

3次Bezier曲線の類型化

山田 翠[†] 齋藤 隆文[†] 吉田 典正[‡]

[†]東京農工大学 工学部

^{††}東京農工大学 大学院生物システム応用科学府

[‡]日本大学 生産工学部

1. はじめに

近年、工業デザインやスタイルデザインにおいて、高度に美的な曲線・曲面の生成が求められている。曲線の美しさは曲率の振る舞いに影響され、曲率は単調に変化するのが望ましいとされている [1]。しかし、単純な3次Bezier曲線ですえ、制御点と曲率単調性との関係は複雑であり [2, 3]、曲率変化の解析は未だ不十分である。このため、現状のCADシステムでは高いレベルの美しさを考慮した曲線の制御が困難である。

本研究では、3次多項式Bezier曲線の曲率解析を、制御点で指定された曲線セグメントとしてではなく、3次曲線集合全体として行うことで、新たな知見や制御・評価方法を得ることを目指す [4]。そのための準備として、本稿では、任意の3次Bezier曲線が、3次曲線の4つの基本形： $x^3 + x^2 - 3y^2 = 0$, $x^3 - 3y^2 = 0$, $x^3 - x^2 - 3y^2 = 0$, $x^3 - y = 0$ のいずれかの一部をアフィン変換したものとして表現できることを示す。

2. Moving Line

この研究ではその理論の大部分が moving line (Bernstein 基底による直線集合) [5] の考え方に基づいている。ここでは、いくつかの基本事項について定義を示す。

- 点: $P = (X, Y, W) = w(x, y, 1)$
- 直線: $L = (a, b, c): aX + bY + cW = 0$
- 直線 L 上の点 P : $P \cdot L = 0$
- 2点を通る直線: $L = P_0 \times P_1$
- 2直線の交点: $P = L_0 \times L_1$

- Bezier 曲線 (制御点 P_i): $P[t] = \sum_{i=0}^n B_i[t] P_i$

$$\text{ただし, } B_i[t] = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$$

- Moving line (制御線 L_i): $L[t] = \sum_{i=0}^n B_i[t] L_i$

- 曲線に追従する moving line (moving line に追従する曲線): $P[t] \cdot L[t] = 0$ (すべての t に対して $P[t]$ は $L[t]$ 上にある)
- 2曲線に追従する moving line: $L[t] = P_0[t] \times P_1[t]$
- 2つの moving line の交線としての曲線: $P[t] = L_0[t] \times L_1[t]$

3. 3次Bezier曲線の類型化

ここでは、以下の手順で類型化を行う。まず、3次Bezier曲線の制御点 P_i から、この曲線に追従する1次のmoving line $L_0[t]$ と2次の平行moving line $L_1[t]$ (常に平行に移動) を得る。次に、対応する基本形を決めるために曲線を分類する。そして、参照点 (D, E, F, G のうちの3つ) の座標を求め、そこからアフィン変換行列を得る。

3.1 double point D と1次moving line $L_0[t]$

3次多項式Bezier曲線は式(1)で示される。

$$P[t] = (1-t)^3 P_0 + 3(1-t)^2 t P_1 + 3(1-t) t^2 P_2 + t^3 P_3 \quad (1)$$

この曲線が2次以下で表現できない場合、曲線上の定点 $P[\tau]$ を通り、 $P[t]$ に追従するmoving line は、式(2)から求められる [5]。

$$L[t] = P[\tau] \times P[t] = (t-\tau)[(1-\tau)^2(1-t)\tau - \tau^2] \begin{bmatrix} Q_0 \times Q_1 & Q_0 \times Q_2 & Q_0 \times Q_3 \\ Q_0 \times Q_2 & Q_0 \times Q_3 + Q_1 \times Q_2 & Q_1 \times Q_3 \\ Q_0 \times Q_3 & Q_1 \times Q_3 & Q_2 \times Q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^2 \\ (1-t)t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$Q_0 = P_0 \quad Q_1 = 3P_1 \quad Q_2 = 3P_2 \quad Q_3 = P_3$$

