

1次元2状態セル・オートマトンのネットワーク表現

香山 喜彦[†]

梅花女子大学 文化表現学部 情報メディア学科

1. はじめに

セル・オートマトンとネットワーク理論は、多くの複雑系のふるまいとその構造を理解する上で重要な役割を担っている。前者においては、特に Wolfram のクラス IV に分類されるルールが自己組織化の機構との関連性で議論され、計算万能なルールを含むことも示されている[1-2]。一方後者では、実世界における様々な複雑系を構成する要素間の繋がりが、スモールワールド性やスケールフリー性といったネットワークの特性により表現されており、精力的な研究がおこなわれている[3-5]。そこで本発表では、1次元2状態のセル・オートマトンの時間発展をネットワークの変化によって表現し、ネットワーク理論の特性指標を用いて、セル・オートマトンの動的な特徴を表現する方法を提唱する。具体的には、3近傍ルール(ETC)と5近傍総和型ルール(5TCA)を取り上げ、代表的なルールのネットワーク図を提示し、それらの特性指標について議論する[6]。

2. ネットワーク表現

2.1 ネットワークの導出

セル・オートマトンのドットパターンからネットワークを導出するのは以下の手順による。先ず N 個のセルを任意の初期配位から時間発展させたパターンと、その初期配位のうち 1 セルの状態を反転させたものから時間発展させたパターンとの差分を求める(図 1)。

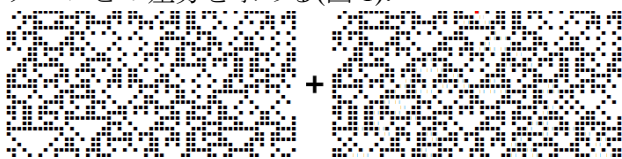


図 1. ルール 90

次に、得られた差分のうち初期配位で状態を変化させたセルと t ステップで状態が変化したセルとをエッジでつなぐ(図 2)。これは、初期配位の状態変化の情報が t ステップ後の各セルに伝達されたときみなすからである。この操作をすべてのセルについて行い、統合すると図 3 のネットワークを得る。なお、ここでは周期的境界条件を用いている。

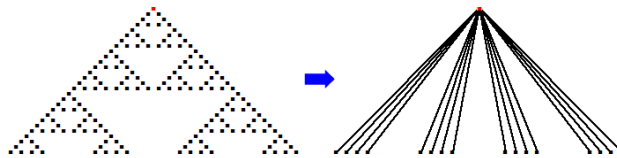


図 2. 初期配位からのエッジ

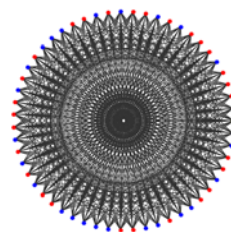


図 3. ルール 90 のネットワーク

図 4 に代表的なルールのネットワークを示す。なお、混同を避けるため、5TCA のルール番号には最初に T を付加することにする。ECA のルール 90 や 60, 5TCA のルール T42 などは加法性を持つためネットワークは初期配位に依存しなくなり、いずれも図 3 のような幾何学模様となる。

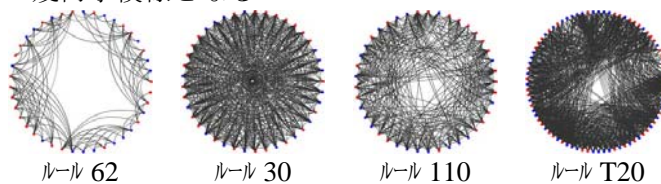


図 4. 代表的なルールのネットワーク

2.2 隣接行列

各ルールから導かれるネットワークの特性について具体的に議論するには隣接行列が必要となる。ルール関数の空間反転およびビット反転の変換に従って、隣接行列の変換則も求めることができる。特徴的な性質として、ビット反転不変なルールの中で、ルール番号を足し合わせると ECA の場合は 255(5TCA は 63)となるルールの組は隣接行列が等しくなることが示される。これらを減基数の補数ルールの組と呼べば、独立な ECA ルールにおいては 6 つ、独立な 5TCA ルールにおいては 4 つの組が存在する。

3. 特性指標

ここで取り上げる特性指標は、ノード間最短距離の逆数の平均(Efficiency)とクラスター係数(CC)およびノード(セル)の次数(k)の分布である。代表的なルールについて、ノード数に対する

Network representation of one-dimensional binary cellular automata

[†]Yoshihiko Kayama, Department of Media and Information, BAIKA Women's University

Efficiency の変化のグラフは図 5(両対数)のようになる。なお、紙面の都合上、以下では 5TCA のデータを中心に提示する。

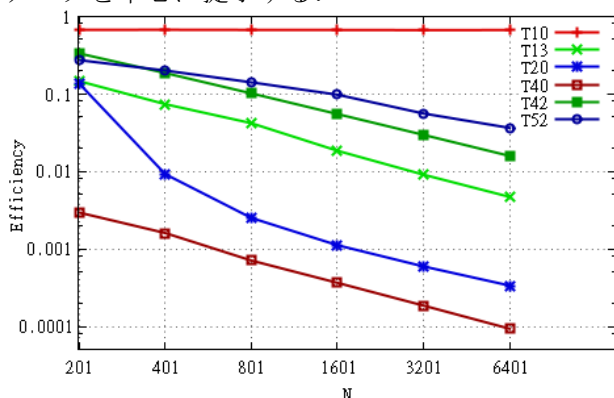


図 5. Efficiency のノード数依存(5TCA)

