

自己交差を持つ閉曲面に対する ハンドルサイクルとトンネルサイクルの計算 (2014年12月11日版)

藤田 達也^{1,a)} 森口 昌樹² 今井 桂子²

概要: $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた自己交差を持たない閉曲面に対し、ハンドル・トンネルサイクルが定義されている。これらは位相幾何的に重要なサイクルであり、閉曲面の位相的簡略化に応用することが出来る。実際の3次元形状データにはいくつかの種類の自己交差が含まれている。そこで、本研究では、現実によく現れる閉曲面に対してこれらのサイクルの定義を拡張する。また、そのサイクルがなす基底を計算する手法を提案し、計算機実験の結果を示す。

キーワード: ハンドルサイクル, トンネルサイクル, トポロジー, 自己交差

1. はじめに

近年、3次元プリンターや3次元スキャナーが比較的安価に手に入るようになり、また、多くの人が高性能な携帯端末を当たり前のように持つ時代となった。そのため、現在では多くの企業が3次元形状データを製品の試作に用いているが、今後は、様々な人が個人で3次元形状を利用する場面が増えると予測されている。しかし、3次元形状を編集するためには非常に高いスキルや時間が必要となり、そのような知識を持たない人が自分の思い描く形状を得ることは難しい。ハンドルサイクル、トンネルサイクルは、自己交差を持たない閉曲面上に定義されるサイクルであり、位相幾何的に重要である。これらのサイクルを用いると、閉曲面の位相的簡略化を人間の直感に近い形で行うことができる。

しかし、現在、ハンドル・トンネルサイクルは、自己交差を持たない閉曲面に対してしか定義されていない。3次元形状データが多く利用されているコンピュータグラフィックスの分野では、閉曲面データがいくつかの種類の自己交差を持つことが非常に多い。そのため、自己交差に対応したハンドル・トンネルサイクルの計算は重要である。

本研究では、現実の用途で用いられている3次元形状

データが持つ自己交差の中でも多く現れる種類の自己交差を対象に、 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれた自己交差を持つ閉曲面に対してこれらのサイクルの定義を拡張する。また、そのサイクルが作る基底を計算する手法を提案し、計算機実験の結果を示す。

2. 準備

2.1 ホモロジー

ある位相空間 X に対し、 $H_1(X)$ を1次元ホモロジー群とする。この論文では、 $H_1(X)$ を $\mathbb{Z}_2$ 係数環のもとで扱う。

ある閉曲面 M に対し、 M 上の1-サイクルは、境界を持たない1次元図形である。以降、1-サイクルを単にサイクルと呼ぶ。2つのサイクルの和は、それらのサイクルの対称差である。サイクル γ が位相空間 X で自明であるとは、 γ が X の部分集合の境界を表している場合である。 X が閉曲面である場合、 γ は X の部分曲面の集合の境界である。2つのサイクル γ_1, γ_2 がホモログであるとは、 $\gamma_1 + \gamma_2$ が自明であるときである。サイクル γ とホモログなサイクルの集まりは、ホモロジー類 $[\gamma]$ となる。位相空間 X に対し、 γ が自明な場合、 $[\gamma]$ は X の1次元ホモロジー群 $H_1(X)$ の零元である。サイクルの集合が独立であるとは、それらのホモロジー類が独立である場合である。サイクルの集合 $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k\}$ が $H_1(X)$ のサイクル基底であるとは、それらが独立であり、 $[\gamma_1], [\gamma_2], \dots, [\gamma_k]$ がベクトル空間 $H_1(X)$ に対して基底をなす場合である。

¹ 中央大学大学院 理工学研究科
Chuo University Graduate School of Science and Engineering

² 中央大学 理工学部
Chuo University of Science and Engineering

^{a)} tfujita@imai-lab.ise.chuo-u.ac.jp

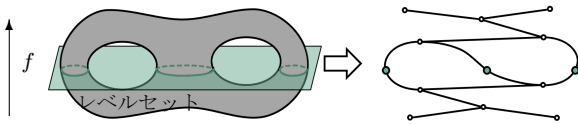


図 1 高さ関数 f に対する X の Reeb グラフ $Rb_X(f)$

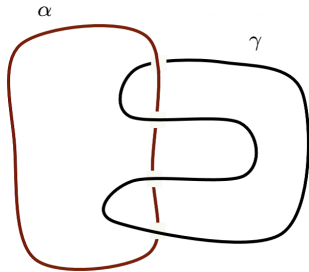


図 2 絡み数が 1 の 2 つのサイクル

2.2 Reeb グラフ

[2] では、初期ハンドル・トンネルサイクルを求めるために、Reeb グラフを用いる。

Reeb グラフとは、以下のように定義されるグラフである。

定義 1. 位相空間 X と連続関数 $\mu: X \rightarrow \mathbb{R}$ が与えられた時、以下の $p, q \in X$ の同値関係 $p \sim q$ を定義する。この時、 X の Reeb グラフは商空間 $X/\sim$ である。

- $\mu(p) = \mu(q)$

かつ

- p と q は同じ $\mu^{-1}(\mu(p))$ の連結成分に属する。

[2] では、連続関数 μ として、高さ関数を利用する。連続関数 μ の値が同一となる点の集合をレベルセットと呼ぶ。図 1 は、高さ関数 f に対する Reeb グラフ $Rb_X(f)$ の例である。

2.3 絡み数

[2] では、非自明サイクルがハンドル・トンネルサイクルになるように、絡み数を用いる。

絡み数とは、 $\mathbb{R}^3$ 中に埋め込まれた、点を共有しない 2 つの単純閉曲線の絡んでいる数を表す。本論文でも、[2] 同様に、絡み数を $\mathbb{Z}_2$ 上で計算する。絡み数が 1 であるのは 2 つの単純閉曲線が奇数回巻き付いているときであり、0 であるのは偶数回巻き付いているときである。図 2 の 2 つの単純閉曲線の絡み数 $Lk(\alpha, \gamma)$ は 1 である。

