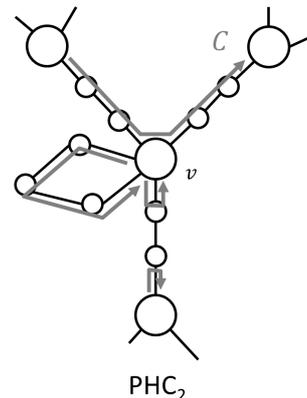


図 3 v の周りの PHC_2 .

PHC_3 の \mathcal{NP} -完全性も同様に証明できる (定理 3.6).

定理 3.6. PHC_3 問題は 2-辺連結グラフにおいて \mathcal{NP} -完全である.

4. PHC_3 問題の様々なグラフクラスにおける計算量

この節では, PHC_3 問題について深く考察を行う. はじめに, 4-辺連結グラフにおける PHC_3 問題が \mathcal{P} に属することを以下の節に示す.

4.1 4-辺連結グラフ

定理 4.1. 全ての 4-辺連結グラフは PHC_3 をもつ. また, PHC_3 は多項式時間で構成できる.

定理 4.1 の証明には, 次の定理を用いる.

定理 4.2 ([6], [9]). 全ての 4-辺連結グラフは 2 つの辺素な全域木をもつ.

定理 4.1 の証明. $G = (V, E)$ を 4-辺連結グラフとする. もし $|V|$ が奇数かつ G が二部グラフだった場合, 定理 3.3 から G は PHC をもたない. したがって, $|V|$ は偶数または G は奇閉路をもつと仮定する. 以下, 定理 4.2 を用いて, G に PHC_3 を構成する.

T, T' を G の辺素な全域木とする.*4 まず, $\forall e \in E(T)$ に対して $x_e \leftarrow 2$ とし, G の全域巡回路を得る. S を訪問数が偶数である頂点の集合とする.

$|V|$ が偶数, すなわち $|S|$ が偶数のときは, T' 上に S -join J を構成し, $\forall e \in J$ に対して $x_e \leftarrow 2$ とする. このとき, 得られた巡回路は G の PHC_3 となっている.

$|V|$ が奇数, すなわち $|S|$ が奇数のときを考える. 仮定より, G は奇閉路 $C \subseteq E$ をもつ. $\forall e \in C$ に対し $x_e \leftarrow x_e + 1$

*4 2 つの辺素な全域木は多項式時間で求めることができる [11]. (e.g. $O(|E|^2)$, Roskind, Tarjan [10])

とし、改めて S を計算すると、 $|S|$ は偶数となる。 T' 上に S -join J を構成し、 $\forall e \in J$ に対して $x_e \leftarrow x_e + 2$ とする。各 x_e の値は C で高々 1、 T または T' で高々 2 増加するから、全体では高々 3 である。したがって、得られた巡回路は G の PHC_3 となっている。 ■

証明は PHC_3 を構成する多項式時間アルゴリズムも与えている。したがって、4-辺連結グラフに対する PHC_3 問題は \mathcal{P} に属す。一方、定理 3.6 で示したように、2-辺連結グラフにおける PHC_3 問題は \mathcal{NP} -完全である。3-辺連結グラフにおける時間計算量は、未解決である。

以下の節では、3-辺連結（実際には2-辺連結）グラフにおける PHC_3 問題への1つのアプローチを示す。

4.2 準備：mod-4 万能性

この節では、2-辺連結グラフにおける PHC_3 問題を調査するための準備として、**modulo factor** と**万能性**の概念を導入する。

まずアイデアについて述べる。 PHC を多重有向グラフとして表現したとき（図 4, 左）、全ての頂点 $v \in V$ の入次数と出次数は $2m_v - 1$ ($m_v \in \mathbb{Z}_{>0}$) となる。有向グラフの各辺の向きを無視して得られる無向グラフを H とすると $d_H(v) = 4m_v - 2$ 、すなわち $d_H(v) \equiv 2 \pmod{4}$ となる（図 4, 右）。すると、各辺 $e \in E$ に対して変数 $x_e \in \{0, 1, 2, 3\}$ を定めたとき、 PHC_3 はすべての $v \in V$ に対して $\sum_{e \in \delta(v)} x_e \equiv 2 \pmod{4}$ が満たされるようなベクトル $(x_e)_{e \in E}$ として表現することができる。

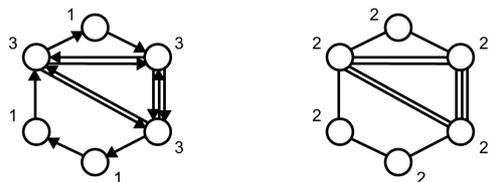


図 4 PHC の有向グラフと無向グラフによる表現。

左図は PHC の有向グラフによる表現、右図は左図のグラフの辺の向きを無視して得られる無向グラフである。各頂点に付随している数字は、左図では訪問数、右図では $\text{mod } 4$ での次数である。

