2B-6

P/Tペトリネットにおける特解導出法に関する一考察

恐神正博 † 山西輝也 † 魚崎勝司 †
† 福井工業大学 経営情報学科

1 はじめに

離散事象システムの有用なモデルの１つであるP/Tペトリネットにおいて，その挙動を考える際に，最も基本的な問題のうち可到達判定問題がある．これは，初期マーキング M_0 から 目標マーキング M_d へトークンが遷移可能かどうかを判定するものであり，解法には被覆木，状態方程式，ペトリネットの構造と性質に着目する３つの手法があるが，被覆木を用いた方法は一般に膨大な計算量を必要とする一方，状態方程式を用いる方法は，ペトリネットの性質を代数方程式の解の存在として考察できる利点があるため，その解法や，解の表現方法などについての研究が進められてきている [1].

ここでは，状態方程式の解法としてよく知られたFourier-Motzkin 法 [2] により初等的 T-インバリアント [1] および特解 [3] が導出できることを述べるともに，Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムをそのまま用いることで，状態方程式 $Ax = b$ の任意の非負整数解を表現するための展開係数が得られることを示す.

2 状態方程式

ペトリネットにおいて，目標マーキング M_d が，発火系列 $\{t_1, t_2, \cdots, t_d\}$ を通して初期マーキング M_0 から可達であると仮定した場合，$i = 1, 2, \cdots, d$ に対する状態方程式を求め，和をとると,

$$M_d = M_0 + A \sum_{k=1}^{d} t_k \tag{1}$$

で表され．また，$A \in Z^{m\times n}$, $b = M_d - M_0 \in Z^{m\times 1}$ および $x = \sum_{k=1}^{d} t_k \in Z_+^{n\times 1}$ とすると，式 (1) は次のように書き直すことができる.

$$Ax = b. \tag{2}$$

ここで，式 (2) の解 x を求めることで，初期マーキング $M_0 \in Z_+^{m\times 1}$ から目標マーキング $M_d \in Z_+^{m\times 1}$ にいたる発火回数ベクトルを得ることができる.

3 Fourier-Motzkin 法 [2]

Fourier-Motzkin 法は初等的ベクトル解のすべて（$Ax = 0^{m\times 1}$ の非負整数解）を含むようなベクトル解の集合を算出する方法であり，そのアルゴリズムは以下のとおりである.

＜ Fourier-Motzkin（FM）法のアルゴリズム＞

入力：接続行列　$A \in Z^{m\times n}$

出力：初等的ベクトル解のすべてを含むベクトル解の集合.

初期化：接続行列 $A \in Z^{m\times n}$ の下に単位行列 $E^{n\times n}$ を置いた $B = [A\ E]^T \in Z^{(m+n)\times n}$ とする.

`Step1`; 行列 B の第 i 行に対し，B のすべての要素が零ならば，$i = i + 1$ とし，Step2 へ，少なくとも１つ零でない要素があれば，Step3 へ.

`Step2`; もし，$i \leqq m$ なら，Step1 へ，そうでなければ Step4 へ.

`Step3`; 行列 B の第 i 行に対し，B の第 i 行の 0 でない要素を 0 にするような B の２つの列の正係数一次結合（ただし係数は最小のものを選ぶ）をすべて B の列に加え，これを新しく B とする．さらに，第 i 行に 0 でない要素を持つすべての列を B から削除し，これを新しく B とする．$i = i + 1$ とし，Step2 へ.

`Step4`; 行列 B の第１行から第 m 行までを取り除いた部分行列の各列は $Ax = 0^{m\times 1}$ の非負整数解を表している.

一方，この Fourier-Motzkin 法は通常，状態方程式 $Ax = b$ を考えた場合の $b = 0$ すなわち $Ax = 0$ の解，T-インバリアントを求めるための手法であるが，接続行

A study of a method for Finding Particular Solutions in P/T Petri Nets

Masahiro OSOGAMI†, Teruya YAMANISHI†and Katsuji UOSAKI†
†Department of Management Information Science, Fukui University of Technology
3-6-1 Gakuen, Fukui, 910-8505, Japan
{osogami, yamanisi, uosaki}@fukui-ut.ac.jp

列 A を拡大し，拡大接続行列 $\widetilde{A} = [A \ -b] \in Z^{m\times(n+1)}$ とし，$\widetilde{A}\widetilde{x} = 0$ の解 $\widetilde{x}$ を通常と全く同じアルゴリズムにより求めることで，$Ax = b$ における解，すなわち発火回数ベクトルを求めることができる [4].

