

# ガウス誤差関数を利用した 収束の速いヒルベルト変換デジタルフィルタ

吉川浩<sup>†</sup> 棟方渚<sup>†</sup> 小野哲雄<sup>†</sup>

<sup>†</sup>北海道大学 大学院情報科学研究科

## 1 はじめに

ヒルベルト変換は、実世界の信号（実数信号）から複素信号を生成するために用いられ、デジタル信号処理において非常に重要な役割を担っている。

ヒルベルト変換をデジタルFIRフィルタで実現する場合、方形窓で帯域制限する方法や、Parks-McClellan法 [1]（以下PM法）などが用いられる。方形窓は誤差を小さくするためにフィルタのタップ数を多くする必要がある。一方、反復アルゴリズムであるPM法は計算量が多く、反復が終了しないこともある。

本稿では、インパルス応答波形が素早く零に収束する窓関数を見つけ、それを用いたフィルタを提案する。そして提案フィルタがPM法と同等の性能を持つことを実験で示す。

## 2 FIRフィルタとヒルベルト変換

FIRフィルタは、周波数領域での積が時間領域での畳み込み積分となることを利用する。入力信号を  $\{x_n\}$ 、フィルタのインパルス応答を  $\{h_n\}$  とすると出力  $\{y_n\}$  は下記の畳み込み積分で与えられる。

$$y_n = \sum_{\ell=-N}^N h_{\ell} \cdot x_{n-\ell} \quad (1)$$

理想的なヒルベルト変換は任意の周波数の位相を90度遅らせる変換である。その周波数特性は虚数単位を  $i$  とすると次の式 (2) で表される。

$$H(\omega) = -i \cdot \text{sign}(\omega) \quad (2)$$

理想ヒルベルト変換フィルタを実現することはできないが、帯域を制限することによってFIRフィルタとして実現できる。

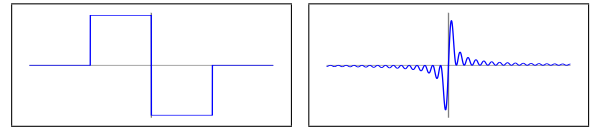


図1: 方形窓を用いた場合のヒルベルト変換特性  $H_0(\omega)$  (左図) およびインパルス応答波形  $h_0(t)$  (右図)

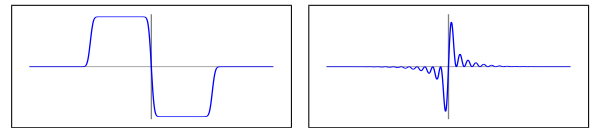


図2: 提案手法によるヒルベルト変換特性  $H_1(\omega)$  (左図) およびインパルス応答波形  $h_1(t)$  (右図)

## 3 方形窓による帯域制限の問題点

方形窓を掛けて帯域を制限し、そのインパルス応答波形をFIRフィルタ係数にすることを考える。例えば式 (2) の帯域を  $[-\omega_c, \omega_c]$  に制限した場合のヒルベルト変換特性は次式 (3) で表され、そのグラフは図1左のようになる。なおグラフの縦軸は虚数である。

$$H_0(\omega) = \begin{cases} -i \cdot \text{sign}(\omega) & (|\omega| \leq \omega_c) \\ 0 & (|\omega| > \omega_c) \end{cases} \quad (3)$$

このときの  $H_0(\omega)$  のインパルス応答（これを  $h_0(t)$  とする）の式とグラフはそれぞれ式 (4)、図1右である。

$$h_0(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_0(\omega)] = \frac{2 \left( \sin\left(\frac{\omega_c t}{2}\right) \right)^2}{\pi t} \quad (4)$$

$h_0(t)$  の包絡線は  $1/t$  に比例して零に収束するが、この収束スピードは速いとは言えず、式 (1) の  $N$  が有限の場合に打ち切り誤差が大きくなる。

## 4 提案手法の説明

方形窓のインパルス応答が零に収束しにくい原因は  $H_0(\omega)$  が不連続点を持つためである。そこで我々は、滑らかな関数でそのインパルス応答が  $1/t$  よりも速く収束する窓関数を考えた。以下に説明する。

最初に、連続関数でそのインパルス応答波形が  $1/t$  よりも高速に零に収束するガウス関数（式 (5)）に着目した。

**Fast Converging Hilbert Transformation FIR Filter using Gaussian Error Function**

Hiroshi YOSHIKAWA<sup>†</sup>, Nagisa MUNEKATA<sup>†</sup> and Tetsuo ONO<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Graduate School of Information Science and Technology, Hokkaido University

N14-W9, Kita-ku, Sapporo, 060-0814 Japan

{yoshikawa, munekata, tonon}@complex.ist.hokudai.ac.jp



図 3: ガウス関数 (左) とそれを積分した関数 (右)

$$e^{-\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)^2} \quad (5)$$

しかし、ガウス関数は通過域が平坦ではないという問題がある (図 3 左)．これに対し、ガウス関数を積分することで平坦な通過域を得ることができた．

$$W(\omega) = \frac{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\left(\frac{\omega-x}{\sigma}\right)^2} dx}{\int_{\omega_1}^{\omega_2} e^{-\left(\frac{\omega_1+\omega_2-x}{2\sigma}\right)^2} dx} \quad (6)$$

