整数計画問題を解く量子化対称結合神経回路網のダイナミクス

松 田 聖†

量子化された飛び飛びの値をとるニューロンからなる対称結合神経回路網（量子化回路網）は，整数計画問題に適用した場合，従来の 2 値回路網や連続値回路網より，ニューロン数，結線数が大幅に削減でき，逐次シミュレーションにおいてはより高速に近似解を得ることが期待できることが知られている．しかし，2 値回路網や連続値回路と異なり，量子化回路網ではチューニング対象となる回路網係数の値と回路網によって得られる整数計画問題の許容解や非許容解との関係が理論的に未解明であった．本論文ではまず，一般に整数計画問題を解く際の 2 値回路網と量子化回路網のダイナミクスの関係を解析し，両回路網の安定状態が実質上一致することを示す．これにより，上述の 2 値および連続値回路網に関してすでに得られている理論的結果を量子化回路網に対して援用することが可能となり，ヒッチコック問題を例にとり，量子化回路網の係数の値と回路網によって得られるヒッチコック問題の許容解と非許容解との関係を明らかにする．

Dynamics of Quantized Hopfield Networks for Integer Programming

Satoshi Matsuda†

Quantized Hopfield networks, whose neuron takes quantized values (e.g. integers), need fewer neurons and connections, and so can obtain feasible solutions to integer optimization problems much more quickly than the binary or continuous Hopfield networks when serially computed. However, their dynamics have not well been analyzed. In this paper we first analyze the relationship between the dynamics of quantized Hopfield networks and those of binary ones solving integer optimization problems, and show that the stable states of both networks are the same in some sense. So, by employing the theoretical results already obtained for binary and continuous Hopfield networks, we then show the stability or instability condition of the feasible or infeasible solutions in terms of the values of network coefficients. This gives the insight into the practical network tuning.

1. はじめに

対称結合神経回路網（ホップフィールドネットワーク）で各種の組合せ最適化問題を解く場合，2 値あるいは連続値をとるニューロン（以降，2 値ニューロンあるいは連続値ニューロンという）を用いるが，連続値ニューロンの場合でも，最終的には 0，1 の 2 値をとることを意図しており，0-1 組合せ最適化問題が対象であることが多い[5)]．一方，変数が整数値をとる組合せ最適化問題である整数計画問題に対しては，各変数に対して多数の 2 値あるいは連続値ニューロンを対応させ，それらの中の発火した（値 1 をとった）ニューロンの個数でこれらの整数値を表現する数え上げ法を用いることが一般的であった[14)]．しかし，この方法は一般に多数のニューロンを必要とし，その結果，逐次計算では計算時間が長くなるという欠点があった．そこで，2 値や連続値ではなく，整数等の量子化された飛び飛びの値をとる量子化ニューロンからなる回路網（量子化対称結合神経回路網あるいは量子化回路網）[2),6),7),10)]を用いると，整変数 1 つに対して量子化ニューロン 1 つを用意すればよく，数え上げ法に較べ，ニューロン数，結線数，計算時間を大幅に削減でき，近似解をより高速に得られることが示された[6),7),10)]．さらに，量子化にともなうある種のゆらぎをニューロン動作に付加することにより，回路網が局所解（エネルギー極小点）を脱出し，最適解（エネルギー最小点）へ到達することが可能となり，最適解がきわめて高い確率で，またいっそう高速に得られることも指摘されている[6),7),10)]．このように，量子化回路網は整数計画問題の最適解等の良質の許容解を逐次計算においてきわめて高速に得ることが期待できる．

一方，2 値や連続値ニューロンからなる対称結合神経回路網（以降，2 値回路網あるいは連続値回路網と

† 日本大学生産工学部数理情報工学科
Department of Mathematical Information Engineering, College of Industrial Technology, Nihon University

いう）で組合せ最適化問題を解く際のダイナミクスに関しては理論的解析がある程度進んでいる．たとえば，連続値回路網の状態空間を表す超立方体の頂点の漸近安定性や不安定性が理論的に解明されており，問題の定式化や回路網定数のチューニングの際の指針を与えている[1),8),9),11)~13)]．しかし，量子化回路網は上述のような利点があるものの，このような理論的な側面が未解明であった．

本論文ではまず，同一の整数計画問題を解く量子化回路網と数え上げ法を用いた 2 値回路網のダイナミクスの関係を明らかにし，両回路網の安定点あるいは不安定点がそれぞれ実質的に一致することを示す．これによって，量子化回路網の状態の安定条件あるいは不安定条件が数え上げ法を用いた 2 値回路網に対するこれらの条件からただちに得られることが明らかとなる．そこで，整数計画問題の一種であるヒッチコック問題を例にとり，許容解や非許容解に対応する回路網の状態が安定や不安定となるための回路網係数の値を示す．これによって，回路網係数のチューニング等の指針が得られる．最後に，シミュレーションによってこれらの結果を例示する．

2. 量子化回路網[2),6),7),10)]

2.1 量子化ニューロン

従来の対称結合神経回路網では，各ニューロンは 2 値あるいは連続値のいずれかをとり，離散時間あるいは連続時間ごとにその値を更新する．一方，量子化回路網の量子化ニューロン i の値 x_i は整数 $m_i(\geq 0)$ から $M_i(\geq m_i)$ までのいずれかの整数値をとり（$x_i \in \{m_i, \ldots, M_i\}$），各離散時刻ごとに任意の 1 つのニューロン i の値 x_i が以下のように更新される（その際，それ以外のすべてのニューロン $j \neq i$ の値は更新されない，すなわち $\Delta x_j = 0$）.

$$\Delta x_i = \begin{cases} 1 & (\sum_j w_{ij}x_j + h_i + w_{ii}/2 > 0 \\ & \qquad \text{かつ } x_i \neq M_i) \\ -1 & (\sum_j w_{ij}x_j + h_i - w_{ii}/2 < 0 \\ & \qquad \text{かつ } x_i \neq m_i) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \tag{1}$$

ここで，w_{ij} はニューロン j から i への結合の重み，h_i はニューロン i のバイアス値であり，一般に $w_{ii} \neq 0$ である．

また，ニューロンの値のことをニューロンの状態ともいい，回路網のすべてのニューロンの状態 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \prod_i \{m_i, \ldots, M_i\}$ を回路網の状態という．回路網の状態がこれ以上変化しない場合，回路網（の状態）は安定であるという．このように，量子化回路網は非同期モデルであり，一般に各ニューロンの状態は時間が進むにつれて順次遷移していく．

2.2 エネルギー極小化

2 値あるいは連続値回路網の場合と同様に，量子化回路網に対しても回路網の状態の指標として，エネルギー関数 $E : \prod_i \{m_i, \ldots, M_i\} \to R$ を次のように定義する．

$$E = -\frac{1}{2}\sum_i \sum_j w_{ij}x_i x_j - \sum_i h_i x_i \tag{2}$$

なお，逆に式 (2) のような 2 次式が与えられると，これをエネルギーに持つ回路網も容易に得られる．そこで，今後は特に支障のない限り，E をエネルギーとして持つ対称結合神経回路網も E で表すこととする．

