1B-5

実験計画法に適した直交配列の線形計画限界

斉藤友彦† 浮田善文‡ 松嶋敏泰†† 平澤茂一‡‡
青山学院大学† 横浜商科大学‡ 早稲田大学†† サイバー大学‡‡

1 はじめに

直交配列(Orthogonal Array: OA)は統計学における実験計画法を中心に幅広く応用されている．OA は列数k，行数N，有限体の要素数q，強さtの四つのパラメータによって特徴付けられる配列である．この時，OA 構成問題はk，q，tが与えられた下でNが最小となる OA を求める問題として定式化することができる．

OA 構成問題に伴い，行数Nの下界を求める問題も重要である． Delsarte はこの問題に対して，線形計画(Linear Programming: LP)限界を提案している[1]．LP 限界は，現在最も優れたNの下界として知られている[2]．

本研究では，まず，OA を拡張し，部分的な強さを持つ OA(OA with Partial Strength: POA)を定義する．POA は実験計画法により適したものである．そのため，実験計画法が実際に用いられる現場では既に POA のような配列が考えられており，その構成法については多くの提案がなされている[3]．本研究では，OA に対する LP 限界を拡張し，POA に対する LP 限界を提案する．そして，数値例から，提案した下界の有効性について検証する．

2 直交配列の線形計画限界

定義 1 $GF(s)$上$N\times k$配列Aの任意のt列からなる$N\times t$部分配列が$GF(s)$上の各t組を同数回含む時，Aを強さtの直交配列と呼ぶ．また，このような配列を$OA(N,k,s,t)$と記述する． ■

以下では，簡単のため$s=2$の場合についてのみ考える．

OA は実験計画法において主要な役割を果たしている．例えば，次のような例を考える．ある化学製品の強度がその製造過程で反応温度，反応炉，触媒に影響を受けるものとする．この時，各要因に複数の水準を設定する．例えば反応温度を 800℃と 900℃，反応炉を 1 号炉と 2 号炉，触媒を触媒 1 と触媒 2 などのように設定する．この時，全ての水準組合わせで実験を行うことで各要因効果，及び，交互作用効果(ある要因と要因の水準を組み合わせると現れる効果)を推定することができる．しかし，これでは実験回数が膨大になってしまうため，その一部でこれらを推定する必要がある．これは OA を用いることで実現することができる．この時，OA の各行は一つの水準組合わせに対応する．従って，OA の列数は要因数，行数は実験回数，有限体の要素数は水準数に対応する．また実験で仮定される交互作用効果に対して，必要とされる OA の強さが定まる．正確には全てのe次交互作用(e要因間で現れる交互作用効果)が存在する時，強さ$2e$の OA が必要となる[2]．

任意の正整数kに対して，Krawtchouk 多項式$P_i(z)$は次のように定義される．

$$P_i(z):=\sum_{r=0}^{i}(-1)^r\binom{z}{r}\binom{k-z}{i-r},\quad i=0,1,...,k. \tag{1}$$

この時，行数Nについて，次の下界が得られる．

定理 1 [2] $N_{LP}(k;d^{\perp})$を次の LP 問題の解とする．次を満たす実数A_0，A_1，...，A_kを求めよ．

$$\text{minimize}\quad \sum_{i=0}^{k}A_i \tag{2}$$

$$A_0=1,\quad A_i\ge 0, i=1,2,...,k, \tag{3}$$

$$\sum_{j=0}^{k}A_jP_i(j)\ge 0, i=0,1,...,k, \tag{4}$$

$$\sum_{j=0}^{k}A_jP_i(j)=0, i=1,2,...,t. \tag{5}$$

但し，$t=d^{\perp}-1$である．この時，$OA(N,k,2,t)$は$N\ge N_{LP}(k;d^{\perp})$を満たす． ■

3 部分的な強さを持つ直交配列の線形計画限界

$a=(a_1,a_2,...,a_k)\in\{0,1\}^k$に対して，$v(a):=\{i\,|\,a_i\ne 0\}$と定義する．

定義 2 kを正整数とする．また$T\subseteq\{0,1\}^k$，$T'=\{v(a)\,|\,a\in T\}$とする．この時，次の条件を満たす$\{0,1\}^k$上$N\times k$配列Aを部分的な強さTを持つ直

Linear Programming Bounds of Orthogonal Arrays for Experimental Designs
† Tomohiko Saito・Aoyama Gakuin University
‡ Yoshifumi Ukita・Yokohama College of Commerce
†† Toshiyasu Matsushima・Waseda University
‡‡ Shigeichi Hirasawa・Cyber University

交配列と呼び，$POA(N,k,2,T)$ と書く．

条件：任意の $\{i_1,i_2,...,i_l\}\in T'$ について，A の $i_1,i_2,...,i_l$ 番目の列からなる $N\times l$ 部分配列が $\{0,1\}^k$ 上の各 l 組を同数回含む．■