T40 のようにクラス II に属するルールはノード数 N の増加(時間ステップは ECA で $(N-1)/2$, 5TCA で $(N-1)/4$)に伴って傾き-1 で減少し, T10 のようなクラス III のルールはほぼ一定の値を取ることが分かる。また, クラス IV に分類されているルール 110 や T52 は, それらの中間の傾きで減少している。但し T20 についてはクラス II との違いは明確でない。

次に, Efficiency とクラスター係数の値の分布は図 6 のようになる($N=3201, t=800$)。

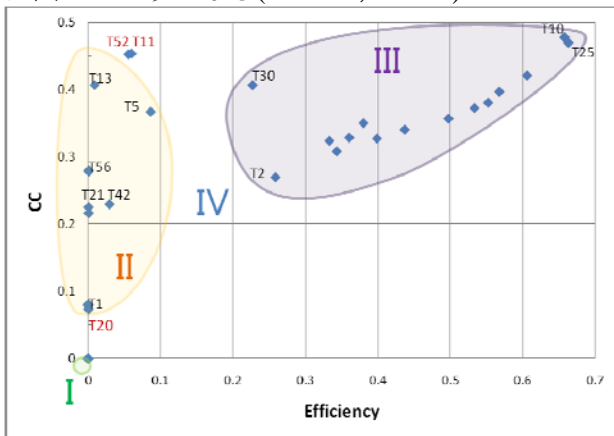


図 6. Efficiency と CC の分布(5TCA)

大域的なリンク構造が Efficiency に反映されることを考慮すれば, 広がりのあるドットパターンを描くクラス III のルールが大きな値を持つことは当然の結果である。反対に局所的なパターンに制限されるクラス II は CC 軸の近傍に分布する。また, CC の値が大きいものは比較的複雑な局所的パターンを描くことに対応している。またクラス IV ルールについては, これらの境界領域に位置すると考えられる。

さらに次数分布を求めると, 各ルールの特徴がさらに明確になる。特に T20 の場合は, 図 7 のようにスケールフリー性が確認できる。ただ

し, 特性が明確になるように 10 個の初期値からの次数分布を重ねて描画してある。類似の分布は他のクラス II のルールにも存在するが, これほど明確なもの確認できていない。

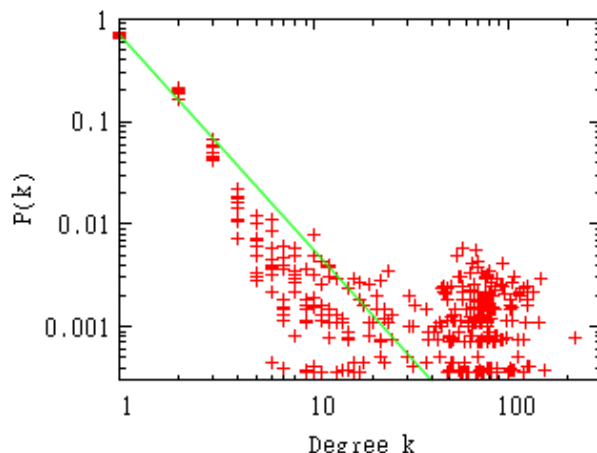


図 7. T20 の次数分布($N=3201, t=800$)

4. 結論

ここで提示した CA のドットパターンに対するネットワーク表現は, 比較的単純な手続きではあるものの, ネットワーク理論の特性指標を用いて, CA の動的ふるまいを解析する方法を提供できることを示している。実際にここで示した結果は, 各ルールのパターンが持つ特徴と符合するとともに, スケールフリーのような特徴的なネットワーク構造を持つルールも見つけることができた。“Edge of Chaos”[7]との関連性なども興味深い話題であり, 今後さらに研究を進める予定である。

参考文献

- [1] S. Wolfram, Statistical Mechanics of Cellular Automata: Rev. Mod. Phys. 55, pp.601–644 (1983).
- [2] N. Ollinger: Universalities in cellular automata a (short) survey: B. Durand (Ed.), JAC, MCCME Publishing House, Moscow, ISBN 978-5-94057-377-7, pp.102–118 (2008).
- [3] A.-L. Barabási, R. Albert, Emergence of Scaling in Random Networks: Science 286, pp.509–512 (1999).
- [4] D. J. Watts, S. H. Strogatz: Collective Dynamics of Small-World Networks, Nature 393, pp.440–442 (1998).
- [5] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, D.-U. Hwang: Complex networks: Structure and dynamics, Physics Reports 424X, pp.175–308 (1998).
- [6] Y. Kayama: Complex networks derived from cellular automata, arXiv:1009.4509 (2010).
- [7] C. G. Langton: Computation at the edge of chaos, Physica D 42, pp.12–37 (1990).