2 値および連続値回路網の最大の特徴は，ニューロンの状態遷移にともないエネルギー E が減少し（2 値回路網の場合は $\Delta E \leq 0$ ，連続値回路網の場合は $dE/dt \leq 0$），エネルギー極小点に収束することが保証されていることである．この特性が対称結合神経回路網を組合せ最適化問題へ適用することを可能としている．量子化回路網に関しても，次の定理 1 に示すように，エネルギー極小点への収束性が成り立つことが示されているが，その前に，エネルギー極小点等の定義を与えておく．

定義 1 量子化回路網の 2 つの状態 $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$，$\boldsymbol{x}' = (x'_1, \ldots, x'_n) \in \prod_i \{m_i, \ldots, M_i\}$ が隣接しているとは，次を満たすニューロン i がただ 1 つ存在することである．

$$x'_j = \begin{cases} x_j \pm 1 & (j = i) \\ x_j & (j \neq i) \end{cases}$$

次に，状態 $\boldsymbol{x}$ がエネルギー極小あるいはエネルギー極小点であるとは，$\boldsymbol{x}$ に隣接するすべての状態 $\boldsymbol{x}'$ に対して，$E(\boldsymbol{x}) \leq E(\boldsymbol{x}')$ が成り立つことである．また，エネルギー極小（点）でないときはエネルギー非極小（点）という．

定理 1 量子化回路網の状態は，エネルギーが減少する隣接する状態の 1 つに各時点ごとに遷移し，最終的にはエネルギー極小点の 1 つに到達しとどまる．したがって，回路網の状態がエネルギー極小であることと安定であることは同値である[2),6),7),10)]．

したがって，以降は回路網の状態がエネルギー極小であることと安定であることを区別せず，特別の場合を除いては安定と呼ぶこととする．このエネルギー極

小化定理は量子化回路網が，2 値回路網や連続値回路網と同じく，組合せ最適化問題（整数計画問題）の求解に利用できることを意味している．

2.3 2 値回路網の拡張としての量子化回路網

量子化ニューロン i は $m_i = 0$，$M_i = 1$ の場合，従来の 2 値ニューロンに一致し，量子化回路網は 2 値回路網となる．したがって，本章でこれまでに述べたことはすべて 2 値回路網の場合を含んでいる．なお，この場合，式 (2) で定義されたエネルギー E は従来の 2 値回路網の前提である多重 1 次形式（$w_{ii} = 0$）を満たしていないが，E 中の x_i^2 を x_i に置き換えることにより，すなわち，

$$E' \equiv E - \sum_i w_{ii} x_i^2 + \sum_i w_{ii} x_i \tag{3}$$

のように，E から $w_{ii} x_i^2$ なる x_i の 2 次の項をすべて取り除き，代わりに $w_{ii} x_i$ なる x_i の 1 次の項を付加することにより，E' は多重 1 次形式となり，2 値回路網 E' と E は同一の挙動（状態遷移や状態の安定性等）を示すことが知られている[2),6),10)]．したがって，$m_i = 0$，$M_i = 1$ の場合，量子化回路網は 2 値回路網となり，量子化回路網は 2 値回路網の拡張となっている．

3. 量子化回路網と 2 値回路網のダイナミクス

3.1 等価な量子化回路網と 2 値回路網

整数計画問題を量子化回路網で解く場合は，問題の整数変数をそのまま量子化ニューロンの値として表現するが，2 値回路網を用いる場合は，整数変数 x に対して多数の 2 値ニューロン z_k を用いて，発火したそれらのニューロンの個数で整数変数 x の値を表現する，すなわち，$x = \sum_k z_k$ と表現する数え上げ法を用いることが多い．そこで，本論文では，この整数変数の表現方法を除いて，まったく同様に問題を表現することによって得られる量子化回路網と 2 値回路網を考えることとし，次の定義のようにこれらの回路網を等価と呼ぶことにする．

定義 2 量子化回路網 $E_Q(\boldsymbol{x})$ と 2 値回路網 $E_B(\boldsymbol{z})$ が等価であるとは，次が成り立つことである．

$$E_B(\boldsymbol{z}) \equiv E_Q\left(\left(\sum_k z_{ik}\right)\right) \tag{4}$$

ただし，$\boldsymbol{x} = (x_i) \in \prod_i \{m_i, \ldots, M_i\}$，$\boldsymbol{z} = (z_{ik}) \in \{0,1\}^{n\times q}$，$q = \max_i\{M_i\}$ とし，‘≡’ は値としてではなく，関数形として一致することを意味する．すなわち，等価な両回路網は同一の重み集合 $\{w_{ij}\}$ およびバイアス集合 $\{h_i\}$ を持ち，それぞれ

$$E_Q(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{2}\sum_{ij} w_{ij} x_i x_j - \sum_i h_i x_i \tag{5}$$

$$E_B(\boldsymbol{z}) = -\frac{1}{2}\sum_{ij} w_{ij}\left(\sum_k z_{ik}\right)\left(\sum_k z_{jk}\right) - \sum_i h_i\left(\sum_k z_{ik}\right) \tag{6}$$

と表せることである．さて，等価な 2 値回路網 E_B の状態集合 $S_B = \{0,1\}^{n\times q}$ から量子化回路網 E_Q の状態集合 $S_Q = \prod_i\{m_i, \ldots, M_i\}$ への関数 $h : S_B \to S_Q$ を次のように定める：

$$h(\boldsymbol{z}) = \left(\sum_k z_{ik}\right) \tag{7}$$

もちろん，$h(\boldsymbol{z}) \in S_Q$ は一意に定まるが，$h^{-1}(\boldsymbol{x}) \subseteq S_B$ となり，$\boldsymbol{z} \in h^{-1}(h(\boldsymbol{z}))$ が成り立つ．

さて，等価な 2 つの回路網のダイナミクスの関係を明確にするために若干の準備をする．まず，等価な 2 値回路網と量子化回路網の関数 h で対応付けられた 2 つの状態のエネルギー値は次に示すように一致する．

補題 1 E_Q と E_B を等価な量子化回路網と 2 値回路網とし，$\boldsymbol{z}$ を E_B の任意の状態とすると，

$E_B(\boldsymbol{z}) = E_Q(h(\boldsymbol{z}))$

（証明）$\boldsymbol{z} = (z_{ij}) \in \{0,1\}^{n\times q}$ とすると，等価性の仮定より，

$$E_B(\boldsymbol{z}) = E_Q\left(\left(\sum_k z_{ik}\right)\right) = E_Q(h(\boldsymbol{z}))$$

となる． □

つづいて，関数 h は以下のように回路網の状態の隣接関係を保存する．

補題 2 等価な量子化回路網 E_Q と 2 値回路網 E_B において，$\boldsymbol{z}^1$ と $\boldsymbol{z}^2$ を E_B の隣接する任意の状態とすると，$h(\boldsymbol{z}^1)$ と $h(\boldsymbol{z}^2)$ は E_Q の隣接する状態である．一方，$\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$ を E_Q の隣接する任意の状態とし，$\boldsymbol{z}^1 \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^1)$ とすると，$\boldsymbol{z}^1$ と隣接する $\boldsymbol{z}^2 \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^2)$ が存在する．