絡み数の計算は次のように行う [3]。絡み数を求める 2 つの単純閉曲線を γ, α とする。最初に、 γ, α を平面 P に投影し、それぞれ γ', α' を得る。 γ' と α' の交点のうち、 γ のほうが α より手前にあるものを正の交差と呼ぶ。絡み数は、 $\mathbb{Z}_2$ における正の交差の数となる。図 2 の 2 つの単純閉曲線 γ, α では、紙面上に投影した場合、 γ' の α' に対する正の交差は 3 である。

2.4 アノテーション

[2] では、ハンドル・トンネル基底の長さの最適化に、アノテーションを用いる。アノテーションは、以下のように定義される [4]。

定義 2. 種数 g の向き付け可能閉曲面 S が与えられているとする。1 次元ホモロジー群 $H_1(S)$ において、 S の辺集合 E に対するアノテーション a は、次の性質を持つ関数 $S \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^{2g}$ である。

- 2 つのサイクル $z, z' \in S$ が同じホモロジー群に属する場合、その時に限り、 $a(z) = a(z')$ となる。

1 次元ホモロジー群の基底の各サイクルをベクトルの各要素に対応させた、 $2g$ 次元のベクトルを考える。この時、任意のサイクル γ に対し、 γ と基底の各サイクルの交点数を $\mathbb{Z}_2$ 上で求め、それをベクトルの対応する要素の値とする。このベクトルを、交点数ベクトルと呼ぶことにする。任意のサイクル γ に対し、交点数ベクトルを返すような関数は、定理 1 ([5] の Lemma 3.4) から、アノテーションとなる。

定理 1. 2 つのサイクルがホモログな時、その時に限り、それらの $\mathbb{Z}_2$ における交点数ベクトルは同じとなる。

3. ハンドルサイクルとトンネルサイクル

この節では、自己交差を持たない閉曲面に対するハンドル・トンネルサイクルの定義と計算方法について述べる。

3.1 定義

M が向き付け可能であり、 $\mathbb{R}^3$ に埋め込まれているとする。この時、 M は $\mathbb{R}^3$ を内部 $\mathbb{I}$ と外部 $\mathbb{O}$ に分離する。ただし、 $\mathbb{I}$ と $\mathbb{O}$ は M を含むものとする ($\mathbb{I} \cap \mathbb{O} = M$, $\mathbb{I} \cup \mathbb{O} = \mathbb{R}^3$)。このような $\mathbb{I}, \mathbb{O}$ に対し、自己交差を持たない閉曲面に対するハンドル・トンネルサイクルは定義 3 のように定義される (図 3) [2]。

定義 3. 閉曲面 M におけるハンドルサイクル、トンネルサイクルは以下のように定義される。ただし、 M の内部を $\mathbb{I}$ 、外部を $\mathbb{O}$ とし、どちらも M を含むものとする ($\mathbb{I} \cap \mathbb{O} = M$, $\mathbb{I} \cup \mathbb{O} = \mathbb{R}^3$)。

- サイクル γ が M のハンドルサイクルであるとは、 γ が $\mathbb{I}$ 中で自明であるが、 $\mathbb{O}$ 中では非自明である時である。
- サイクル γ が M のトンネルサイクルであるとは、 γ が $\mathbb{O}$ 中で自明であるが、 $\mathbb{I}$ 中では非自明である時である。

種数 g の閉曲面に対し、独立なハンドルサイクル、トンネルサイクルはそれぞれ g 個存在する。独立な g 個のハ

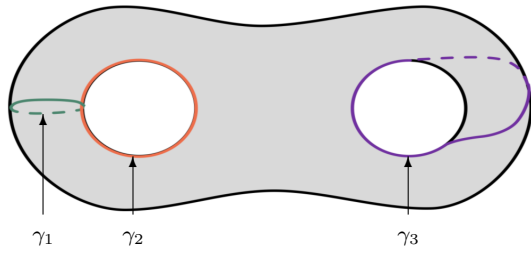


図 3 ハンドルループ γ_1 とトンネルループ γ_2 とどちらでもないループ γ_3 の例

ハンドルサイクル, 独立な g 個のトンネルサイクルは, それぞれハンドル基底, トンネル基底をなす. ハンドル基底とトンネル基底の和集合は, $H_1(M)$ の基底となる. サイクルの集合の長さを, それに含まれる各サイクルの長さの和とする. この時, $\mathbb{Z}_2$ 上の 1 次元ホモロジー群に対して, 最短基底を多項式時間で計算することができる [6]. しかし, $\mathbb{Z}_2$ 上の 1 次元ホモロジー群に対して, 最短ハンドル・トンネル基底を多項式時間で計算することができるかは未解決である [2].

ハンドル・トンネル基底を求める手法には, [1], [2] がある. [1] では, 閉曲面のボリュームメッシュから, 直接的に短いハンドル・トンネル基底を求める. [2] では, 閉曲面の表面メッシュから Reeb グラフを計算し, 初期ハンドル・トンネル基底を求め, 反復によって, 短い基底を求める. [2] では, 閉曲面のボリュームメッシュを利用しないため, 頂点位置にノイズがあったり, 非一様な位置に頂点があっても, 自己交差さえなければ正しく計算できる. 本論文では, 本論文で提案する手法によって自己交差を解消した閉曲面に対して, ハンドル・トンネル基底を求めるために, [2] の手法を用いた.

3.2 計算手法

[2] ではアルゴリズム 1 によって, 初期ハンドル・トンネル基底を求める. 入力の種類数 g の三角形分割された閉曲面 $M \subset \mathbb{R}^3$ であり, 出力は M のハンドル・トンネル基底である. 次に, アルゴリズム 2 によって, 長さが最適化されたハンドル・トンネル基底を求める. このアルゴリズムの入力は, アルゴリズム 1 で得られた初期ハンドル・トンネル基底であり, 出力は長さが最適化されたハンドル・トンネル基底である.

