

## ランダムな近傍セル選択による 等方的 BZ 反応セルオートマトンについて

小林 美緒<sup>†</sup>

阿南工業高等専門学校 制御情報工学科<sup>†</sup>

### 1. まえがき

興奮性触媒にみられる Belousov-Zhabotinsky (BZ) 反応は、系内に存在するいくつかの物質の濃度が周期的に変化することにより、振動現象が発生し、同心円波や螺旋波などの進行波が観察されることが特徴的である [1]. BZ 反応のダイナミクスは反応拡散方程式で記述することができ、化学実験でみられる同心円波や螺旋波を再現することができる. BZ 反応を再現する他のよく知られた数理モデルとしてセルオートマトン (CA) が知られている. CA は時間、空間、および、状態のすべての変数が離散的なモデルであり、セルの状態変化は、近傍セルの状態に基づくシンプルなルールにより記述されるため、少ない計算コストで現象を再現することができるという利点がある. しかしながら、CA は、その離散的なセル格子の形状に起因して、同心円波や螺旋波の生成パターンが非等方的になるという問題点がある. BZ 反応を再現する等方的な CA モデルとして、近傍セルをあらかじめ円形に選択することで、セル格子の形状に起因した非等方性を除去するモデルが考案されている [2]. このモデルは、現象をよく再現するが、近傍セルを円形に選択するため、広範囲にセルを選択する必要が生じ、計算時間の観点から CA の利点を生かし切れていないという問題点があった. この問題点の改善のために、よりシンプルに等方的な BZ 反応パターンを再現する CA モデルとして、時間発展ルールに確率的な要素を加えた CA モデルが考案された [3]. 具体的には、あるセルが励起する際のしきい値として異なる二値を考え、各セルのしきい値を、確率的選択により二値のうちどちらかの値に設定する方法を用いる. この CA モデルは、たかだか、8 近傍セルで記述される時間発展ルールであるにもかかわらず、等方的な BZ 反応パターンを再現することを可能にしている.

本研究では、前述の二値のしきい値を用いた CA モデルに対し、時間発展ルールに用いる近傍セルの選択に確率的要素を取り入れることで、一つのしきい値のみを用いて、等方的な BZ 反応パターンを再現する CA モデルを構築した. 前述の二つのしきい値を用いた CA モデルと提案モデルにおいて生成される BZ 反応パターンの等方性と伝搬速度についての比較を行った. 提案モデルでみられるシングルリングパターンはより優れた等方性を保ちながら、高速に伝搬することが明らかとなった.

### 2. 等方的 BZ 反応 CA モデルのシミュレーション

提案モデルは、 $n \times n$  の 2 次元正方格子上で定義される. セルは興奮性触媒の活性因子と抑制因子に対応した 2 つの状態変数  $u_{ij}(t)$ ,  $v_{ij}(t)$  をもつ. ここで、 $i, j$ , および、 $t$  は、それぞれ格子点の行、列、および、離散時間を示す.  $u_{ij}(t)$  と  $v_{ij}(t)$  は、それぞれ、0 から  $N-1$  までの値をとるものとする. 時刻  $t+1$  のセルの状態は、時刻  $t$  における近傍セルの活性因子の状態に基づき決定される. 近傍セルの活性因子の和  $S_{ij}(t)$  を次のように定義する.

$$S_{ij}(t) = \sum_{k \in L_{ij}} u_k(t) \quad (1)$$

ここで、 $L_{ij}$  は、注目セルの 8 近傍セルからランダムに選ばれた  $d$  個のセルの集合を示す.  $L_{ij}$  に含まれる  $d$  個のセルの組合せは、全部で  ${}_8C_d$  通り存在する.  $L_{ij}$  は、初期条件として決定され、時間変化によらず一定とする. 時刻  $t+1$  でのセルの状態は、セルの励起を制御するしきい値  $\Delta$  を用いた以下のルールにより決定される.