（証明）$\boldsymbol{z}^1 = (z^1_{ij})$，$\boldsymbol{z}^2 = (z^2_{ij}) \in \{0,1\}^{n\times q}$ を E_B の隣接する任意の状態とすると，ある s, t に対して，

$$z^1_{ij} = \begin{cases} z^2_{ij} \pm 1 & (i = s, j = t) \\ z^2_{ij} & (\text{その他}) \end{cases}$$

である．また，$h(\boldsymbol{z}^1) = \boldsymbol{x}^1 = (x^1_i)$，$h(\boldsymbol{z}^2) = \boldsymbol{x}^2 =$

$(x_i^2) \in S_Q$ とすると，等価性の仮定より，$x_i^k = \sum_j z_{ij}^k$ が成り立つので，

$$x_s^1 = \sum_j z_{sj}^1 = \left(\sum_j z_{sj}^2\right) \pm 1 = x_s^2 \pm 1$$

また，$i \neq s$ ならば，

$$x_i^1 = \sum_j z_{ij}^1 = \sum_j z_{ij}^2 = x_i^2$$

となる．したがって，$\boldsymbol{x}^1$ と $\boldsymbol{x}^2$，すなわち，$h(\boldsymbol{z}^1)$ と $h(\boldsymbol{z}^2)$ は隣接する．

逆に，$\boldsymbol{x}^1 = (x_i^1)$，$\boldsymbol{x}^2 = (x_i^2) \in \{0,1\}^n$ を E_Q の隣接する任意の状態とすると，ある s に対して，

$$x_i^2 = \begin{cases} x_i^1 \pm 1 & (i = s) \\ x_i^1 & (i \neq s) \end{cases}$$

である．そこで，$\boldsymbol{z}^1 = (z_{ij}^1) \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^1)$ とし，さらに，任意に t を選んで，$\boldsymbol{z}^2 = (z_{ij}^2) \in S_B$ を次のように定める：

$$z_{ij}^2 = \begin{cases} z_{ij}^1 \pm 1 & (i = s, j = t) \\ z_{ij}^1 & (\text{その他}) \end{cases}$$

すなわち，$\boldsymbol{z}^1$ と $\boldsymbol{z}^2$ は隣接する．さらに，$\boldsymbol{z}^1 \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^1)$ なので，

$$\sum_j z_{sj}^2 = \left(\sum_j z_{sj}^1\right) \pm 1 = x_s^1 \pm 1 = x_s^2$$

また，$i \neq s$ ならば，

$$\sum_j z_{ij}^2 = \sum_j z_{ij}^1 = x_i^1 = x_i^2$$

となり，任意の i に対して，$\sum_j z_{ij}^2 = x_i^2$ である．したがって，$\boldsymbol{z}^2 \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^2)$ である． □

3.2 等価な 2 つの回路網のダイナミクス

前節の 2 つの補題より，次の定理に示すように，等価な量子化回路網と 2 値回路網の安定点が実質的に一致することが分かる．

定理 2 $\boldsymbol{z}$ と $\boldsymbol{x}$ を $h(\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{x}$ を満たすそれぞれ等価な 2 値回路網と量子化回路網の状態とすると，$\boldsymbol{z}$ が安定である必要十分条件は $\boldsymbol{x}$ が安定であることである．

（証明）等価な 2 値回路網と量子化回路網をそれぞれ E_B と E_Q とし，E_B の状態 $\boldsymbol{z}$ が安定であるとすると，$\boldsymbol{z}$ はエネルギー極小である．$\boldsymbol{x} = h(\boldsymbol{z}) \in S_Q$ の隣接する任意の状態を $\boldsymbol{x}'$ とすると，補題 2 より，$\boldsymbol{z}$ と隣接する $\boldsymbol{z}' \in h^{-1}(\boldsymbol{x}') \in S_B$ が存在する．さらに，補題 1 より，$E_B(\boldsymbol{z}) = E_Q(\boldsymbol{x})$ および $E_B(\boldsymbol{z}') = E_Q(\boldsymbol{x}')$ が成り立つ．一方，$\boldsymbol{z}$ のエネルギー極小性より，$E_B(\boldsymbol{z}) \leq E_B(\boldsymbol{z}')$ であるから，$E_Q(\boldsymbol{x}) \leq E_Q(\boldsymbol{x}')$ が成り立ち，$\boldsymbol{x}$ はエネルギー極小であり，したがって，安定である．逆に，E_Q の状態 $\boldsymbol{x}$ が安定とすると，エネルギー極小である．$\boldsymbol{z} \in h^{-1}(\boldsymbol{x})$ に隣接する任意の状態を $\boldsymbol{z}'$ とすると，補題 2 より，$\boldsymbol{x}' = h(\boldsymbol{z}')$ と $\boldsymbol{x}$ は隣接する．また，補題 1 より，$E_B(\boldsymbol{z}) = E_Q(\boldsymbol{x})$ および $E_B(\boldsymbol{z}') = E_Q(\boldsymbol{x}')$ が成り立つ．一方，$\boldsymbol{x}$ のエネルギー極小性より，$E_Q(\boldsymbol{x}) \leq E_Q(\boldsymbol{x}')$ であるから，$E_B(\boldsymbol{z}) \leq E_B(\boldsymbol{z}')$ が成り立ち，$\boldsymbol{z}$ はエネルギー極小であり，したがって，安定である． □

松田[9]は，連続値や 2 値回路網に対して，（漸近）安定な頂点（状態）集合の包含関係に基づいて，同一の問題を解く回路網の性能を理論的に比較することを提案した．しかし，同一の問題を解く量子化回路網と数え上げ法を用いた 2 値回路網では，そもそも回路網の状態集合が異なる（$S_Q \neq S_B$）ので，量子化回路網 E_Q の安定な状態集合 $S(E_Q) \subseteq S_Q$ と 2 値回路網 E_B の安定な状態集合 $S(E_B) \subseteq S_B$ をそのように直接比較することで，両回路網の性能を評価することはできない．しかし，この比較方法は，回路網の状態ではなく，組合せ最適化問題の安定な許容解と非許容解の集合の包含関係に基づく比較とみることもできる．そこで，$\boldsymbol{z} \in S_B$ と $h(\boldsymbol{z}) \in S_Q$ は整数計画問題の同じ許容解あるいは非許容解を表しているので，$S(E_Q)$ と $h(S(E_B)) \subseteq S_Q$ との包含関係に基づいて両回路網の性能を比較することにすると，定理 2 は，$S(E_Q) = h(S(E_B))$ となることを意味する．したがって，両回路網は同等の性能を持つと考えることができる．

さらに，等価な 2 つの回路網のダイナミクスは次に示すように，実質的に同一であることが分かる．

定理 3 E_B と E_Q を等価なそれぞれ 2 値回路網と量子化回路網とする．$\boldsymbol{z}^1, \cdots, \boldsymbol{z}^n$ を $\boldsymbol{z}^i \neq \boldsymbol{z}^{i+1}$ なる E_B の状態遷移列で，$\boldsymbol{x}^i = h(\boldsymbol{z}^i)$ とすると，$\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^n$ は$\boldsymbol{x}^i \neq \boldsymbol{x}^{i+1}$ なる E_Q の状態遷移列である．逆に，$\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^n$ を $\boldsymbol{x}^i \neq \boldsymbol{x}^{i+1}$ なる E_Q の状態遷移列とすると，$\boldsymbol{z}^i \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^i)$ で$\boldsymbol{z}^i \neq \boldsymbol{z}^{i+1}$ なる E_B の状態遷移列 $\boldsymbol{z}^1, \cdots, \boldsymbol{z}^n$ が存在する．いずれの場合も，$E_B(\boldsymbol{z}^i) = E_Q(\boldsymbol{x}^i)$ が成り立ち，$\boldsymbol{z}^n$ が安定であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}^n$ が安定であることである．