アルゴリズム 1. ハンドル・トンネル基底の計算

初期ハンドル・トンネル基底は次のようにして計算する.

- (1) M 上で定義された高さ関数 h に対し, Reeb グラフ $\text{Rb}_M = \text{Rb}_M(h)$ を求める.
- (2) Rb_M の最大重み全域木 T を求める. ただし, Rb_M のアークの重みは, そのアークの端点 n_1, n_2 の関数値

$h(n_1), h(n_2)$ の小さい方とする. その後, T に含まれないアーク e を T に追加することで, g 個の独立したサイクル c_e を見つける.

- (3) 各サイクルのアーク $e \in c_e$ を, そのもととなった曲面 M の部分曲面を通るパスに変換する. これらのサイクルを, そのサイクルの最下点の関数値の降順に $\gamma_i (i = 1, 2, \dots, g)$ と割り当てる. これを, Reeb サイクルと呼ぶ. 各 γ_i に対し, 最下点の属するレベルセット上で, 最下点を含むような境界サイクル $\overline{\gamma}_i$ を計算する. これを, レベルセットループと呼ぶ.
- (4) 各 $\gamma_i, \overline{\gamma}_i$ を $\mathbb{I}$ の内部 $\mathring{\mathbb{I}}$ か $\mathbb{O}$ の内部 $\mathring{\mathbb{O}}$ に摂動し, それぞれ $\alpha_i, \overline{\alpha}_i$ を得る. 摂動方向は γ_i の最下点の状態によって決定される.
- (5) $2g \times 2g$ の絡み数行列 L を計算する. この行列は, 行がサイクル $\alpha \in \{\alpha_i\} \cup \{\overline{\alpha}_i\}$, 列がサイクル $\gamma \in \{\gamma_i\} \cup \{\overline{\gamma}_i\}$ に対応する. 行 α 列 γ の要素は $\text{Lk}(\gamma, \alpha)$ である. L^{-1} を用いて, γ_i と $\overline{\gamma}_i$ の線形組合せを計算することで, ハンドル基底 $\{h_i\}_{i=1}^g$ とトンネル基底 $\{t_i\}_{i=1}^g$ を求める.

摂動方向 Reeb サイクル γ_i とレベルセットサイクル $\overline{\gamma}_i$ の摂動方向は, γ_i の最下点 p に対する状態によって決定する. L_p^+ を p よりも $\delta > 0$ だけ大きい関数値 $h(p) + \delta$ を持つレベルセット, L_p^- を p よりも δ だけ小さい関数値 $h(p) - \delta$ を持つレベルセットとする. p は関数値の大きくなる方向に, 連結成分が分割されるので, p によって分割された連結成分を, L_p^+ が切り取ってできる領域の境界サイクルは 2 個となる. これらのサイクルを β_1, β_2 とする. また, p によって分割される前の連結成分を, L_p^- が切り取ってできる領域の境界サイクルは 1 個となる. このサイクルを β_0 とする. また, β_i がレベルセットの作る平面を切り取ってできる領域を $R[\beta_i]$ と表す. この時, p を以下のように分類できる.

- (1) $R[\beta_1], R[\beta_2]$ が各々を含まない (図 4 (a))

- (a) $\beta'_0 \subset \mathbb{I} \quad (\beta'_1, \beta'_2 \subset \mathbb{I})$
- (b) $\beta'_0 \subset \mathbb{O} \quad (\beta'_1, \beta'_2 \subset \mathbb{O})$

- (2) $R[\beta_1]$ が $R[\beta_2]$ を含む (図 4 (b))

- (a) $\beta'_0 \subset \mathbb{I} \quad (\beta'_1 \subset \mathbb{O}, \beta'_2 \subset \mathbb{I})$
- (b) $\beta'_0 \subset \mathbb{O} \quad (\beta'_1 \subset \mathbb{I}, \beta'_2 \subset \mathbb{O})$

(1a), または, (2b) となる場合, γ_i は $\mathring{\mathbb{I}}$ に摂動し, $\overline{\gamma}_i$ は $\mathring{\mathbb{O}}$ に摂動する. (1b), または, (2a) となる場合, γ_i は $\mathring{\mathbb{O}}$ に摂動し, $\overline{\gamma}_i$ は $\mathring{\mathbb{I}}$ に摂動する.

アルゴリズム 2. ハンドル (トンネル) 基底の長さの最

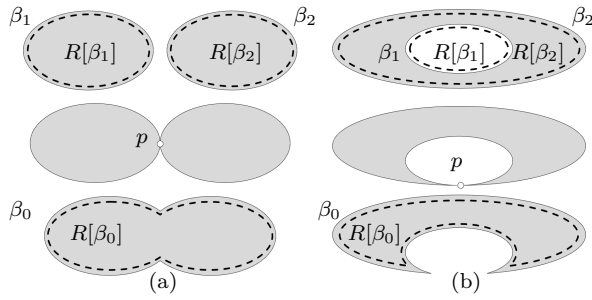


図 4 Reeb サイクルの状態

適化

初期ハンドル（トンネル）基底を $\{c_i\}_{i=1}^g$ とし、以下を行い、長さを最適化をする。

- (1) 初期の基底を $\mathcal{C}^{(0)} = \{c_i\}_{i=1}^g$ とする。 $k = 0$ とする。
- (2) 各サイクル $c^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$ からランダムに頂点を n 個選ぶ。得られた全ての頂点の集合を $\mathcal{V}^{(k)}$ とする。
- (3) 各頂点 $v \in \mathcal{V}^{(k)}$ を根とする最短パス木を構築する。その最短パス木に含まれない辺をその木に追加して出来るサイクルを計算する。得られた全てのサイクルの集合を $\mathcal{L}^{(k)}$ とする。
- (4) $\mathcal{L}^{(k)} \cup \mathcal{C}^{(k)}$ を長さ順に並び替える。アノテーションを用い、短い順に g 個の独立なハンドル（トンネル）サイクルを得る。これを、 $\mathcal{C}^{(k+1)}$ とする。
- (5) $\mathcal{C}^{(k+1)}$ の長さが収束した場合、もしくは、 k が設定した最大反復回数を超えた場合、この $\mathcal{C}^{(k+1)}$ を出力する。そうでない場合、 k を 1 増やし、(2) に戻る。

