3B-5

設備配置モデルによる不均質な相互結合網構築の検討

當山 孝義

日本工業大学電気電子工学科

1. はじめに

並列計算システムの性能はプロセッサ(PE)の性能とともに PE 間を接続する相互結合網の性能に依存する．従来，単一性能の通信路を用いたさまざまな相互結合網が提案され，その性質が示されている．全く新しい形状の相互結合網を構築するのは考慮すべきことが多く難しい．一方，低速通信路からなる相互結合網に高速通信路を追加するのは相互結合網の形状が複雑になってしまう．そこで，低速通信路からなる相互結合網の形状を変えずに一部の通信路を高速なものに入れ替えることで不均質な相互結合網を構築する．この不均質な相互結合網の通信性能は高速通信路の数と位置に依存する．

最適化問題のひとつに設備配置問題がある[1]．本研究では，高速通信路を設備と考え，設備配置問題を利用する．設備の評価指標として全対距離和[2]を用いる．本稿では一般形状の相互結合網に全対距離和が小さくなるよう木形状の設備を配置するヒューリスティックを提案する．

2. 相互結合網と設備配置

図 1 のように相互結合網をネットワークで表す．ネットワークの各辺の長さはその辺を通る通信の通信レイテンシ，コストはその辺を設備に含めるときの費用とする．設備はネットワークの部分木である．設備のサイズは設備に含まれる辺のコストの総和であり，設備のコストを表す．ここで設備のサイズはある数 s 以下とする．

全対距離和 CP(F)はネットワーク上の 2 つのノードの組合せ全てに対するノード間の距離の総和である．但し，その 2 ノード各々と設備との距離の和が 2 ノード間の距離より小さい場合は前者を用いる．すなわち次式で表される．

$$CP(F)=\sum_{v_i,v_j}\min(d(v_i,v_j),d(v_i,F)+d(v_j,F))$$

但し，v_i，v_j はネットワークのノード，F は設備，$d(v_i,v_j)$ は v_i と v_j 間の距離，$d(v_i,F)$ は v_i と F 間の距離である．全対距離和はノード間の通信が一様な場合の平均通信レイテンシに対応する．

ネットワークが木形状で各辺の長さが等しい場合，全対距離和最少の設備は $O(n^3)$時間で求まる．一方，各辺の長さが任意の場合やネットワークが木でなく一般形状の場合は NP 困難である[2]．

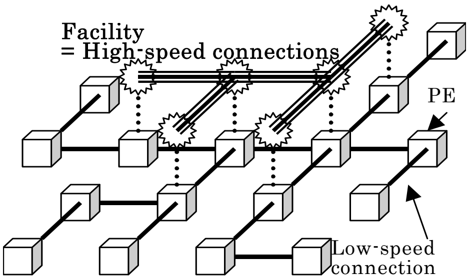

図 1．設備配置による不均質な相互結合網

次章で，一般形状のネットワークに対するヒューリスティックアルゴリズムを示す．これはグリーディに設備の辺を追加するものである．

3．ヒューリスティックアルゴリズム

3.1 用語

ネットワーク G=(V, E)のノード数は n, 辺の数は m とする. 各ノード v は重み w(v)を, 各辺 e は長さ l(e)とコスト c(e)を持つ. ノード v_i と v_j 間の距離を $d(v_i, v_j)$とする. ノード v と部分木 T 間の距離 d(v, T)は, v から T の最も近いノードまでの距離である. 部分木 T に, T に隣接するノード u と T, u 間を接続する辺 e を追加したものを T+u で表す. また部分木 T に, T の葉 u と u を端点とする辺 e を除去したものを T−u で表す. 設備 F はサイズ S(F)≦s である部分木である. 設備 F を配置したときのノード v_i, v_j 間の最短距離 $cd(v_i, v_j)$を, v_i, v_j 間の距離と, v_i と F 間とv_jと F 間の距離の和の小さいほうとする．すなわち $cd(v_i, v_j, F)=\min(d(v_i,F)+d(v_j,F), d(v_i,v_j))$とする. F の全対距離和 $CP(F)=\Sigma_{v_i,\ v_j\in V}\ w(v_i)\cdot w(v_j)\cdot cd(v_i, v_j, F)$である. 設備 F_1を除去して設備 F_2を配置した時の全対距離和の減少量 $DCP(F_1,F_2)=CP(F_1)-CP(F_2)$となる. また全対距離和の減少量を F_1 と F_2 のサイズ差で割ったものを効率 $EF(F_1,F_2)=DCP(F_1,F_2)/\{S(F_2)-S(F_1)\}$とする. なお初期状態に設備 F を配置する場合の効率は EF(φ, F)である.

3.2 性質

[性質 1] 辺1つのみからなる設備 F のうち，効率 EF(ϕ, F)が最大となるものは O(n^2m)時間で求まる.

[性質 2] ネットワーク G に設備 F が配置されているとする. 設備 F に隣接ノード u を追加したときのノード v_i,, v_j 間の最短距離の減少量 dcd(v_i, v_j, F, u)= cd(v_i, v_j, F)− cd(v_i, v_j, F+u)は，図 2 のように場合分けして示される.