（証明）量子化回路網では（したがって 2 値回路網でも），定理 1 に示したように，エネルギーが減少する隣接状態の 1 つに遷移する．したがって，$\boldsymbol{z}^1, \cdots, \boldsymbol{z}^n$ を E_B の状態遷移列とすると，すべての i に対して，$\boldsymbol{z}^i$ と

$\boldsymbol{z}^{i+1}$ は隣接し，$E_B(\boldsymbol{z}^i) > E_B(\boldsymbol{z}^{i+1})$ が成り立つ．一方，すべての i に対して，補題 2 より，$\boldsymbol{x}^i = h(\boldsymbol{z}^i)$ と $\boldsymbol{x}^{i+1} = h(\boldsymbol{z}^{i+1})$ は隣接し，補題 1 より，$E_B(\boldsymbol{z}^i) = E_Q(\boldsymbol{x}^i)$ であるから，$E_Q(\boldsymbol{x}^i) > E_Q(\boldsymbol{x}^{i+1})$ となる．よって，$\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^n$ は E_Q の状態遷移列である．逆も同様．さらに，$E_B(\boldsymbol{z}^i) = E_Q(\boldsymbol{x}^i)$ が成り立つことは上に示した．また，定理 1 より，$\boldsymbol{z}^n$ が安定であるための必要十分条件は $\boldsymbol{x}^n$ が安定であることである．□

なお，量子化（2 値）回路網の状態更新は非同期であり，更新するニューロンの選択順序は自由である（規定されていない）．したがって，定理 3 の前半は，E_Q の更新するニューロンを各時点 i で適切に選べば，$\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^n$ が E_Q の状態遷移列となるということである．また，後半は，$\boldsymbol{z}^i \in h^{-1}(\boldsymbol{x}^i)$ を適切に選び，さらに，E_B の更新するニューロンを各時点 i で適切に選べば，$\boldsymbol{z}^1, \cdots, \boldsymbol{z}^n$ が E_B の状態遷移列となるということである．

等価な 2 値回路網と量子化回路網は，許容解への収束率，最適解への収束率，および得られた許容解の平均的質等においてほぼ同等の性能を示すことはすでにシミュレーションに基づいて指摘されていたが[6),7),10)]，本節で示した結果はそのことを理論的に裏付けるものである．

4. 量子化回路網における許容解と非許容解の安定条件

前章で，整数計画問題を解く際に，量子化回路網と数え上げ法を用いた 2 値回路網の安定点等を含めたダイナミクスが事実上，一致することを示した．一方，2 値回路網に関しては，状態の安定あるいは不安定条件を導くことができることがすでに示されている[1),8)]．したがって，量子化回路網の場合も，2 値回路網に対する従来の方法を介在することによって，状態の安定あるいは不安定条件を導くことが可能となる．したがって，2 値回路網や連続値回路網の場合と同様に，これらの条件を用いて，問題のより良い定式化を工夫したり[9),11)~13)]，回路網係数のチューニングの指針[1),8)]を得ることが可能となる．本章では，整数計画問題の 1 つであるヒッチコック問題を例にとり，許容解の安定および不安定条件，非許容解の不安定条件を導く．

4.1 ヒッチコック問題

ヒッチコック問題とはそれぞれの在庫を持つ複数の供給元からそれぞれの需要を持つ複数の消費先へ，最小の費用で品物を輸送する問題である．したがって，次式を最小化する供給元 i から消費先 j への輸送個数 x_{ij} を求めることとして定式化できる[6),7),10)]．

$$
\begin{aligned}
&E_{HQ}(A, C; \boldsymbol{x}) \\
&\quad = \frac{A}{2}\sum_i \left(\sum_j x_{ij} - s_i\right)^2 \\
&\quad\quad + \frac{A}{2}\sum_j \left(\sum_i x_{ij} - d_j\right)^2 \\
&\quad\quad + \frac{C}{2}\left(\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}\right)^2
\end{aligned} \tag{8}
$$

ただし，c_{ij} は供給元 i から消費先 j への品物 1 個あたりの輸送費，s_i は供給元 i の在庫数，d_j は消費先 j の需要数を表す．第 1 項は各供給元から輸送される品物の個数が在庫数と一致することを，第 2 項は各消費先に輸送される品物の個数が需要数と一致することを表す制約条件である．第 3 項は輸送費の二乗であり，輸送費が最小となることを表す最適化項である．$A, C > 0$ は各条件間の重みである．なお，制約条件を満たす整数値ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_{ij})$ を許容解，満たさないものを非許容解と呼ぶ．

量子化回路網では，各整数変数 x_{ij} をそれぞれ単一の量子化ニューロンの値で直接表現することができ，E_{HQ} がそのままで量子化回路網による定式化（エネルギー）となっている．一方，E_{HQ} と等価な 2 値回路網 E_{HB} は次のようになる[14)]：

$$
\begin{aligned}
&E_{HB}(A, C; \boldsymbol{z}) \\
&\quad = E_{HQ}\left(A, C; \left(\sum_k z_{ijk}\right)\right) \\
&\quad = \frac{A}{2}\sum_i \left(\sum_j \sum_k z_{ijk} - s_i\right)^2 \\
&\quad\quad + \frac{A}{2}\sum_j \left(\sum_i \sum_k z_{ijk} - d_j\right)^2 \\
&\quad\quad + \frac{C}{2}\left(\sum_i \sum_j c_{ij} \sum_k z_{ijk}\right)^2
\end{aligned} \tag{9}
$$

このように，数え上げ法では E_{HQ} における各変数 x_{ij} をそれぞれ多数の 2 値ニューロンの値 z_{ijk} の和 $\sum_k z_{ijk}$ で表現する．

4.2 連続値回路網における許容解と非許容解の安定条件

定理 2 より，量子化回路網における許容解や非許容解の安定性を求めるには，等価な 2 値回路網におけるそれらの安定性を求めればよいことが分かる．一方，

2 値回路網の状態の安定性は，定理 1 が示すように，エネルギーの極小性を確認することによっても求められるが[1)]，次節において詳細に示すように，2 値回路網と関数形として同一の多重一次形式のエネルギー関数を持つ連続値回路網の対応する状態の安定性からも求めることができる[15)]．本論文では後者の方法を用いることとし，本節ではまず連続値回路網におけるヒッチコック問題の許容解と非許容解の安定性を求めることにする．

連続値回路網では，ニューロンの値を次のように更新する[5)]．

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_j w_{ij} v_j + h_i, \tag{10}$$

$$v_i = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{u_i}{T}\right)\right). \tag{11}$$