4. 自己交差を持つ閉曲面に対するハンドル・トンネルサイクルの定義

上述のように、自己交差を持つ曲面に対してはハンドル・トンネルサイクルは定義されていない。そこで、本研究では、現実のモデルに多く現れる自己交差を対象に、自己交差を持つ閉曲面 M に対するハンドル・トンネル基底の定義を行う。入力は、向き付け可能な閉曲面と同相な三角形メッシュとする。ただし、入力の頂点は一般の位置（3 点以上が同一直線上にない、4 点以上が同一平面上にない）にあるものとする。この定義で扱える自己交差は以下のようになる。

- 削る操作で新しく生成された曲面が、種数を持たない。
- 自己交差部分が 3 重以上ではない。

定義では、削る、という操作を用いる。これは、2 つの連結成分が重なった各々の部分（自己交差部分）に対し、互いを切り取ってできる部分曲面を s_1, s_2 とする。削る操作は、次のどちらかの操作のうち、種数が大きくなるほうを行う。

- s_1 を M から取り除き、 s_2 を反転した面を M に追加する。
- s_2 を M から取り除き、 s_1 を反転した面を M に追加する。

自己交差を持つ閉曲面 M に対するハンドル・トンネル基底の定義を定義 4 とする。また、 M のハンドル・トンネル基底の線形和として表すことが出来るサイクルを、それぞれ M におけるハンドル・トンネルサイクルとする。

定義 4. 自己交差を持つ閉曲面に対するハンドル・トンネル基底は、それぞれ以下のようにして得られる $\{h\}, \{t\}$ である。

- (1) 種数が最大となるように、閉曲面 M の自己交差部分を削る（図 5 (b)）。削る時に生成された曲面を $\mathbf{R} = \{R_i\}$ とし、元となった曲面を $\mathbf{I} = \{I_i\}$ とする。この時、 I_i の向きを反転した曲面が R_i である。また、生成された閉曲面を M_e とする。
- (2) M_e でハンドル・トンネル基底 $\{h_e\}, \{t_e\}$ を求める（図 5 (c)）。
- (3) 各 $I_i \in \mathbf{I}$ の境界 $\{b_j^{I_i}\}$ を取得し、 $b_j^{I_i}$ に対応するトンネルサイクル $t_{b_j^{I_i}}$ を求める（アルゴリズム 3）。これらのトンネルサイクルから、独立な組 $\{t_b\}$ を選ぶ（図 5 (d)）。また、どのトンネルサイクル t_b に対しても、奇数個の交点を持つハンドルサイクル h_b が存在するように、 $\{h_b\}$ を $\{h_e\}$ から選ぶ。
- (4) $\{h_b\}, \{t_b\}$ を用い、 $\{h_e\}, \{t_e\}$ に対してアルゴリズム 4 のサイクル変形を行う。変形後のサイクルをそれぞれ $\{h'_e\}, \{t'_e\}$ とする（図 5 (e)）。
- (5) 各 $\{h'_e\}, \{t'_e\}$ で、零ホモログなサイクルを取り除き、独立なサイクルを得る。それを $\{h'_e\}, \{t'_e\}$ と置き換える。
- (6) $\{h'_e\}, \{t'_e\}$ を M の同位置に写すことで得られた $\{h\}, \{t\}$ が、それぞれ M のハンドル基底、トンネル基底である（図 5 (f)）。

この定義では、まず、自己交差を持つ閉曲面 M から、種数が同じで自己交差が解消された閉曲面 M_s を得ることを目標としている。 M_s が得られた時、 M_s でのハンドル・トンネル基底を M の同位置に写すことで、 M のハンドル・トンネル基底としている。自己交差を解消するのは難しいが、この定義では、削る、という簡単な操作によって、自己交差を解消している。しかし、この時に生成される閉曲面 M_e の種数は M よりも大きくなってしまふ。そのため、増加した分だけ種数を減少させるように、特定のハンドルサイクルによって M_e を位相変形し、元々の閉曲