この $L[t]$ は一般には2次であるが、 $P[\tau]$ が曲線のdouble pointであった場合は1次moving lineとなる [5]。これは式(3)から求められる。

$$L_0[t] = (1-t)L_{00} + tL_{01} \begin{cases} L_{00} = V_{023}(Q_0 \times Q_2) - V_{013}(Q_0 \times Q_3 + Q_1 \times Q_2) \\ \quad + V_{012}(Q_1 \times Q_3) \\ L_{01} = V_{023}(Q_0 \times Q_3) - V_{013}(Q_1 \times Q_3) + V_{012}(Q_2 \times Q_3) \end{cases} \quad (3)$$

ただし、 $V_{ijk} = Q_i \cdot (Q_j \times Q_k)$ である。

曲線のdouble point D は、この2つの制御線の交点として求められる。

$$D = L_{00} \times L_{01} \equiv w_D(x_D, y_D, 1) \quad (4)$$

Classification of Cubic Bezier Curves
Midori YAMADA[†], Takafumi SAITO[†],
Norimasa YOSHIDA[‡]

[†]Tokyo University of Agriculture and Technology

[‡]Nihon University

3.2 2次平行 moving line $L_1[t]$ とその存在範囲

もし D が無限遠点でない場合、曲線に追従する2次平行 moving line $L_1[t]$ は、式(2)で $\tau = \infty$ とおくことにより求められる。

$$L_1[t] = (1-t)^2 L_{10} + 2(1-t)t L_{11} + t^2 L_{12}$$

$$\begin{cases} L_{10} = (-Q_0 \times Q_1 + Q_0 \times Q_2 - Q_0 \times Q_3) \equiv (a_{10} \ b_{10} \ c_{10}) \\ L_{11} = (1/2)(-Q_0 \times Q_2 + Q_0 \times Q_3 + Q_1 \times Q_2 - Q_1 \times Q_3) \\ \equiv (a_{11} \ b_{11} \ c_{11}) \\ L_{12} = (-Q_0 \times Q_3 + Q_1 \times Q_3 - Q_2 \times Q_3) \equiv (a_{12} \ b_{12} \ c_{12}) \end{cases} \quad (5)$$

この moving line $L_1[t]$ は平行に移動し、ある半平面内に存在する。この半平面の境界線 $L_1[t_E]$ は、

$$L_1[t_E] = 0 \quad (6)$$

から求められ、これを解くと式(7)が得られる。

$$t_E = (c_{10} - c_{11}) / (c_{10} - 2c_{11} + c_{12}) \quad (7)$$

このとき、境界線と曲線との接点 E は、

$$E = L_0[t_E] \times L_1[t_E] \equiv w_E(x_E \ y_E \ 1) \quad (8)$$

3.3 曲線の分類と基本形からのアフィン変換

$f(t) = L_1[t] \cdot D$ とおき、2次方程式 $f(t) = 0$ (解が double point に対応) の判別式を D とおく。

Case 1: Crunode (自己交差) ($D > 0$ のとき) (図 1)

$f(t) = 0$ は2実数解を持つので、その大きい方を t_F とし、式(9)より点 F を求める。

$$F = L_0[t_F] \times L_1[t_F] \equiv w_F(x_F \ y_F \ 1) \quad (9)$$

このとき、基本形は式(10)で表され、式(11)のアフィン変換により曲線 $P[t]$ と一致する。

$$\begin{cases} x = \tilde{t}^2 - 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\tilde{t}^3 - \tilde{t}) \end{cases} \quad \tilde{t} \in \left[\frac{-t_E}{t_F - t_E}, \frac{1 - t_E}{t_F - t_E} \right]$$

$$(x^3 + x^2 - 3y^2 = 0) \quad (10)$$

$$M = \begin{bmatrix} x_D - x_E & \sqrt{3}(x_E - x_F) & x_D \\ y_D - y_E & \sqrt{3}(y_E - y_F) & y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Case 2: Cusp (尖点) ($D = 0$ のとき) (図 2)

$t_F = t_E + 1$ とし、式(12)より2点 F, G を求める。

$$\begin{aligned} F &= L_0[t_F] \times L_1[t_F] \equiv w_F(x_F \ y_F \ 1) \\ G &= L_0[t_E] \times L_1[t_E] \equiv w_G(x_G \ y_G \ 1) \end{aligned} \quad (12)$$