ただし，u_i，v_i および h_i はそれぞれニューロン i の内部値，出力値，およびバイアス値，w_{ij} はニューロン j から i への結合の重み（一般に $w_{ii} \neq 0$），さらに T は適当な定数である．また，式 (11) に示されるように，ニューロン i の出力値 $v_i \in [0,1]$ は内部値 u_i のシグモイド関数によって定義される．なお，連続値回路網に関しても，式 (2) のようにエネルギーが定義され，回路網の状態 $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in [0,1]^n$ はエネルギーが減少するように変化し，超立方体である状態空間 $[0,1]^n$ 中の漸近安定な頂点 $\boldsymbol{v} \in \{0,1\}^n$ あるいは内部のエネルギー極小点に収束する（不安定な頂点には収束しない）．なお，連続値回路網の超立方体の頂点の安定性は次のようにして判定できることが知られている．

定理 4 回路網の状態（超立方体の頂点）$\boldsymbol{v} = (v_i) \in \{0,1\}^n$ はすべてのニューロン i に対して次が成り立てば漸近安定である：

$$\frac{\partial E}{\partial v_i}(\boldsymbol{v}) \begin{cases} > 0 & (v_i = 0) \\ < 0 & (v_i = 1) \end{cases} \tag{12}$$

また，あるニューロン i に対して次が成り立てば不安定である：

$$\frac{\partial E}{\partial v_i}(\boldsymbol{v}) \begin{cases} < 0 & (v_i = 0) \\ > 0 & (v_i = 1) \end{cases} \tag{13}$$

ただし，E は回路網のエネルギーである[15)]．

さて，連続値回路網でヒッチコック問題を解く場合も，数え上げ法を用いるが，E_{HB} とは若干異なる次の定式化を用いるのが一般的である[6),7),10),14)]．

$$\begin{aligned} &E_{HC'}(A, (B_{ij}), C; \boldsymbol{v}) \\ &= \frac{A}{2}\sum_i \left(\sum_j \sum_k v_{ijk} - s_i\right)^2 \\ &\quad + \frac{A}{2}\sum_j \left(\sum_i \sum_k v_{ijk} - d_j\right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_i \sum_j B_{ij} \sum_k v_{ijk}\,(1 - v_{ijk}) \\ &\quad + \frac{C}{2}\left(\sum_i \sum_j c_{ij} \sum_k v_{ijk}\right)^2 \end{aligned} \tag{14}$$

第 3 項は，各ニューロン値が 0 あるいは 1 をとるようにする 2 値化制約を表しており，この項を除けば，$E_{HC'}$ と E_{HB} は形としては同一である（入力 $\boldsymbol{v}$ と $\boldsymbol{z}$ の違いに起因する定義域の違いはいうまでもない）．

さて，松田[8)]は，巡回セールスマン問題を例にとり，制約条件を満たす許容解の漸近安定条件や不安定条件，満たさない非許容解の不安定条件を示し，この条件に従って問題の定式化中の係数を設定すると最適解が得やすいことをシミュレーションで確認した．同様にして，ヒッチコック問題に対する上記の連続値回路網 $E_{HC'}$ における許容解と非許容解の漸近安定条件や不安定条件は次のように示すことができる（証明は付録参照）．

補題 3 連続値回路網 $E_{HC'}$ において，許容解 $\boldsymbol{v} = (v_{ijk})$ は，$v_{ijk} = 1$ なる k が存在する任意の i，j に対して，

$$cost(\boldsymbol{v}) < B_{ij}/2Cc_{ij}$$

が成り立てば，漸近安定である．また，$v_{ijk} = 1$ で

$$cost(\boldsymbol{v}) > B_{ij}/2Cc_{ij}$$

なる i，j，k が存在すれば不安定である．ただし，$cost(\boldsymbol{v})$ は許容解 $\boldsymbol{v}$ の輸送費とする：

$$cost(\boldsymbol{v}) = \sum_i \sum_j c_{ij} \sum_k v_{ijk}.$$

補題 4 連続値回路網 $E_{HC'}$ において，次が成り立てばすべての非許容解は不安定である．

$$\begin{aligned} A > \max\{&\max_{i,j}\{B_{ij}/2 - nCc_{ij}c_m\}, \\ &\max_{i,j}\{B_{ij}/4 + Cc_{ij}c_M sdq/2\}\} \end{aligned} \tag{15}$$

ただし，$c_M = \max\{c_{ij}\}$，$c_m = \min\{c_{ij}\}$，$n = \sum_i s_i (= \sum_i d_i)$，$q = \max\{\max_i\{s_i\}, \max_j\{d_j\}\}$，さらに s と d はそれぞれ供給元と消費先の個数とする．

4.3 量子化回路網における許容解と非許容解の安定条件

前節の補題 3，4 に示した連続値回路網 $E_{HC'}$ にお

ける許容解や非許容解の安定条件や不安定条件に相当する結果を量子化回路網 E_{HQ} に関して示すために，まず，前節冒頭で触れた連続値回路網と2値回路網の状態の安定性の関係について具体的かつ厳密に示す．

補題 5 状態 $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ が連続値回路網 $E_{HC'}(A,(B_{ij}=2A+Cc_{ij}^2),C;\boldsymbol{z})$ において漸近安定（不安定）ならば，2値回路網 $E_{HB}(A,C;\boldsymbol{z})$ において安定（不安定）である．ただし，N は両回路網のニューロン数である．

（証明）まず，E_{HB} を基に2値回路網 $E_{HB'}$ を次のように定義する．

$$\begin{aligned}
&E_{HB'}(A,(B_{ij}),C;\boldsymbol{z})\\
&\quad\equiv E_{HB}(A,C;\boldsymbol{z})\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j B_{ij}\sum_k z_{ijk}(1-z_{ijk})\\
&\quad=\frac{A}{2}\sum_i\left(\sum_j\sum_k z_{ijk}-s_i\right)^2\\
&\qquad+\frac{A}{2}\sum_j\left(\sum_i\sum_k z_{ijk}-d_j\right)^2\\
&\qquad+\frac{1}{2}\sum_i\sum_j B_{ij}\sum_k z_{ijk}(1-z_{ijk})\\
&\qquad+\frac{C}{2}\left(\sum_i\sum_j c_{ij}\sum_k z_{ijk}\right)^2 \qquad (16)
\end{aligned}$$

$B_{ij}=2A+Cc_{ij}^2$ の場合，式 (3) のように $E_{HB'}$ は E_{HB} の多重1次形式となり，2値回路網 $E_{HB'}(A,(2A+Cc_{ij}^2),C;\boldsymbol{z})$ と $E_{HB}(A,C;\boldsymbol{z})$ のダイナミクスは同一である．さらに，エネルギー関数 $E_{HC'}$ と $E_{HB'}$ は関数形として同一であり（もちろん，連続値ニューロンと2値ニューロンの違いがあるので，両エネルギー関数の定義域は異なる），一般に，多重1次形式の関数形として同一のエネルギー関数を持つ連続値回路網と2値回路網に対して，前者において漸近安定（不安定）な状態は後者において安定（不安定）である[15]．以上より，状態 $\boldsymbol{z} \in \{0,1\}^N$ は多重一次形式の連続値回路網 $E_{HC'}(A,(B_{ij}=2A+Cc_{ij}^2),C;\boldsymbol{z})$ において漸近安定（不安定）ならば，2値回路網 $E_{HB'}(A,(2A+Cc_{ij}^2),C;\boldsymbol{z})$ において安定（不安定）であり，したがって，$E_{HB}(A,C;\boldsymbol{z})$ において安定（不安定）である．□