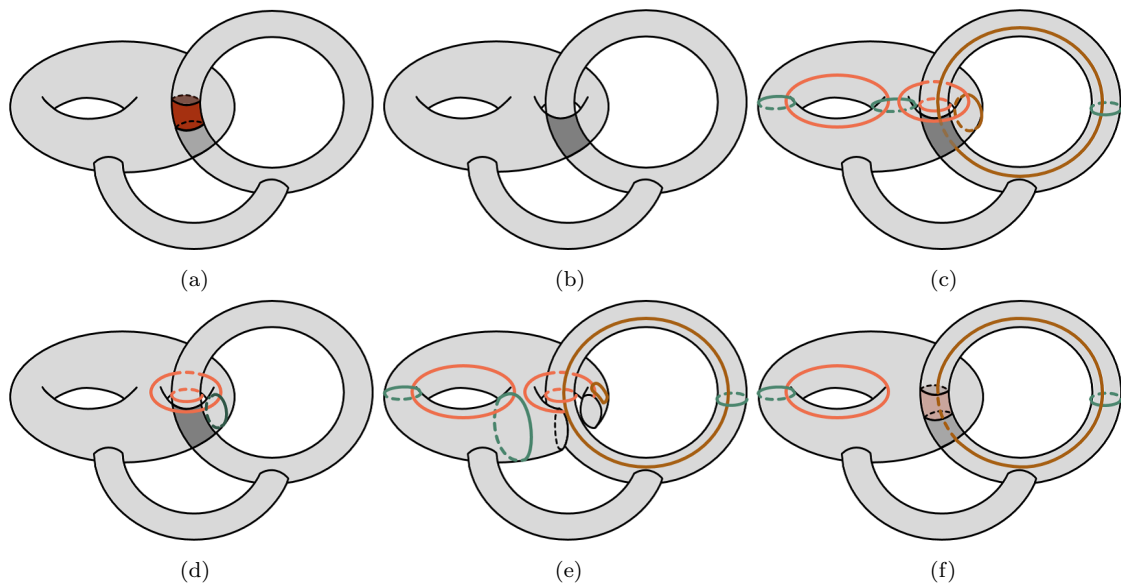


図 5 自己交差を持つ閉曲面に対するハンドル・トンネル基底の定義

面 M と同じ種数の閉曲面 M_s を得る. このハンドルサイクルの計算は, 定義 3 のように行う. 実際にハンドルサイクルによる位相変形を行う場合, そのハンドルサイクルが境界サイクルとなっているような, M_e の内部 $\mathbb{I}_e$ 中の部分曲面を計算する必要がある. この計算は難しいため, この定義では, 位相変形後の閉曲面 M_s のハンドル・トンネル基底を得るために, M_e におけるハンドル・トンネル基底を変形することで, 仮想的に位相変形を行う. M_s における各サイクルは, M の同位置に移すことができない. そのため, このサイクル変形では, 削るときに生成された曲面 R の曲面上の内部 $\dot{R}$ を通らず, 位相変形に使用したハンドルサイクルと交点を持たないように, M_e 上のハンドル・トンネル基底を変形する. サイクル変形によって得られるサイクルが, M_s でハンドル・トンネル基底となっていることは, 定理 2 で保証され, この基底を M に写すことができることは, 定理 3 で保障される.

アルゴリズム 3. 境界サイクルに対応したトンネルサイクルの計算

ハンドル・トンネル基底 $\{h_i\}, \{t_i\}$ に対し, 境界サイクル b と $\{h_i\}$ と各ハンドルサイクルの $\mathbb{Z}_2$ における交点数 c_{b,h_i} を求め, ベクトル $\mathbf{v} = (c_{b,h_i})$ を得る. 同様に, $\{t_i\}$ 中の各トンネルサイクルに対しても, ベクトル $\mathbf{v}_{t_i}$ を計算する. この時, $\mathbf{v} = \sum_i x_i \mathbf{v}_{t_i}$ となるような $x_i \in \mathbb{Z}_2$ を計算し, トンネルサイクル $\sum_i x_i t_i$ を返す.

定義 4 では, 変形に使用するハンドル・トンネルサイクル (定義 4 (3)) の選び方によって, 最終的に得られる M におけるハンドル・トンネル基底が変化する (図 6).

アルゴリズム 4. サイクル変形

定義 3 で得られた位相変形用のハンドル・トンネルサイ

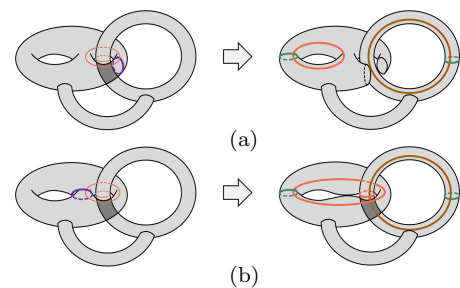


図 6 変形に用いるハンドル・トンネルサイクルに対する M_s のハンドル・トンネル基底

クルの集合 $\{h_i^n\}_{i=1}^n, \{t_i^n\}_{i=1}^n$ に対し, M_e のハンドル・トンネル基底 $\{h_i\}_{i=1}^{g+n}, \{t_i\}_{i=1}^{g+n}$ の各サイクル c が以下に当てはまる場合, 当てはまるもののみを上から順に 1 回だけ実行していく.

- (1) c がいずれかの $h_i^n \in \{h_i^n\}_n$ と奇数個の交点を持つ場合
 c と奇数個の交点を持つハンドルサイクルを $\{h_i^n\}_n$ の中から列挙する. 列挙したハンドルサイクルとのみ奇数個の交点を持つトンネルサイクルを, $\{t_i^n\}_{i=1}^n$ の張るベクトル空間から探し, それを t^n とする. c を $t_i + t^n$ に置き換える.
- (2) c が自己交差によって生成された曲面 R を通る場合, 次のように変形を行う.
 - (a) c が完全に R に含まれる場合
 c で曲面 R を分割し, 片方の部分曲面の c 以外の境界サイクルに置き換える (図 7 (a)).
 - (b) c の一部が R に含まれる場合
この場合, R に含まれる c の部分パス p の両端点の状態によって, 変形は以下になる.
 - (i) 両端点が同じ境界に含まれる場合

p で曲面 R を分割し、片方の部分曲面の c 以外の境界サイクルに置き換える (図 7 (b)).

(ii) 両端点異なる境界に含まれる場合

p の端点が属する 2 つの境界と同じ境界に端点が属するようなハンドルサイクルを、 $\{h_i^n\}_{i=1}^n$ の張るベクトル空間から探し、それを h^n とする. h^n の R に含まれる部分パスを r とする. R を境界を持つ曲面に対する 1 次元ホモロジー群と考えると、 $p+r$ は R 中で自明となるので、 $p+r$ を境界とする R の部分曲面 r が存在する. r を見つけ、 c を $c+h^n+r$ に置き換える (図 7 (c)).