4 発火回数ベクトルを T-インバリアントと特解で表現するときの展開係数導出

§3 において，状態方程式 $Ax = b$ の解 x を求めるアルゴリズムを示したが，一般にペトリネットを解析する上で，状態方程式の解（非負整数解発火回数ベクトル）が，複数存在する初等的 T-インバリアントおよび特解を用いて，それらがどのように組み合わさって表現されているのか，いわゆるその展開係数を求めることは，ペトリネットの挙動検証を効率よく行う上でも有用とされている [3].

一般的に，ペトリネットの状態方程式，$A \in Z^{m\times n}$, $b \in Z^{m\times 1}$ のときの $Ax = b$ の任意の非負整数解 $x \in Z^{n\times 1}$ は，次式で与えられる.

$$x = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i u_i + v_j. \tag{3}$$

なお式 (3) において，$\alpha_i \in Z_+^{1\times 1}$, $u_i \in U := \{u_i \in Z_+^{n\times 1}\ ;\ Ax = b$ の T インバリアント，$i = 1, 2, \cdots, l\}$, $v_j \in V := \{v_j \in Z_+^{n\times 1}\ ;\ Ax = b$ の特解，$j = 1, 2, \cdots, k\}$ である.

すなわち，ペトリネットにおける初等的 T-インバリアントと特解のすべてを求めれば，それらの組み合わせで，状態方程式 $Ax = b$ の任意の非負整数解（発火回数ベクトル）が求められる．今，式 (3) で，U, V, $x \in Z_+^{n\times 1}$, がそれぞれ与えられていたとき，v_j を移項することで式 (3) は,

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i u_i = x - v_j$$

と変形でき，これは

$$[u_1, u_2, \cdots, u_l]\alpha = [x - v_j] \in Z_+^{n\times 1} \tag{4}$$

である．ここで，式 (4) において，$[u_1, u_2, \cdots, u_l] \to A'$, $\alpha \to x'$, $[x - v_j] \to b'$ とおくと，式 (4) は,

$$A'x' = b' \tag{5}$$

と表すことができ，これは式 (5) すなわち式 (3) が，式 (2) で示す $Ax = b$ と同じ型の方程式となることを意味する [3][5]．そこで，§3 で示した Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムを式 (5) に用い x' を求めることで，展開係数，$\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_l]^T \in Z_+^{l\times 1}$ を求めることができる．すなわちこれは，ある可達な発火回数ベクトルの展開係数を求める方法の１つとして，Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムをそのまま用いることが可能であることを示している.

なお，これらに関する例題，実行例，および，インプリメント等は発表時に示す.

5 まとめ

離散事象システムの有用なモデルの１つである P/T ペトリネットにおいて，その状態方程式 $Ax = 0$ の解法として知られている Fourier-Motzkin 法により，初等的 T-インバリアントおよび特解が求められることを示すとともに，ペトリネットにおける挙動検証に有用とされる展開係数についても，T-インバリアントのすべてと特解の１つを用いることで，Fourier-Motzkin 法のアルゴリズムがそのまま利用できることを示した.

今後の課題としては，Fourier-Motzkin 法により求めきれない解の導出などアルゴリズムのさらなる改善があげられる.

謝　辞

本研究の一部は科研費 (課題番号 24501221) および (課題番号 23560543) と，福井県大学連携リーグ連携研究推進事業，ならびに，福井工業大学学内特別研究費 (クラスタ D) の助成を受けたものである．記して謝意を表する.

参考文献

[1] 村田: ペトリネットの解析と応用, 近代科学社, 1992.

[2] 市川, 熊谷, 薦田: ペトリネットとその応用, 計測自動制御自動学会, 1992.

[3] 松本, 茂呂, 恐神: “P/T ペトリネットの発火回数ベクトルを T インバリアントと特解で表すときの展開係数導出法”, 信学技報, Vol.106, No.367, pp.19–24(CST2006-21), 2006-11.

[4] 恐神, 山西, 魚崎: “P/T ペトリネットにおける特解導出のためのアルゴリズムに関する一考察”, FIT2012(第 11 回科学技術フォーラム), A-023, 2012-09.

[5] 松本, 恐神, 茂呂: “事象駆動型離散事象システムの挙動検証に関する一考察”, 平成 18 年度電気関係学会北陸支部連合会, H-13, 2006-9.