そこで，補題5と定理2を用いることにより，前節で示した連続値回路網 $E_{HC'}$ における許容解および非許容解の漸近安定条件および不安定条件から，次のように量子化回路網 E_{HQ} における許容解や非許容解の安定条件や不安定条件が得られる．

定理 5 量子化回路網 $E_{HQ}(A,C;\boldsymbol{x})$ において，許容解 $\boldsymbol{x}$ は次が成り立てば安定である．

$A/C > c_M(\boldsymbol{x})(cost(\boldsymbol{x})-c_M(\boldsymbol{x})/2)$

また，次が成り立てば不安定である：

$A/C < c_M(\boldsymbol{x})(cost(\boldsymbol{x})-c_M(\boldsymbol{x})/2)$

ただし，$c_M(\boldsymbol{x})=\max\{c_{ij}|x_{ij}\geq 1\}$．

（証明）まず，式 (7) の関数 h が許容解を保存することは定義より明らかであり，$\boldsymbol{x}$ を許容解とすると，$z \in h^{-1}(\boldsymbol{x})$ も許容解である．そこで，もし $\boldsymbol{z}$ が連続値回路網 $E_{HC'}(A,(B_{ij}=2A+Cc_{ij}^2),C;\boldsymbol{z})$ において漸近安定ならば，補題5より，2値回路網 $E_{HB}(A,C;\boldsymbol{z})$ において安定である．したがって，定理2より，許容解 $\boldsymbol{x}$ は量子化回路網 $E_{HQ}(A,C;\boldsymbol{x})$ において安定である．そこで，補題3において，$B_{ij}=2A+Cc_{ij}^2$ とすることにより，量子化回路網 $E_{HQ}(A,C;\boldsymbol{x})$ における許容解 $\boldsymbol{x}=(x_{ij})$ の安定条件は，$x_{ij}\geq 1$ なる任意の i，j に対して，

$A/C > c_{ij}(cost(\boldsymbol{x})-c_{ij}/2)$

となり，したがって，

$$A/C > \max_{i,j}\{\ c_{ij}(cost(\boldsymbol{x})-c_{ij}/2)\mid x_{ij}\geq 1\ \}$$

となる．さらに，任意の i，j に対して，$c_{ij}\leq c_M(\boldsymbol{x})\leq cost(\boldsymbol{x})$ なることを考慮すると，

$$\begin{aligned}
&\max_{i,j}\{\ c_{ij}(cost(\boldsymbol{x})-c_{ij}/2)\mid x_{ij}\geq 1\ \}\\
&\qquad=c_M(\boldsymbol{x})(cost(\boldsymbol{x})-c_M(\boldsymbol{x})/2) \qquad (17)
\end{aligned}$$

が成り立つので，本定理の前半を得る．後半の不安定条件も同様．□

定理 6 量子化回路網 $E_{HQ}(A,C;\boldsymbol{x})$ において，次が成り立てばすべての非許容解は不安定である．

$c_M/c_m < 2n$

$A/C > c_M^2(1+2dqs)/2$

（証明）定理5の証明と同様に，補題4において，$B_{ij}=2A+Cc_{ij}^2$ とすることにより，ただちに，本定理を得る．□

なお，定理6の2つの条件はいずれも十分条件であり，この条件を満たさなくても，すべての非許容解が不安定となる場合もある．とはいえ，本定理の条件には注意が必要である．まず，最初の条件は問題自体に関するものであり，回路網係数の選択で対処できるものではない．問題によってはこれを満たさないものがあり，すべての非許容解を不安定にできないかもしれない．しかし，現実の多くの問題ではこの条件は満されるものと思われ，さらに上述のように十分条件であることを考慮すると，非許容解の不安定化を現実に妨

げる大きな要因となることはなさそうである．一方，第 2 の条件を満たすとすると，任意の許容解 $\boldsymbol{x}$ に対して，

$$\begin{aligned} A/C &> c_M^2(1+2dqs)/2 \\ &> c_M^2 dqs \\ &\geq c_M^2(\boldsymbol{x})dqs \\ &\geq c_M(\boldsymbol{x})[c_M(\boldsymbol{x})dq] \\ &\geq c_M(\boldsymbol{x})cost(\boldsymbol{x}) \\ &> c_M(\boldsymbol{x})(cost(\boldsymbol{x})-c_M(\boldsymbol{x})/2) \end{aligned}$$

となるので，定理 5 より，すべての許容解が安定となってしまう．したがって，回路網は確かに非許容解に収束することはないが，すべての許容解に収束しうることとなり，得られる許容解の質は一般によくない．このことは，量子化回路網やヒッチコック問題に限らず，多くの 2 値回路網にも共通する限界である[8]．

5. シミュレーション

本章では，量子化回路網 E_{HQ} を具体的なヒッチコック問題に適用したシミュレーション例を用いて，4.3 節で示した理論的帰結を説明する．使用するヒッチコック問題の各供給元 S_i の在庫数 s_i，消費先 D_i の需要数 d_i，および供給元 S_i から消費先 D_j への輸送費 c_{ij} の具体的な値は**表 1** に示すように Takeda ら[14]と同一とした．最適解 $\boldsymbol{x}^*$ も表 1 に示すとおりであり，最小輸送費は $cost(\boldsymbol{x}^*)=38$，$c_M(\boldsymbol{x}^*)=c_{35}=4$ である．したがって，定理 5 より，

$$\begin{aligned} A/C &> c_M(\boldsymbol{x}^*)(cost(\boldsymbol{x}^*)-c_M(\boldsymbol{x}^*)/2) \\ &= 144 \end{aligned}$$

ならば，最適解 $\boldsymbol{x}^*$ は安定であり，$A/C<144$ ならば不安定となる．また，定理 6 に示した非許容解の不安定条件に関しては，$c_M=c_{24}=9$，$c_m=c_{12}=c_{34}=1$，$n=18$ なので，第 1 の条件は満たされている．また，$d=5$，$s=4$，$q=7$ なので，第 2 の条件は

$$\begin{aligned} A/C &> c_M^2(1+2dqs)/2 \\ &= 11340 \end{aligned}$$

となる．したがって，$A/C>11340$ ならばすべての非許容解は不安定であり，回路網は非許容解には収束しなくなる．

さて，シミュレーションは，回路網係数 A の値を一定値に固定し，C の値を変化させ，その各値に対してニューロンの初期値を乱数により変えて 1 万回実行した．シミュレーション結果として，許容解への収束率，得られた許容解に占める最適解の比率，得られた許容解の平均輸送費の 3 つと回路網係数比 A/C との関係を**図 1** および**図 2** に示す．

まず，図 1 に示された得られた許容解に占める最適解の比率（convergence ratio of optimal solutions to feasible solutions）の回路網係数比 A/C に対する変化について見てみる．上述のように，定理 5 より，最適解は $A/C<144$ では不安定で，$A/C>144$ ならば安定となり，A/C の値がさらに大きくなるに従って，多くの許容解が安定となることが分かるので，回路網が収束する許容解に占める最適解の比率が低下することが予想できる．図 1 に示された得られた許容解に占める最適解の比率（図中の×に破線）の変化傾向はこれと一致し，$A/C=145$ では得られた許容解に占める最適解の比率は 100%，すなわち，許容解に収束すれば必ず最適解が得られた．また，定理 5 の条件式の右辺の値が最適解よりも小さい許容解は存在しないかきわめて少ないであろうということが容易に推測できるので，$A/C<144$ では安定な許容解はほとんど（たぶんまったく）存在しないと予測できる．実際，図 1 に示された許容解への収束率（convergence rate of feasible solutions）が示すように，$A/C<144$ では回路網は許容解には収束してい

表 1 ヒッチコック問題の例
Table 1 Instance of Hitchcock problem.