このとき、基本形は式(13)で表され、式(14)のアフィン変換により曲線 $P[t]$ と一致する。

$$\begin{cases} x = \tilde{t}^2 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{t}^3 \end{cases} \quad \tilde{t} \in [-t_E, 1 - t_E]$$

$$(x^3 - 3y^2 = 0) \quad (13)$$

$$M = \begin{bmatrix} x_G - x_D & \sqrt{3}(x_F - x_G) & x_D \\ y_G - y_D & \sqrt{3}(y_F - y_G) & y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Case 3: Acnode (孤立点) ($D < 0$ のとき) (図 3)

式(15)より点 G を求める。

$$G = (2x_E - x_D \ 2y_E - y_D \ 1) \equiv (x_G \ y_G \ 1) \quad (15)$$

2次方程式 $L_1[t] \cdot G = 0$ の解の大きい方を t_F とし、

式(16)より点 F を求める。

$$F = L_0[t_F] \times L_1[t_F] \equiv w_F(x_F \ y_F \ 1) \quad (16)$$

このとき、基本形は式(17)で表され、式(18)のアフィン変換により曲線 $P[t]$ と一致する。

$$\begin{cases} x = \tilde{t}^2 + 1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}(\tilde{t}^3 + \tilde{t}) \end{cases} \quad \tilde{t} \in \left[\frac{-t_E}{t_F - t_E}, \frac{1 - t_E}{t_F - t_E} \right]$$

$$(x^3 - x^2 - 3y^2 = 0) \quad (17)$$

$$M = \begin{bmatrix} (1/2)(x_G - x_D) & (\sqrt{3}/2)(x_F - x_G) & x_D \\ (1/2)(y_G - y_D) & (\sqrt{3}/2)(y_F - y_G) & y_D \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Case 4: 陽的3次曲線 (D が無限遠点) (図 4)

この場合は、1次 moving line $L_0[t]$ が平行となるため、曲線上の変曲点 E を通る2次 moving line $L_1[t]$ より、2点 F, G を求める (詳細省略)。

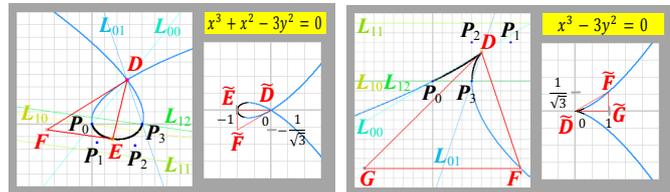


図 1 Crunode の例

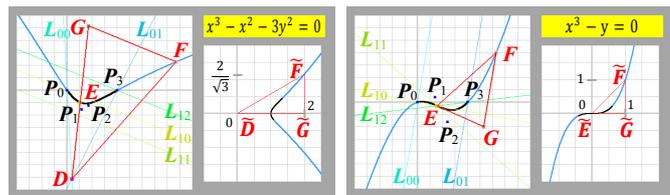


図 2 Cusp の例

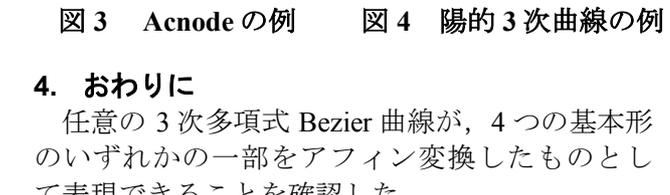


図 3 Acnode の例

図 4 陽的3次曲線の例

4. おわりに

任意の3次多項式 Bezier 曲線が、4つの基本形のいずれかの一部をアフィン変換したものとして表現できることを確認した。

今後は、これらの類型化を元に、各基本形状の曲率変化の解析を進める。

参考文献

- [1] Farin, G E., Sapidis, N., "Curvature and the fairness of curves and surfaces", Vol.9, No.2, pp.52-57 (1989).
- [2] Walton, D.J.; Meek, D.S.: Curvature extrema of planar parametric polynomial cubic curves, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.134, pp.69-83 (2001).
- [3] Dietz, D.A.; Piper, B.: Interpolation with cubic spirals, Computer Aided Geometric Design, Vol.21, pp.165-180 (2004).
- [4] 斎藤隆文, 吉田典正: 3次パラメトリック曲線の曲率変化の美的解析, 情報処理学会研究報告, Vol.2012-CG-148, No. 1, pp.1-6 (2012).
- [5] Sederberg, T. W., Saito, T., Qi, D., Klimaszewski, K. S., Curve implicitization using moving lines, Computer Aided Geometric Design, Vol.11, pp.687-706 (1994).