4.1 正当性

以下の補題、定理では、自己交差を持つ種数 g の閉曲面を M 、 M を削る操作によって自己交差を解消した種数 $g+n$ の閉曲面を M_e とし、 M_e をハンドル・トンネルサイクル集合 $H_n = \{h_i^n\}_{i=1}^n, T_n = \{t_i^n\}_{i=1}^n$ によって位相変形してできた種数 g の閉曲面を M_s とする. M_e のハンドル・トンネル基底を $H_{g+n} = \{h_i^{g+n}\}_{i=1}^{g+n}, T_{g+n} = \{t_i^{g+n}\}_{i=1}^{g+n}$ とする. サイクル γ_1 がサイクル γ_2 方向に向いているとは、 γ_1, γ_2 のアノテーション $a(\gamma_1), a(\gamma_2)$ が、 $a(\gamma_1)a(\gamma_2) \neq 0$ であることをいうとする. また、サイクル γ_1 がサイクル集合 $\mathbf{R}_2$ の方向に向いているとは、サイクル γ_1 が 1 個以上のサイクル $\gamma_2 \in \mathbf{R}_2$ の方向に向いていることをいうとする. サイクル集合 $\mathbf{R}_1$ がサイクル集合 $\mathbf{R}_2$ の方向に向いているとは、1 つ以上のサイクル $\gamma_1 \in \mathbf{R}_1$ が $\mathbf{R}_2$ の方向に向いていることとする. サイクル c の基底 $X = T_{g+n} \cup H_{g+n}$ によるベクトル表示を $u_X(c)$ と表すとする. この時、全ての $h_i^n \in H_n, t_i^n \in T_n$ に対し、 $u_X(h_i^n), u_X(t_i^n)$ をそれぞれ法線とする超平面 $p_{h_i^n}, p_{t_i^n}$ をとり、その集合 $P_{H_n \cup T_n}$ を考える. H_{g+n}, T_{g+n} の全てのサイクルを、 $P_{H_n \cup T_n}$ の全ての超平面に投影し、できたサイクルのうち独立なものを $H_g = \{h_i^g\}_{i=1}^g, T_g = \{t_i^g\}_{i=1}^g$ とする. これが、今回求まる M のハンドル・トンネル基底となる. 説明を簡潔にするため、この操作を、 H_{g+n}, T_{g+n} から H_n, T_n に含まれるベクトル方向を取り除く、ということにする. さらに、 M_e の内部、外部をそれぞれ $\mathbb{I}_e, \mathbb{O}_e$ 、 M_s の内部、外部をそれぞれ $\mathbb{I}_s, \mathbb{O}_s$ とし、 h_i^n が $\mathbb{I}_e$ で境界となるような $\mathbb{I}_e$ 中の曲面を s_i^n とし、その集合を $S_n = \{s_i^n\}_{i=1}^n$ とする.

補題 1. M_e におけるハンドル (トンネル) サイクル $h_i^g \in H_g (t_i^g \in T_g)$ は、 M_s でもハンドル (トンネル) サイクルとなる.

証明 定義より、 $\mathbb{O}_e$ 中で境界が t_i^g となる曲面が存在するので、 $\mathbb{O}_s = \mathbb{O}_e \cup S_n$ 中でもそのような曲面が存在することは明らかである. また、 $\mathbb{I}_e$ 中で境界が t_i^g となる曲面

は存在しないので、 $\mathbb{I}_s = \mathbb{I}_e \setminus S_n$ 中でもそのような曲面が存在しないのは明らかである. 以上より、トンネルサイクルについては成り立つ. S_n をうまくとることで、同様の議論からハンドルサイクルについても成り立つ. $\square$

補題 2. M_s に写すことができる、 M_e における独立な g 個のハンドル (トンネル) サイクル集合 $H_g(T_g)$ は、 M_s の $\mathbb{R}^3$ 上で同位置に写しても独立なハンドル (トンネル) サイクルの集合となる.

証明 M_e 上のサイクル c を M_s に写す関数を f とする. H_g, H_n は独立なハンドルサイクルの集合である. $\lambda_i^g, \lambda_i^n \in \mathbb{Z}_2$ に対し、ハンドルサイクル $h = \sum_i \lambda_i^g h_i^g +$ を考える. この時、 $h' = f(h) = \sum_i \lambda_i^g f(h_i^g) = f(\sum_i \lambda_i^g h_i^g)$ である. 補題 1 より、 M_e 上の任意のハンドルサイクル γ に対して、 $f(\gamma) \neq 0$ が成り立つので、 $(\lambda_1^g, \lambda_2^g, \dots, \lambda_g^g) \neq \mathbf{0}$ の時、 $h' \neq \mathbf{0}$ である. 以上より、 $h' = \mathbf{0}$ となるのは、 $(\lambda_1^g, \lambda_2^g, \dots, \lambda_g^g) = \mathbf{0}$ の時のみであるため、 $\{f(h_i^g)\}$ は独立となる. $\square$

補題 3. 種数 $g+n$ の閉曲面 M_e のハンドル・トンネル基底 H_{g+n}, T_{g+n} の各サイクルを、 H_n, T_n によってサイクル変形を行い、その独立なサイクルの集合を得ることで、 H_n, T_n の各サイクルの方向を持たない、独立な g 個のハンドル・トンネルサイクルの集合 H_g, T_g を得ることができる.

証明 定理 1 より、交点数ベクトルによるアノテーションを関数 a とした時、2 つのサイクル γ_1, γ_2 の和 $\gamma_1 + \gamma_2$ のアノテーションは $a(\gamma_1 + \gamma_2) = \sum_{\sigma \in \gamma_1 + \gamma_2} a(\sigma) = a(\gamma_1) + a(\gamma_2)$ である. よって、 H_{g+n}, T_{g+n} から H_n, T_n に含まれるベクトル方向を取り除くためには、 $H_n \cup T_n$ の張るベクトル空間のアノテーションのベクトル方向を、 H_{g+n}, T_{g+n} の各サイクルのアノテーションから取り除くように、そのサイクルを変形すればよい. アルゴリズム 4 がこれを満たしていることを示す.