- (1)  $u_{ij}(t) = v_{ij}(t) = 0$  かつ  $S_{ij}(t) \geq \Delta$  のとき、  
 $u_{ij}(t+1) = 1, v_{ij}(t+1) = 0$
- (2)  $u_{ij}(t) = v_{ij}(t) = 0$  かつ  $S_{ij}(t) < \Delta$  のとき、  
 $u_{ij}(t+1) = v_{ij}(t+1) = 0$
- (3)  $u_{ij}(t) + v_{ij}(t) \neq 0$  のとき、  
セルは図 1 の矢印の経路に従い、次の状態に遷移

本研究では、パラメータ  $N$  と  $\Delta$  に注目しシミュレーションを行い、生成パターンの等方性について検討した.

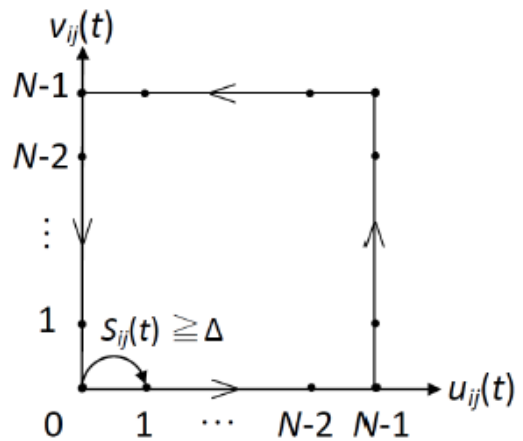


図 1 時間発展ルールの相図.

### 3. シミュレーション解析結果

図 2 (a)-(d)は、シングルリング、ターゲット、およびスパイラルの伝搬波形のスナップショットである。図 2 (a)-(c)は、2次元正方格子の中央セルの状態変数の初期値を  $u_{ij}(0) = 1, v_{ij}(0) = 0$  として得られた。図 2(d)は、シングルリングの伝搬波形を適当な時刻  $t$  で停止し、半円部分をシミュレーションの初期状態として用いることで得られる。各セルの  $u_{ij}(t)$  の値 (0から  $N-1$ ) をグレースケール (0から255) に対応させ表示している。図 2 (a)にみられる伝搬波形は8角形であるが、図 2 (b)-(d)は、いずれも円形 (同心円) に近く、等方性を保持している。 $d = 8$  のとき、式 (1) の  $L_{ij}$  は、セル  $C_{ij}$  の8近傍セルすべてを含むため、セル格子の形状に起因して、伝搬波形が多角形となる。 $d = 6$  のとき、式 (1) の  $L_{ij}$  に含まれるセルは6個であり、8近傍セルからランダムに選択される。セル選択時のランダム性により、セル格子の形状による影響を排除することができ、等方性を保持した伝搬波形が実現できる。

図 3 はシングルリングの平均半径と誤差率を示している。記号 a-c で示される曲線は、提案モデルにおいて、 $N = 5, 7, 10$  としたときの結果を示している。記号 d で示される曲線は、従来モデル ( $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 7, N = 5$ ) [3]の結果である。シングルリングの半径が大きくなるにつれ誤差率が減少していることから、等方性が保たれていることがわかる。

図 4 はシングルリングの伝搬速度比較を示している。記号 a, b で示される実線と点線は、提案モデル ( $\Delta = 3, d = 6, N = 5$ ) と従来モデル ( $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 7, N = 5$ ) の伝搬速度を示している。提案モデルの方が高速に伝搬することがわかる。従来モデルの一つのしきい値を提案モデルと同一に設定しているが、しきい値が一つのみ提案モデルの方が励起に必要なステップ数が少ないため、波形伝搬が高速であると考えられる。

### 4. まとめ

時間発展ルールに用いる近傍セルの選択に確率的要素を取り入れた等方的 BZ 反応 CA モデルを提案した。提案モデルと従来の等方的 BZ 反応 CA モデルについて、生成パタンの等方性と拡散速度の比較を行った。提案モデルでみられる生成パターンがより等方的であり、高速に伝搬することが明らかとなった。

### 参考文献

- [1] A. N. Zaikin and A. M. Zhabotinsky, "Concentration wave propagation in two dimensional liquid-phase self-oscillating system," *Nature* 225, pp. 535-537, 1970.
- [2] M. Markus and B. Hess, "Isotropic cellular automaton for modelling excitable media," *Nature* 347, pp. 56-58, 1990.
- [3] A. Nishiyama, H. Tanaka, and T. Tokihiro, "An isotropic cellular automaton for excitable media," *Physica A*, vol. 387, no. 13, pp. 3129-3136, 2008.