(a) 供給元と在庫数
(a) Suppliers and their stock

供給元	S_1	S_2	S_3	S_4
在庫数	5	3	4	6

(b) 消費先と需要数
(b) Consumers and their demands

消費先	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
需要数	2	7	3	2	4

(c) コスト行列 $C=(c_{ij})$
(c) Cost matrix $C=(c_{ij})$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	5	1	7	3	3
S_2	2	3	6	9	5
S_3	6	4	8	1	4
S_4	3	2	2	2	4

(d) 最適解 $x^*=(x^*_{ij})$
(d) Optimal solution $x^*=(x^*_{ij})$

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5
S_1	0	3	0	0	2
S_2	2	1	0	0	0
S_3	0	0	0	2	2
S_4	0	3	3	0	0

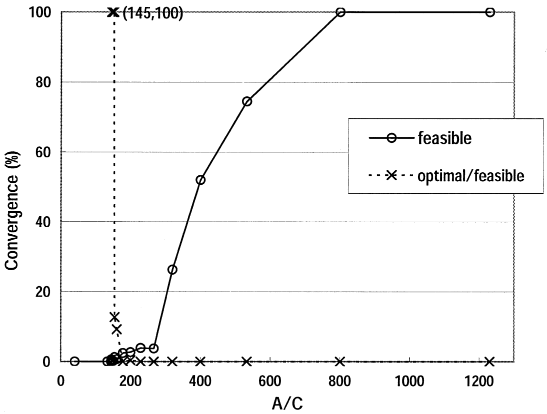

図 1　許容解への収束率と収束した許容解に占める最適解の比率
Fig. 1　Convergence rate of feasible solutions and convergence ratio of optimal solutions to feasible solutions.

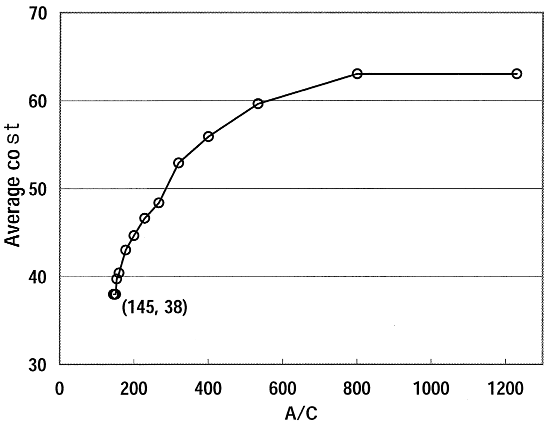

図 2　得られた許容解の平均コスト
Fig. 2　Average cost of feasible solutions obtained.

ない．さらに $A/C > 144$ の値が大きくなるに従って，上述のように多くの許容解が安定となるとともに，安定な非許容解が減少し，$A/C > 11340$ で安定な非許容解がなくなることが定理 6 あるいはその証明より分かる．したがって，$A/C > 144$ の値が大きくなるに従って許容解への収束が増大することが予測でき，図 1 に示された許容解への収束率（図中の○に実線）の変化傾向はこのことを示している．なお，シミュレーションでは，定理 6 の非許容解の不安定条件 $A/C > 11340$ ではなく，$A/C > 800$ で非許容解に収束しなくなっているが，このことは，定理 6 の条件が十分条件であるためである．

次に，定理 5 は，A/C の値が大きくなるに従って単に多くの許容解が安定になるだけでなく，質の悪い（輸送費の大きい）許容解が安定となることを推測させる．したがって，回路網によって得られる許容解の平均的な輸送費が増大することが予想できる．図 2 に示された得られた許容解の平均輸送費（average cost of feasible solutions obtained）の変化はこの予想と一致している．もちろん，図 1 に示された結果についての上述の説明と同じ理由で，$A/C = 145$ では平均輸送費は最小輸送費の 38 になっている．

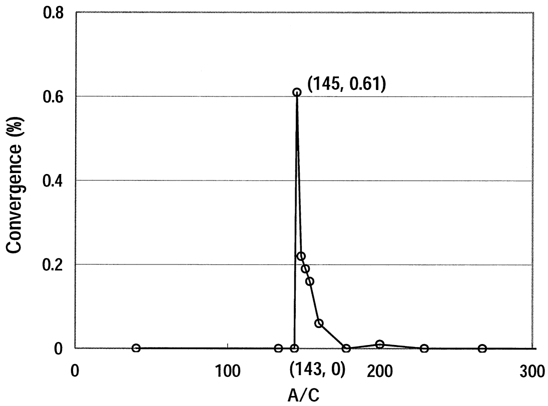

図 3　最適解への収束率
Fig. 3　Convergence rate of optimal solution.

最後に，**図 3** の最適解への収束率（convergence rate of optimal solutions）について見る．図 1 に示した得られた許容解に占める最適解の比率は $A/C = 145$ では 100%となったが，同じ図 1 の許容解への収束率からも分かるように，$A/C = 145$ 近辺ではほとんどは非許容解へ収束してしまうので，最適解への収束率はかなり低くなってしまうことが予想できる．実際，図 3 の結果は $A/C = 145$ では A/C の他の値に比べて突出してはいるが，わずか 0.6%にすぎず，A/C の値にかかわらず，全体的に非常に小さいものとなっており，性能はあまり良くない．このことは，量子化回路網のダイナミクスが性能のあまり良くない 2 値回路網のダイナミクスと実質的に同一であるという 3 章で示した理論的結果から容易に予測できることではある．しかし，量子化回路網の高速性は多数のシミュレーションを可能とし，2 値回路網に比べて同一時間内で最適解を得る可能性は格段に高くなる[6),7),10)]．

このように，本論文で導いた理論的結果の意味するところは広範にわたり，量子化回路網の実際の挙動の多くを適切に説明することのできるものである．

6. おわりに

量子化された飛び飛びの値をとるニューロンからなる対称結合神経回路網は，従来の 2 値や連続値ニューロンの場合と同様にエネルギー極小の状態に収束し，

組合せ最適化問題の求解に使用できる．特に，整数計画問題に適用することにより，従来より，ニューロン数，結線数が大幅に削減でき，逐次計算においてより高速に近似解を得ることが期待できる．しかし，2 値や連続値回路網と異なり，チューニング対象である回路網係数の値と安定となる状態との関係が理論的に未解明であった．本論文では，整数計画問題を解く際の 2 値回路網と量子化回路網のダイナミクスが実質的に同一であり，安定点が一致することを明らかにし，整数計画問題としてヒッチコック問題を例にとり，その許容解や非許容解に対応する回路網の状態が安定や不安定となるための回路網係数の条件を示した．これによって，2 値や連続値回路網と同様に，回路網係数のチューニング等の指針が得られた．

なお，本論文で対象とした量子化回路網は状態遷移にゆらぎをともなわないものであった．この量子化回路網の利点は逐次計算における高速性にあるが，得られる許容解の質は本論文でも理論的に明らかになったように 2 値回路網と同等であり，あまり良くない．量子化回路網の真の有効性は状態遷移にゆらぎをともなう場合であるが[10]，本研究はゆらぎをともなう量子化回路網のダイナミクス解明に至る第一歩となるものであり，意義は大きいと考える．

参 考 文 献

1) 阿部重夫：ホップフィールドニューラルネットの重みの決定法とその評価，情報処理学会論文誌，Vol.34, No.1, pp.21–28 (1993).