分母は振幅を正規化するための定数である．この窓関数の通過域は 図 3 右 のように平坦である．

ガウス関数を積分して得られる窓  $W(\omega)$  を使って、次のようにヒルベルト変換を定義する．

$$H_1(\omega) = i \cdot W(-\omega) - i \cdot W(\omega) \quad (7)$$

特に  $\omega_1=0$ ,  $\omega_2=\omega_c$  のとき右辺は次式となる．

$$\frac{i \left( \operatorname{erf} \left( \frac{\omega-\omega_c}{\sigma} \right) + \operatorname{erf} \left( \frac{\omega+\omega_c}{\sigma} \right) - 2\operatorname{erf} \left( \frac{\omega}{\sigma} \right) \right)}{2 \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{\omega_c}{2\sigma} \right)}$$

ここで  $\operatorname{erf}(x)$  は 式 (8) で定義されるガウスの誤差関数である．

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du \quad (8)$$

$H_1(\omega)$  を  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = \pi$ ,  $\sigma = 1/6$  で描いたグラフを 図 2 左 に示す．また、 $H_1(\omega)$  のインパルス応答  $h_1(t)$  の式とグラフをそれぞれ 式 (9), 図 2 右 に示す．

$$h_1(t) = \mathcal{F}^{-1}[H_1(\omega)] = \frac{2e^{-\left(\frac{\sigma t}{2}\right)^2} \left( \sin \left( \frac{\omega_c t}{2} \right) \right)^2}{\pi \cdot \operatorname{erf} \left( \frac{\omega_c}{2\sigma} \right) t} \quad (9)$$

式 (9) は  $e^{-\left(\frac{\sigma t}{2}\right)^2} / t$  に比例して減衰する．この減衰スピードは  $h_0(t)$  に比べて速い．このことは 図 1 右 と 図 2 右 の比較からも理解できる．

## 5 実験と考察

提案手法のフィルタ性能を調べるため、提案手法、PM法、方形窓の各手法で FIR フィルタ係数を求め、そのフィルタの特性を比較した．

### 5.1 実験条件

FIR フィルタ係数を求める方法は、提案手法は式 (9)、方形窓は式 (4)、PM 法については参考文献 [2] のプログラムを用いた．

タップ	$f_{c1}$	$f_{c2}$	提案手法のパラメータ設定
101	0.03	0.47	$\omega_c=\pi, \sigma=0.0817$
51	0.10	0.40	$\omega_c=\pi, \sigma=0.212$
27	0.10	0.40	$\omega_c=\pi, \sigma=0.277$

表 1: 実験パラメータ設定

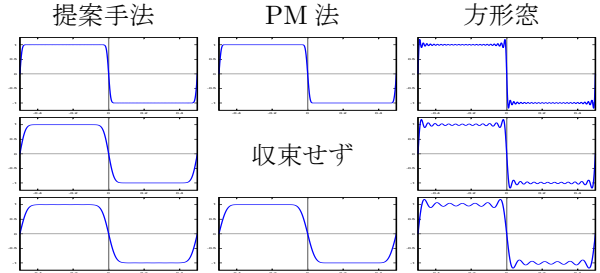


図 4: 実験結果．上からタップ数の条件が 101, 51, 27 の場合．条件 51 の PM 法は収束せず．

実験パラメータは、タップ数 ( $=2N + 1$ ) と正規化カットオフ周波数  $f_{c1}, f_{c2}$  を表 1 に示す 3 通りに設定した．なお、提案手法はカットオフ周波数を明示的に与えられないため、代わりに同等のカットオフ周波数を与える  $\omega_c$  と  $\sigma$  を用いた．

### 5.2 実験結果と考察

各条件で生成されたフィルタの特性を図 4 に示す．タップ数が 51 のときの PM 法は計算結果が収束しなかったが、提案手法では係数を求めることができ、通過域のリップルはおよそ  $2.6 \times 10^{-5}$  であった．他の条件では、提案手法は PM 法と比較して誤差が若干大きいもののほぼ同等の性能を実現しており、本提案手法が有効であることが示された．

## 6 まとめ

本稿では、ガウス誤差関数を用いたヒルベルト変換特性を定義し、その連続インパルス応答波形から FIR フィルタ係数を求めた．また、得られたフィルタが実用上十分な性能を持っていることを実験で示した．

## 参考文献

- [1] Parks, T.W. and McClellan, J.J. "Chebyshev Approximation for Nonrecursive Digital Filters with Linear Phase." IEEE Trans. Circuit Th. 19, pp.189-194, 1972.
- [2] 三上直樹: はじめて学ぶデジタル・フィルタと高速フーリエ変換, CQ 出版, 2005