Vol.2014-ARC-213 No.1
Vol.2014-HPC-147 No.1
2014/12/9

# Taylor 展開法による留数の計算

平　山　　　弘[†1]

Taylor 級数の四則演算および関数は C++言語によって容易にできる。四則演算、関数、条件文等で記述された C++言語で定義された関数は容易に Taylor 展開できる。
留数計算には高精度な微分と極限操作が必要である。Taylor 級数を使うと高精度な微分操作や極限操作を容易に行える。このため、関数の留数は Taylor 級数を利用すると容易に精度良く計算できる。
留数計算を利用して、特異性を持つ関数を特異性を持つ部分分数と数値計算が容易に部分に分けることができる。
本文では、積分区間の近くに特異点を持つ関数の数値積分を例にその計算法の有効性を示した。

# Calculation of the Residue by Taylor Expansion Method

Hiroshi Hirayama[†1]

The arithmetic routine for quadruple precision floating point numbers which can consist of two double precision floating point numbers was created. The multiple precision arithmetic routine created by C++ language for the input and output of these numbers was used.
Residue calculation requires highly precise differentiation and ultimate operation. If a Taylor series is used, highly precise differentiation operation and ultimate operation can be performed easily. For this reason, the residue of a function is easily calculable with sufficient accuracy by using Taylor series.
Using the residue calculation, we can divide the function with singularities into partial fractions with singularities and the remaining portion that can easily integrate numerically.
in this paper, it is shown that the validity of the algorithm for the numerical integration of the function which has a singular point near the integration section to the example.

## 1. はじめに

関数論では、解析関数 $f(z)$ とその孤立特異点 $z=a$ に対し、留数 $Res(f(z), z=a)$ は次の積分[9] で定義できる。ただし、積分路 $c$ は点 $z=a$ を含む十分小さな閉曲線で正の向きに積分するものとする。

$$Res(f(z), x=a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)dz \tag{1}$$

この積分はいろいろな関数に適用でき、周期関数の 1 周期に渡る積分になるので、台形公式を適用して計算すると効率的に計算できることが知られている。

また、関数 $f(z)$ の孤立特異点 $z=a$ における $n$ 位の極における留数 $Res(f(z), z=a)$ は次のように書ける。

$$Res(f(z), x=a) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\{(z-a)^n f(z)\} \tag{2}$$

この計算は、数値微分法を使うと精度良く計算することは難しいが、自動微分法[5)7)] と同じく解析微分法である Taylor 展開法を使うと、簡単に精度良く計算できる。(1) の周回積分を数値積分するより、簡単で正確に計算できる。

数値積分で、積分区間内で急激に被積分関数が変動する問題をピーク型と呼ばれ、面倒な問題の一つとなっている。このような関数で分子分母が多項式で表される有理関数の場合、宮広等[6)] によって被積分関数を数値的に部分分数に展開し、その式を解析的に計算する方法が提案されている。たとえば、次のように積分できる。

$$\begin{aligned}\int\frac{5x-1}{x^3-3x-2.001}dx &= 0.99991359\log|x-2.0001111| \\ &\quad -0.49995679\log|x^2+2.0001111x+1.0004444| \\ &\quad +109.55211\tan^{-1}(54.773523x+54.776566)\end{aligned} \tag{3}$$

分子分母が多項式である有理関数であるという条件は、かなりきつい条件で比較的簡単な問題でもこの条件を満たさないためこの方法が使えない場合がある。この問題を解くには、まず被積分関数の極の位置、すなわち分母の零点の位置を決定する。上の例題では、極の位置は、DKA 法[8)1)] などによって求めることができ, 次の三点が極であることがわかる。

$$a_1 = 2.0001111, \quad a_2, a_3 = -1.0000555 \pm 0.018256996i \tag{4}$$

これから、次のように部分分数に分解できることがわかる。

†1 神奈川工科大学
Kanagawa Institute of Technology

$$\frac{5x-1}{x^3-3x-2.001} = \frac{e_1}{x-2.0001111} + \frac{e_2}{x-1.0000555+0.018256996i} + \frac{e_3}{x-1.0000555-0.018256996i} \quad (5)$$

$e_1$、$e_2$、$e_3$ は恒等式の性質を使って、連立一次方程式を解くことによっても、解くことができるが、$e_1$、$e_2$、$e_3$ はそれぞれの極の留数になっているので、留数計算をすることによっても決定できる。このようにして決定すると, 次のように部分分数に分解できる。

$$\frac{5x-1}{x^3-3x-2.001} = \frac{0.99991359}{x-2.0001111} + \frac{-0.9999136x+1.0001234}{x^2+2.0001111x+1.0004444} \quad (6)$$