2) 相吉英太郎，吉川　厚：ニューラルネットワークによる組み合せ最適化，電気学会論文誌 C, Vol.112-C, No.9, pp.533–540 (1992).

3) Hopfield, J.J.: Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol.79, pp.2554–2558 (1982).

4) Hopfield, J.J.: Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, Vol.81, pp.3088–3092 (1984).

5) Hopfield, J.J. and Tank, D.W.: “Neural” computation of decisions of optimization problems, *Biol. Cybern.*, Vol.52, pp.141–152 (1985).

6) 松田　聖：量子化された慎重なニューロンとゆらぎ，信学技報，*NC 92-5* (1992).

7) Matsuda, S.: Quantum neurons and their fluctuation, *Proc. IJCNN93*, pp.1610–1613 (1993).

8) 松田　聖：対称結合神経回路網における解の安定性，電子情報通信学会論文誌，Vol.J77-D-II, No.7, pp.1366–1374 (1994).

9) 松田　聖：対称結合神経回路網で組合せ最適化問題を解く際の定式化の優劣に関する集合論的評価，電子情報通信学会論文誌，Vol.J78-D-II, No.10, pp.1531–1542 (1995).

10) 松田　聖：量子化ニューロンからなる対称結合神経回路網による整数計画法，電子情報通信学会論文誌，Vol.J81-D-II, No.6, pp.1354–1364 (1998).

11) Matsuda, S.: “Optimal” Hopfield network for combinatorial optimization with linear cost function, *IEEE Trans. Neural Networks*, Vol.9, No.6, pp.1319–1330 (1998).

12) 松田　聖：巡回セールスマン問題の高次の最適な定式化，電子情報通信学会論文誌，Vol.J83-D-II, No.4, pp.1162–1171 (2000).

13) Matsuda, S.: An “optimal” Hopfield network for combinatorial optimization and its approximate realization, *IEICE Trans. Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol.E83-A, No.6, pp.1211–1221 (2000).

14) Takeda, M. and Goodman, J.W.: Neural network for computation: number representations and programming complexity, *Appl. Opt*, Vol.25, No.18, pp.3033–3046 (1986).

15) 上坂吉則：2 値変数の実数値関数から導かれるエネルギーを持つニューロン回路網の安定性について，信学技報，*PRU 88-6* (1988).

付　　録

A.1 補題 3 の証明

任意の i，j および k に対して，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial E_{HC}}{\partial v_{ijk}}(\boldsymbol{v})
&= A\left(\sum_y\sum_z v_{iyz} - s_i\right)\\
&\quad + A\left(\sum_x\sum_z v_{xjz} - d_j\right)\\
&\quad + B_{ij}(1/2 - v_{ijk})\\
&\quad + Cc_{ij}\sum_x\sum_y c_{xy}\sum_z v_{xyz}\\
&= B_{ij}(1/2 - v_{ijk}) + Cc_{ij}cost(\boldsymbol{v})\\
&= \begin{cases} Cc_{ij}cost(\boldsymbol{v}) + B_{ij}/2 & (v_{ijk}=0)\\ Cc_{ij}cost(\boldsymbol{v}) - B_{ij}/2 & (v_{ijk}=1)\end{cases}
\end{aligned}
$$

となり，$v_{ijk}=0$ ならば，$\partial E_{HC'}(\boldsymbol{v})/\partial v_{ijk} > 0$ がつねに成り立つ．したがって，$v_{ijk}=1$ なる任意の i，j に対して，

$$cost(\boldsymbol{v}) < B_{ij}/2Cc_{ij}$$

が成り立てば，$\partial E_{HC'}(\boldsymbol{v})/\partial v_{ijk} < 0$ となり，式 (12) より，許容解 $\boldsymbol{v}$ は漸近安定である．逆に，$v_{ijk}=1$

で，

$$cost(\boldsymbol{v}) > B_{ij}/2Cc_{ij}$$

なる i，j が存在すれば，式 (13) より，許容解 $\boldsymbol{v}$ は不安定である． □

A.2 補題 4の証明

任意の非許容解 $\boldsymbol{v} = (v_{ijk}) \in \{0,1\}^{s \times d \times q}$ に対して，次のいずれかが成り立つ：

(a) $\sum_j \sum_k v_{ajk} - s_a < 0$，$\sum_i \sum_k v_{ibk} - d_b < 0$ なる a，b が存在．

(b) $\sum_j \sum_k v_{ajk} - s_a > 0$ なる a が存在し，かつ任意の b に対して $\sum_i \sum_k v_{ibk} - d_b \geq 0$.

(c) $\sum_i \sum_k v_{ibk} - d_b > 0$ なる b が存在し，かつ任意の a に対して $\sum_j \sum_k v_{ajk} - s_a \geq 0$.

(a) の場合は $v_{abc} = 0$ なる c が存在するので，

$$\partial E_{HC'}(\boldsymbol{v})/\partial v_{abc} \leq -2A + B_{ab}/2 + Cc_{ab}c_M sdq$$

となり，

$$A > \max_{ij}\{B_{ij}/4 + Cc_{ij}c_M sdq/2\}$$

が成り立てば，$\partial E_{HC}(\boldsymbol{v})/\partial v_{abc} < 0$ となり，$\boldsymbol{v}$ は不安定である．

(b) の場合，$v_{abc} = 1$ なる c が存在するので，同様に

$$\partial E_{HC'}(\boldsymbol{v})/\partial v_{abc} \geq A - B_{ab}/2 + nCc_{ab}c_m$$

となる．したがって，

$$A > \max_{ij}\{B_{ij}/2 - nCc_{ij}c_m\}$$

が成り立てば，$\partial E_{HC'}(\boldsymbol{v})/\partial v_{abc} > 0$ となり，式 (13) より，$\boldsymbol{v}$ は不安定である．(c) の場合も同一の条件が成り立てば，$\boldsymbol{v}$ は不安定となる．よって，補題を得る． □

(平成 16 年 2 月 23 日受付)
(平成 16 年 5 月 11 日採録)

松田 聖（正会員）

昭和 24 年生．昭和 51 年早稲田大学大学院理工学研究科電気工学専攻博士課程修了．工学博士．同年富士通（株）入社．基本ソフトウェアの研究開発に従事．昭和 62 年より東京電力（株）システム研究所にて人工知能および神経回路網の基礎研究に従事．平成 12 年より日本大学教授．専門は計算機科学．IEEE，ACM，電子情報通信学会，ソフトウェア科学会，人工知能学会各会員．Associate Editor of IEEE Trans. on Neural Networks.