$T=\{a\in\{0,1\}^k : wt(a)\le t\}$ の時，$POA(N,k,2,T)$ は $OA(N,k,2,t)$ と一致する．但し，$wt(a)$ は a のハミング重みである．

上でも述べた通り，実験において全ての e 次交互作用が存在する時，強さ $2e$ の OA が必要となる．しかし，実験計画法では，ある一部の e 次交互作用のみが存在する，など複雑な交互作用効果の存在を仮定するのが一般的である．このような仮定に対して，OA では対応することはできないが，POA では対応可能である．例えば，4 要因(A, B, C, D)において要因 A と B の交互作用効果のみを仮定する時，部分的な強さ T ={0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101}を持つ POA を構成すれば良い．

任意の正整数 m，及び $\kappa_1,...,\kappa_m$ に対して，多項式 $P_{i_1,...,i_m}(z_1,...,z_m)$ は次のように定義される．

$$P_{i_1,i_2,...,i_m}(z_1,z_2,...,z_m) := P_{i_1}(z_1)P_{i_2}(z_2)\cdots P_{i_m}(z_m),$$
$$i_1=0,...,\kappa_1,\ i_2=0,...,\kappa_2,\ ...\ ,\ i_m=0,...,\kappa_m. \quad (6)$$

但し，$P_{i_1}(z_1), P_{i_2}(z_2),\cdots,P_{i_m}(z_m)$ は Krawtchouk 多項式である．この時，行数 N について，次の下界が得られる．

定理 2 任意の $T\subseteq\{0,1\}^k$ について，$N_{LP}(k;T)$ を次の LP 問題の解とする．次を満たす実数 $A_{i_1,...,i_k}$，$(i_1,...,i_k)\in\{0,1\}^k$ を求めよ．

$$\text{minimize}\quad \sum_{i_1=0}^{1}\sum_{i_2=0}^{1}\cdots\sum_{i_k=0}^{1}A_{i_1,i_2,...,i_k} \quad (7)$$
$$A_{0,0,...,0}=1,\quad A_{i_1,i_2,...,i_k}\ge 0, (i_1,i_2,...,i_k)\in\{0,1\}^k, \quad (8)$$
$$\sum_{j_1=0}^{1}\cdots\sum_{j_k=0}^{1}A_{j_1,...,j_k}P_{i_1,...,i_k}(j_1,...,j_k)\ge 0,$$
$$(i_1,i_2,...,i_k)\in\{0,1\}^k, \quad (9)$$
$$\sum_{j_1=0}^{1}\cdots\sum_{j_k=0}^{1}A_{j_1,...,j_k}P_{i_1,...,i_k}(j_1,...,j_k)=0,$$
$$(i_1,i_2,...,i_k)\in T. \quad (10)$$

$POA(N,k,2,T)$ は $N\ge N_{LP}(k;T)$ を満たす．■

4　数値例

本節ではいくつかの数値例から提案した下界の有効性について検証する．

例 1 $k=4$，T_1={0000, 1000, 0100, 0010, 0001, 1100, 1010, 1001, 0110, 0101, 0011, 1110, 1101}の場合について考える．計算機で LP 問題を解くことにより，$N_{LP}(k;T_1)$ =8 が得られる．$POA(4,8,2,T_1)$ は実際に存在し，$L_8(2^7)$ 直交表[3]で作ったものを表 1 に示す．■

例 2 $k=5$，T_2={00000, 10000, 01000, 00100, 00010, 00001, 11000, 10100, 10010, 10001, 01100, 01010, 01001, 00110, 00101, 00011, 11100, 11010, 11001, 10110, 01110, 00111, 11110}の場合について考える．計算機で LP 問題を解くことにより，$N_{LP}(k;T_2)$ =16 が得られる．$POA(5,16,2,T_2)$ は実際に存在し，$L_{16}(2^{15})$ 直交表[3]で作ったものを表 2 に示す．■

表 1 $POA(4,8,2,T_1)$

0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

表 2 $POA(5,16,2,T_2)$

0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	1
1	1	0	1	0
1	1	1	0	1
1	1	1	1	0

例 1，2 において，提案した下界は実際に構成された POA の行数と一致する．従って，例 1，2 の場合では，提案した下界が優れたものであることが分かる．一方，構成問題の立場から考えると直交表により作成された POA は最適であることが分かる．

5　おわりに

本研究では POA の LP 限界を提案し，いくつかの数値例から，その効果を検証した．これによって，構成された POA を下界から評価することが可能となった．

参考文献

[1]P.Delsarte, “An algebraic approach to the association schemes of coding theory,” Philips Res. Repts. Suppl., No.10, 1973.
[2] A. S. Hedayat, N. J. A. Sloane and J. Stufken, Orthogonal Arrays: Theory and Applications, Springer, New York, 1999.
[3]鷲尾泰俊，実験の計画と解析，岩波書店，東京，1988.