整数 d と関数 $f: V \rightarrow \{0, 1, \dots, d-1\}$ に対し、全ての $v \in V$ に対して

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \equiv f(v) \pmod{d} \quad (6)$$

を満たすベクトル $(x_e)_{e \in E}$ を **mod- d f -factor** と呼ぶ。 $\text{mod-}d$ f -factor が**連結**であるとは、 $x_e = 0$ ($\forall e \in C$) となる辺カット $C \subseteq E$ が存在しないことをいう。例えば、 $f(v) = 2$ ($\forall v \in V$) のとき、連結かつ $x_e \leq 3$ ($\forall e \in E$) を満たす $\text{mod-}4$ f -factor は PHC_3 である。

以下、 $d = 4$ として考える。

グラフ G に対し、関数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ は $d^{|V|} = 4^{|V|}$ 個存在する。このうち、 $\text{mod-}4$ f -factor が作れるような f は、 $\sum_{v \in V} f(v)$ が偶数になるものだけである。

定義 4.3 (3 重グラフでの $\text{mod-}4$ 万能性). $G = (V, E)$ をグラフとし、 \mathcal{F} を関数 $f: V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ のうち $\sum_{v \in V} f(v) \equiv 0 \pmod{2}$ を満たすものの集合とする。 G が全ての $f \in \mathcal{F}$ に対して $x_e \leq 3, \forall e \in E$ を満たすような連結 $\text{mod-}4$ f -factor をもつとき、 G は**3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能**であるという。

明らかに、 G が 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能であれば G は PHC_3 をもつ。一方、任意の二部グラフは 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能にならない。そのため、万能性の概念を二部グラフに拡張し、**二部万能性**を定義する。

定義 4.4 (3 重グラフでの $\text{mod-}4$ 二部万能性). $G = (U, V; E)$ を二部グラフとし、 \mathcal{F} を関数 $f: U \cup V \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ のうち $\sum_{v \in U} f(v) \equiv \sum_{v \in V} f(v) \pmod{4}$ を満たすものの集合とする。 G が全ての $f \in \mathcal{F}$ に対して $x_e \leq 3, \forall e \in E$ を満たすような連結 $\text{mod-}4$ f -factor をもつとき、 G は**3 重グラフで $\text{mod-}4$ 二部万能**であるという。

非二部グラフのときと同様、 G が 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 二部万能ならば、 G は PHC_3 をもつ。

C_5 は 3 重グラフで万能でないが、 C_5 は PHC_3 をもつ。

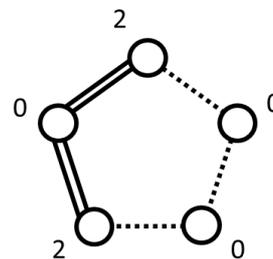


図 5 万能性に対する反例。

各頂点に添えられた数字は f の値である。この f に対して、 C_5 は連結かつ $x_e \leq 3, \forall e \in E$ を満たす $\text{mod-}4$ f -factor をもたない。

4.3 2-辺連結グラフに対する $\text{mod-}4$ 万能性

この節では、2-辺連結グラフにおける $\text{mod-}4$ 万能性に対する結果を述べる。まず、以下の2つの有用な補題を示す。

補題 4.5. 2-辺連結グラフ G が 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能であるとする。 G' を G に長さ 7 以下の耳を付加してできるグラフとする。このとき、 G' は 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能である。

補題 4.6. G をグラフとする。 G の任意の辺カット $C \subseteq E(G)$ に対し、 $C \cap E(H) \neq \emptyset$ かつ 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能（または二部万能）な G の部分グラフ H が存在するとき、 G は 3 重グラフで $\text{mod-}4$ 万能（または二部万能）である。

補題 4.5, 4.6 を用いると, 以下の補題を示すことができる.

定理 4.7. 2-辺連結弦グラフは 3 重グラフで mod-4 万能である.

定理 4.8. 2-辺連結弦二部グラフは 3 重グラフで mod-4 二部万能である.

定理 4.9. 2-辺連結 cograph は 3 重グラフで mod-4 万能 (または二部万能) である.

定理 4.10. $G (\neq C_5)$ を P_6 -free または $C_{\geq 5}$ -free グラフとする. このとき, G は 3 重グラフで mod-4 万能 (または二部万能) である.

4.4 橋をもつグラフの mod-4 万能性

この節では橋をもつグラフについて考える.

定理 4.11. グラフ $G = (V, E)$ に対し, $B \subseteq E$ を橋の集合, $S \subseteq V$ を $G - B$ における孤立点の集合とする. $S = \emptyset$ かつ $G - B$ の全ての 2-辺連結な連結成分が 3 重グラフで mod-4 万能であるとき, G は 3 重グラフで mod-4 万能である.