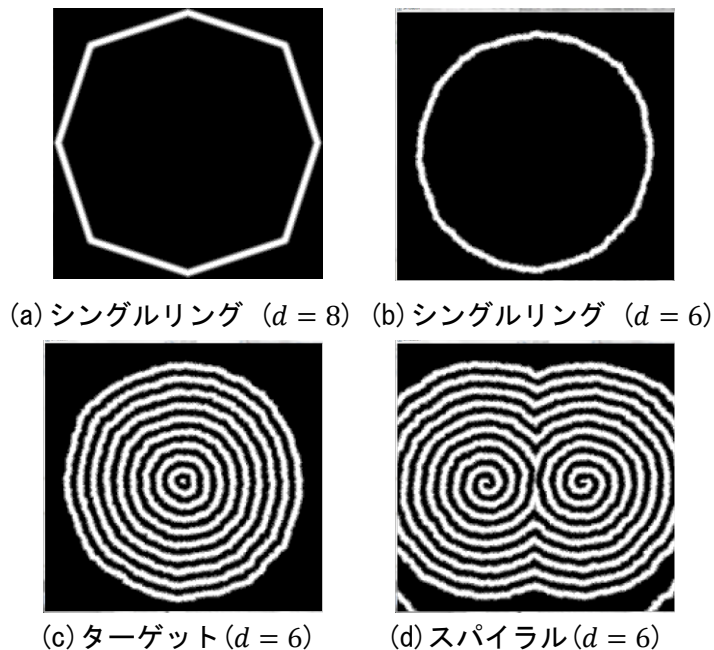


図 2 伝搬波形 ( $\Delta = 3, N = 5, t = 150$ ).

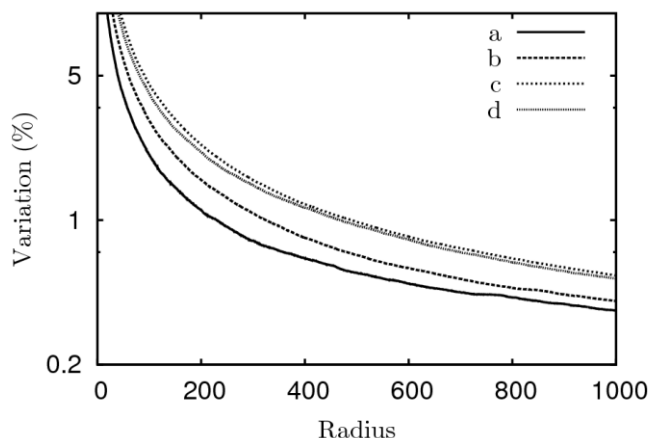


図 3 シングルリングの平均半径と誤差率 ( $\Delta = 3, d = 6$ ). a:  $N = 5$ , b:  $N = 7$ , c:  $N = 10$ , d: 従来モデル ( $\Delta_1 = 3, \Delta_2 = 7, N = 5$ ).

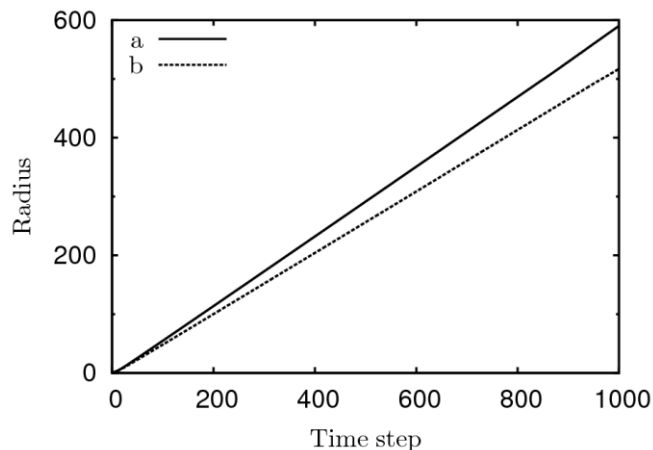


図 4 シングルリング伝搬速度比較. a: 提案モデル, b: 従来モデル.