T_n 中のトンネルサイクル t_i^n は、必ず 1 つ以上のハンドルサイクルと交点を持つように H_n を求めている. T_n の線形和で得られるトンネルサイクルを t_n 、 H_n の線形和で得られるハンドルサイクルを h_n とすると、 t_n と奇数回の交点を持つような h_n が存在する. 対称性より、 h_n と奇数回の交点をもつような t_n が存在することも言うことができる.

アルゴリズム 4 (1) では、 t_n と奇数回の交点を持つサイクル h_i^g に対し、対応する h_n を足し合わせることで、 h_i^g の h_n 方向の成分を 0 にしている. また、 H_n の各ハンドルサイクルは、自己交差部分 R の異なる境界間を通る部

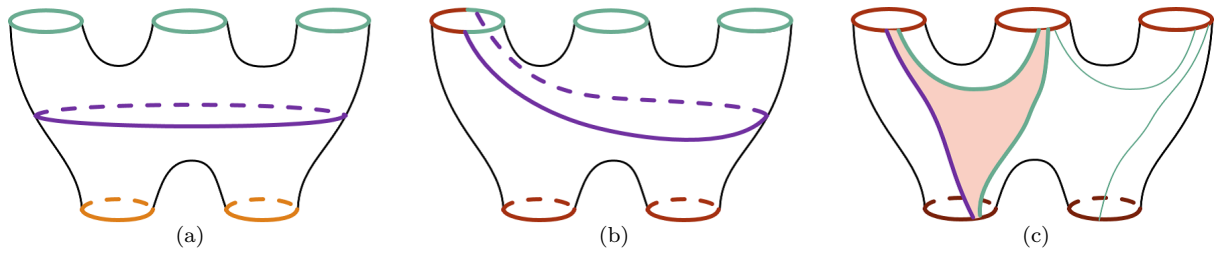


図 7 サイクルを自己交差点を通らないようにする変形

分パスをもつので、アルゴリズム 4 (2(b)ii) では、 h_n と奇数回の交点を持つサイクル h_i^g に対し、対応する t_n を足し合わせることで、 h_i^g の t_n 方向の成分を 0 にしている。アルゴリズム 4 の他の処理は、 M_e において、変形対象のサイクルに零ホモロジーなサイクルを足しているだけである。

よって、アルゴリズム 4 のサイクル変形によって、 H_n, T_n の各サイクルの方向を持たない、サイクル集合 H'_{g+n}, T'_{g+n} が得られる。このサイクル集合は、 $g+n$ 個のサイクルを持つが、 H_n, T_n の各サイクルの方向を持たないように変形したため、次数が g となる。よって、それぞれの集合から、独立な g 個のハンドル・トンネルサイクルの集合 H_g, T_g を得ることができる。□

定理 2. 閉曲面 M_e におけるハンドル・トンネル基底をアルゴリズム 4 のサイクル変形を行うと、閉曲面 M_s におけるハンドル・トンネル基底が得られる。

証明 補題 3 より、 M_e における $g+n$ 次元のハンドル・トンネル基底は、サイクル変形によってそれぞれ g 個の独立なハンドル・トンネルサイクルとなる。よって、補題 2 より、これらのサイクル集合は M_s でそれぞれハンドル・トンネル基底となる。□

定理 3. 種数 $g+n$ の閉曲面 M_e のハンドル・トンネルサイクルを、 H_n, T_n によってサイクル変形を行うと、 M の $\mathbb{R}^3$ での同位置に移すことができるサイクルとなる。

証明 M_e を H_n で位相変形し、 M_s を生成する。そのため、位相変形に用いる各ハンドルサイクル $h_i^n \in H_n$ と奇数個の交点を持つサイクルは、 M_s に写すことができない。偶数個の交点を持つ場合は、サイクルの交点間で、辺の接続を交換することで、ハンドルサイクルはハンドルサイクルのまま、トンネルサイクルはトンネルサイクルのまま自己交差を避けることができる。よって、奇数個の交点を持つサイクルは、偶数個の交点を持つように基底を組み換えればよい。このため、アルゴリズム 4 (1) を行う。

また、 M_s から M にサイクルを写すためには、削る操作で生成された曲面 S_n をサイクルが通ってはいけない。

S_n をサイクルが通るのは、3 通りに分類できるが、それぞれに対し、2a, 2(b)i, 2(b)ii を行うことで、 S_n を通らないサイクルに変形することができる。2a, 2(b)i は、変形対象のサイクルで S_n を分割してできた部分曲面の一方の境界サイクルを足し合わせる操作となっているが、これは、零ホモロジーなサイクルを変形対象のサイクルに足し合わせているだけなので、ハンドルサイクルはハンドルサイクルのまま、トンネルサイクルはトンネルサイクルのまま自己交差を避けることができている。2(b)ii は、変形対象のサイクルと同じ境界を端点としているハンドルサイクルを取得しているが、このハンドルサイクルは M_s 上では零ホモロジーである。 m_i^n で図 7 のように得ている曲面の境界サイクルは、零ホモロジーである。よって、この操作もサイクルに複数の零ホモロジーなサイクルを足し合わせているだけなので、ハンドルサイクルはハンドルサイクルのまま、トンネルサイクルはトンネルサイクルのまま自己交差を避けることができている。□

4.2 自己交差を持つ閉曲面に対するハンドル・トンネルサイクルの計算

自己交差を持つ閉曲面に対するハンドル・トンネルサイクルの計算は、定義 4 に沿って行う。自己交差を持たない閉曲面 M_e では、[2] を用いてハンドル・トンネル基底を計算する。ただし、削る操作によって生成された閉曲面 M_e において、曲面 $\mathbf{R}$ と曲面 $\mathbf{I}$ が $\mathbb{R}^3$ 上で同位置に存在する。そのため、そのままの [2] の手法では、絡み数の計算で誤った結果が求まってしまう。 $\mathbf{R}$ を摂動した閉曲面で絡み数の計算を行えば、この問題は解決するが、自己交差が新たに起こらないように曲面を摂動するのは難しい。そこで、 $\mathbf{R}$ を摂動した曲面を仮想的に考えて絡み数の計算を行う。これは、アルゴリズム 5 となる。

アルゴリズム 5.