証明. C_1, \dots, C_l を $G - B$ の連結成分とし, H を各 C_i を縮約して得られるグラフとする. C_1, \dots, C_l に対応する H の頂点を u_1, \dots, u_l とする. 各 C_i に対し, $s_i = \sum_{v \in C_i} f(v)$ の値を計算し, $T \subseteq V(H)$ を $T = \{u_i \mid s_i \equiv 1 \pmod{2}\}$ とおく. J を H 上の T -join とする. 各 $e \in B$ に対して x_e を

$$x_e = \begin{cases} 1 & \text{if } e \in J, \\ 2 & \text{if } e \notin J \end{cases}$$

とし, 各 $v \in V(G)$ に対して

$$f'(v) = \left(f(v) - \sum_{e \in \delta(v)} x_e \right) \pmod{4}$$

と定める. 仮定より各 C_i は 3 重グラフで mod-4 万能であるから, C_i は $x_e \leq 3, \forall e \in E$ を満たす mod-4 f' -factor をもつ. $x_e (e \in B)$ と C'_i に対する mod-4 f' -factor を統合することで, G における mod-4 f -factor ($x_e \leq 3, \forall e \in E$) を得ることができる. ■

以下の命題は, $S \neq \emptyset$ のとき G が PHC_3 をもつためのそれぞれ必要条件と十分条件を与える.

命題 4.12. グラフ $G = (V, E)$ に対し, $B \subseteq E$ を橋の集合, $S \subseteq V$ を $G - B$ における孤立点の集合とする. G が PHC_3 をもつならば, 全ての $v \in S$ に対して $d_G(v)$ は奇数である.

命題 4.13. グラフ $G = (V, E)$ に対し, $B \subseteq E$ を橋の集合, $S \subseteq V$ を $G - B$ における孤立点の集合とする. 全ての $v \in S$ に対して $d_G(v)$ が奇数であり, かつ $G - B$ の全ての 2-辺連結な連結成分が 3 重グラフで mod-4 万能であるとき, G は PHC_3 をもつ.

定理 4.11 と補題 4.12, 4.13 から, 橋をもつグラフに対する PHC_3 問題は, 2-辺連結グラフにおける PHC_3 問題に帰着できる.

5. おわりに

本論文ではパリティハミルトン閉路問題を導入し, $z \geq 4$ のとき \mathcal{P} であり $z \leq 3$ のとき \mathcal{NP} -完全であることを示した. また, $z = 3$ のとき, 2-辺連結グラフのいくつかのクラスに対して問題が \mathcal{P} に属することを示した.

今後の課題としては, PHC 問題と HC , T -join, even factor, extended complexity, jump system 等との関係の調査が挙げられる. また, 有向グラフ上の PHC 問題, 重み付きグラフの重み最小 PHC を求める厳密アルゴリズムの設計, なども行っていきたい.

謝辞

本研究は JST, ERATO, 河原林巨大グラフプロジェクト, MEXT 科研費 新学術領域研究「多面的アプローチの統合による 計算限界の解明」(24106002, 24106005), および科研費 24700004, 22300004 の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] S. Boyd, S. Iwata, K. Takazawa: Finding 2-factors closer to TSP walks in cubic graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, **27** (2013), 918–939.
- [2] A. Brandstaedt, V.B. Le, J.P. Spinrad: Graph Classes: A Survey, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.
- [3] R.C. Brigham, R.D. Dutton, P.Z. Chinn, F. Harary: Realization of parity visits in walking a graph, *The College Mathematics Journal*, **16** (1985), 280–282.
- [4] P.A. Catlin: A Reduction Method to Find Spanning Eulerian Subgraphs, *Journal of Graph Theory*, **12** (1988), 29–44.
- [5] M.R. Garey, D.S. Johnson, R.E. Tarjan: The planar Hamiltonian circuit problem is NP-complete, *SIAM Journal on Computing*, **5** (1976), 704–714.
- [6] D. Gusfield: Connectivity and edge-disjoint spanning trees, *Information Processing Letters*, **16** (1983), 87–89.
- [7] B. Korte, J. Vygen: Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms, Fifth Edition, Springer-Verlag, 2012.
- [8] L. Lesniak, O.R. Oellermann: An Eulerian exposition, *Journal of Graph Theory*, **100** (1986), 277–297.
- [9] C. St. J. A. Nash-Williams: Edge-disjoint Spanning Trees of Finite Graphs, *Journal of the London Mathematical Society*, **36** (1964), 445–450.
- [10] J. Roskind, R. E. Tarjan: A note on Finding minimum-cost edge-disjoint spanning trees, *Mathematics of Operations Research*, **10** (1985), 701–708.
- [11] A. Schrijver: Combinatorial Optimization, Springer, 2003.
- [12] M. Yannakakis: Expressing combinatorial optimization problems by linear programs, *Journal of Computer and System Sciences*, **43** (1991), 441–466.