1) d(v_i, F)≦d(v_i, u)の場合
　(ア) d(v_j,F)≦d(v_j,u)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=0
　(イ) d(v_j,F)＞d(v_j,u)の場合
　　①d(v_i, v_j)≦d(v_i, F)+d(v_j, u)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=0
　　②d(v_i, F)+d(v_j, u)＜d(v_i, v_j)＜d(v_i, F)+d(v_j, F)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=d(v_i, v_j)−d(v_i, F)−d(v_i, u)
　　③d(v_i, F)+d(v_j, F)≦d(v_i, v_j)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=d(v_i, F)+d(v_i, F)−d(v_i, F)−d(v_i, u)

2) d(v_i, F)＞d(v_i, u)の場合
　(ア) d(v_j,F)≦d(v_j,u)の場合
　　①d(v_i, v_j)≦d(v_i, u)+d(v_j, F)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=0
　　②d(v_i, u)+d(v_j, F)＜d(v_i, v_j)＜d(v_i, F)+d(v_j, F)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=d(v_i, v_j)−d(v_i, u)−d(v_i, F)
　　③d(v_i, F)+d(v_j, F)≦d(v_i, v_j)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=d(v_i, F)+d(v_i, F)−d(v_i, u)−d(v_i, F)
　(イ) d(v_j,F)＞d(v_j,u)の場合
　　①d(v_i, v_j)≦d(v_i, u)+d(v_j, u)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=0
　　②d(v_i, u)+d(v_j, u)＜d(v_i, v_j)＜d(v_i, F)+d(v_j, F)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u)=d(v_i, v_j)−d(v_i, u)−d(v_i, u)
　　③d(v_i, F)+d(v_j, F)≦d(v_i, v_j)の場合
　　　dcd(v_i, v_j, F, u) =d(v_i, F)+d(v_i, F)−d(v_i, u)−d(v_i, u)

図 2. dcd(v_i, v_j, F, u)の算出

[性質 3] ネットワーク G に設備 F が配置されているとする. G の各ノード v に対する d(v, F)が分かっていれば，設備 F に隣接ノード u を追加したときの全対距離和の減少量 DCP(F, F+u)は次式を用いて O(n^2)時間で求まる.

$$\mathrm{DCP}(F, F+u)=\Sigma_{v_i, v_j \in V}\, w(v_i)\cdot w(v_j)\cdot \mathrm{dcd}(v_i, v_j, F, u).$$

[性質 4] ネットワーク G に設備 F が配置されているとする. 設備 F に隣接するノード u を追加したとき，ノード v と設備 F+u の距離 d(v, F+u)は，図 3 のように場合分けして示される.

1) d(v, F)≦d(v, u)の場合：d(v, F+u)= d(v, F)
2) d(v, F)＞d(v, u)の場合：d(v, F+u)= d(v, u)

図3. d(v, F+u)の算出

3.3 アルゴリズム

図 4 にヒューリスティックアルゴリズムを示す. この実行時間はステップ(1)は性質 1 より O(n^2m)時間，ステップ(2)は O(n)時間，ステップ(3)(6)は O(m)時間，ステップ(4)は性質 3 より O(n^2m)時間，ステップ(5)は性質 4 より O(n)時間，ステップ(4)～(6)は最大 n 回繰り返すので全体としては O(n^3m)時間になる.

(1) コスト c(e)≦s となる辺のうち，それを設備にしたときに効率 EF(ϕ, F)が最大となるものを求める. 求まった設備を F=({v1, v2}, e=(v1, v2))とする. F のサイズ S(F)=c(e)とする.
(2) 各ノード v から F までの距離 d(v, F)を求める. すなわち d(v, F)=min(d(v, v_1), d(v, v_2)).
(3) F の隣接ノードと F のノード間の辺のうち，それを F に追加しても指定サイズ s を超えないものの集合 N(F)を求める. すなわち N(F)={ e=(u, v)∈E: u∈V(F) , v∉V(F), c(e)+S(F)≦s}.
(4) N(F)の全ての辺 e=(u, v), u∉V(F)に対して，全対距離和の減少量 DCP(F, F+u)を求める. そして効率 EF(F,F+u)が最大となるノード u’を探す. このときの e を e’とする.
(5) F にノード u’を追加する. F のサイズ S(F+u’)=S(F)+c(e’)とする. また各ノード v に対する距離d(v, F+u’)を求める.
(6) N(F)から辺 e’, N(F)に含まれる辺で F+u’に追加したら指定サイズを超えるもの，および N(F)に含まれる辺で両端とも F+u’に含まれるものを削除する. そして，u’を端点として F に含まれない辺 e=(u’, v)で，F+u’にノード v を追加しても指定サイズ s を超えない場合，N(F)に辺 e を追加する. すなわち N(F+u’)=N(F)−{e’}−{e: e∈N(F), c(e)+S(F+u’) ＞ s}−{e=(v, w): v, w ∈ F+u’}+{e=(u’,v): v∉V(F+u’), c(e)+ S(F+u’)≦s}.
(7) N(F)が空でなければ上記(4)に移動する.

図 4. ヒューリスティックアルゴリズム

4. まとめ

一般形状の相互結合網に全対距離和が小さくなるよう木形状の設備を配置するヒューリスティクアルゴリズムを提案し，その実行時間を示した. しかしながらその近似性能の評価と性能向上は今後の課題である.

参考文献

1) Z. Drezner and H. W. Hamacher Eds., Facility Location -Application and Theory-, Springer-Verlag (2002).
2) T. Touyama et.al., Optimal Location of High-speed Facility for Heterogeneous Networks, Proc. ISPAN2000, pp.246-251 (2000).