2 つのサイクルが、同じ $\mathbb{R}^3$ 上の点を通る場合の絡み数の計算は以下のように行う。

- 2 つのサイクルの交点と同じ位相位置に存在する場合、既存手法と同じ方向に摂動する。
- 2 つのサイクルの交点異なる位相位置に存在する場合、それぞれの点での閉曲面の内部方向に摂動する。

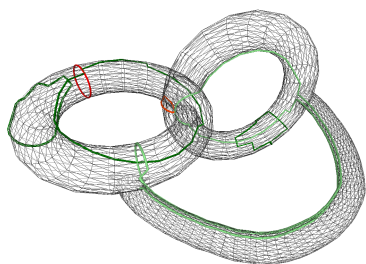


図 8 $M_e^{(1)}$ におけるハンドル・トンネル基底

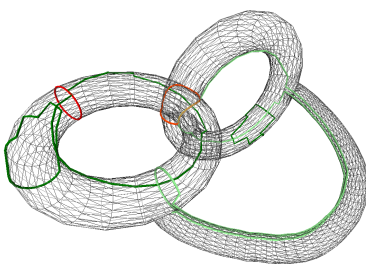


図 9 $M_e^{(1)}$ におけるサイクル変形後のハンドル・トンネルサイクル

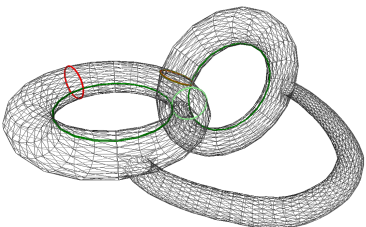


図 10 $M^{(1)}$ における最適化後のハンドル・トンネル基底

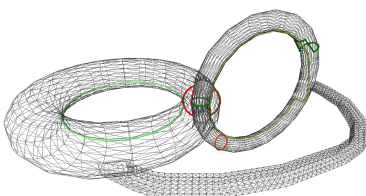


図 11 $M_e^{(2)}$ におけるハンドル・トンネル基底

5. 計算機実験

提案した手法で得られる結果を計算機実験によって確かめた。図 8, 図 9, 図 10 は, 自己交差部分が 1 つの境界を持つ場合の種数 2 の閉曲面 $M^{(1)}$ を, 入力とした場合の例であり, 図 11, 図 12, 図 13 は, 自己交差部分が 2 つの境界を持つ場合の種数 2 の閉曲面 $M^{(2)}$ を, 入力とした場合の例である。 $M^{(2)}$ は図 5 と同じ閉曲面である。赤いサイクルがハンドルサイクルであり, 緑のサイクルがトンネルサイクルである。複数のループの集合から成るサイクルも存在する。閉曲面は, ワイヤフレームで表示している。

6. おわりに

実際の閉曲面データに対してハンドル・トンネルサイク

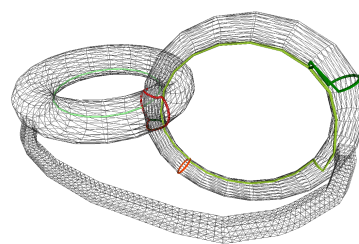


図 12 $M_e^{(2)}$ におけるサイクル変形後のハンドル・トンネルサイクル

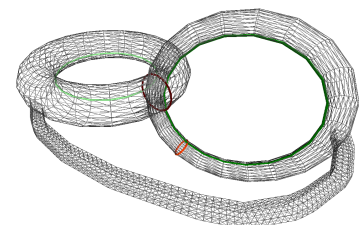


図 13 $M^{(2)}$ における最適化後のハンドル・トンネル基底

ルを計算するために, 自己交差を持つ閉曲面に対し, ハンドル・トンネルサイクルの定義を提案した。また, これを実装し, 計算機上でも計算が出来ることを示した。

今後の課題として, より多くの実際のデータに対応できるように, 対応する自己交差の種類を増やしたり, 境界を持つような閉曲面ではない曲面に対しても, ハンドル・トンネルサイクルを定義することなどが挙げられる。

謝辞 本研究の一部は科学研究補助金による。また, 本研究では [2] の実装として, Fengtao Fan の実装 [7] が非常に参考になったこと, ここに感謝を示す。

参考文献

- [1] Tamal K. Dey, Kuiyu Li, Jian Sun, David Cohen-Steiner, “Computing geometry-aware handle and tunnel loops in 3d models,” In *ACM Transactions on Graphics*, Volume 27, Issue 3, 45:1–49:9, 2008.
- [2] Tamal K. Dey, Fengtao Fan, Yusu Wang, “An efficient computation of handle and tunnel loops via Reeb graph,” In *the 2013 ACM Transactions on Graphics*, Volume 32, Issue 4, 32:1–32:10, 2013.
- [3] Dale Rolfsen, “Knots and Links,” In *ACM Sympos. Comput. Geom. (SoCG)*, pp.269–276, 2012.
- [4] Oleksiy Busaryev, Sergio Cabello, Chao Chen, Tamal K. Dey, Yusu Wang, “Annotating simplices with a homology basis and its applications,” In *SWAT*, Volume 7357, pp.189–200, 2012.
- [5] Erin W. Chambers, Jeff Erickson, Amir Nayyeri, “Minimum cuts and shortest homologous cycles,” In *Proceedings of the twenty-fifth annual symposium on Computation geometry*, pp.377–385, 2009.
- [6] Jeff Erickson, Kim Whittlesey, “Greedy optimal homotopy and homology generators,” In *Proceedings of the 16th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp.1038–1046, 2005.
- [7] ReebHanTun, <http://web.cse.ohio-state.edu/~tamaldey/handle.html>