ここで示した計算結果は、複素共役な位置にある極はまとめて計算し、複素数が表に出ない形に変形してある。

留数計算は、一般の関数にも適用可能であるから、この操作は、多項式からなる有理関数だけでなく一般の関数にも適用できる。一般の関数に適用した場合、極は一般に無限にあり、規則性のある場合を除いて、すべての極を計算することは不可能である。

上の積分 (4) を積分区間 [-1,1] で積分することを考える。式 (4) の不定積分を使えば簡単に計算できるが、この積分がピーク型である原因は積分路の近くに、すなわち $x = -1.0000555 \pm 0.018256996i$ の位置に極が存在するからである。この極をなくすようにすれば、積分はピーク型でなくなり、数値積分は容易に行える。この問題では、積分路近くの極をなくすようにする。すなわち, 被積分関数からピークの原因になる、式 (6) の右辺第 2 項の式を差し引いた関数を数値積分する。ピークの原因になる部分は解析的に計算する。

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \frac{5x-1}{x^3-3x-2.001}dx &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{5x-1}{x^3-3x-2.001}\right. \\ &- \left.\frac{-0.9999136x+1.0001234}{x^2+2.0001111x+1.0004444}\right) dx + \int_{-1}^{1} \frac{-0.9999136x+1.0001234}{x^2+2.0001111x+1.0004444}dx \\ &= \int_{-1}^{1} \left(\frac{5x-1}{x^3-3x-2.001} - \frac{-0.9999136x+1.0001234}{x^2+2.0001111x+1.0004444}\right) dx \quad (7) \\ &- \Big[0.49995679 \log|x^2+2.0001111x+1.0004444| \\ &- 109.55211 \tan^{-1}(54.773523x+54.776566)\Big]_{-1}^{1}\end{aligned}$$

本文では、Taylor 展開を利用すれば、多項式だけでなく、一般の関数の留数を計算できるので、多項式の有理関数だけでなく一般の関数の留数計算について考える。

留数計算ができると、関数を部分分数に分解できる。一般の関数を部分分数に展開した場合、無限個の部分分数に分解しなければならない場合や部分分数に分解できない問題等が出てくる可能性がある。無限個の部分分数に分解することは不可能なので、被積分関数をピーク型にしている部分だけを部分分数に分解し、ピーク型の問題を除去または低減し、効率的に計算することを提案する。

関数 $f(x)$ のピークを起こす原因が積分区間の近くの極 $x = c$ であるとする。このとき積分は、1 位の極を持つ場合、次のように変形し、ピークのない積分かピークの度合いが少ない積分に変形する。

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^b \left(f(x) - \frac{b}{x-c}\right) dx + \int_a^b \frac{b}{x-c}dx \quad (8) \\ &= \int_a^b \left(f(x) - \frac{b}{x-c}\right) dx + b\log\left|\frac{b-c}{a-c}\right| \quad (9)\end{aligned}$$

極の位置が実軸上にない場合、その極の位置と複素共役な位置にある極から構成される部分分数を加算し、複素数が表に出ない形にすることが多い。

ここで行った計算は OS として Windows 8.1、CPU として Intel I7-4770K を、コンパイラーとして Visual Studio 2013 の C++のコンパイラーを使用した。

## 2. Taylor 展開法

ここでは簡単な例を挙げて、Taylor 展開法[4] について説明する。関数 $f(x)$ を $x = a$ で Taylor 展開することを考える。$f(x) = x^2 + 3x + 5$ とすると

$$\begin{aligned}f(x) = f(a+(x-a)) &= (a+(x-a))^2 + 3(a+(x-a)) + 5 \quad (10) \\ &= (a^2 + 2a(x-a) + (x-a)^2) + (3a + 3(x-a)) + 5 \quad (11) \\ &= (5 + 3a + a^2) + (3 + 2a)(x-a) + (x-a)^2 \quad (12)\end{aligned}$$

関数 $f(x)$ が多項式ならば、このように容易に Taylor 展開できる。もし、三角関数や指数関数などが入った関数なら難しい問題になる。

$f(x) = e^x$ として $x = a$ で Taylor 展開する方法を示す。関数を Taylor 展開するには、$f(a+(x-a))$ を計算する。簡単に思いつく方法は、$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ の $x$ に $a + (x-a)$ を代入して計算する方法である。この方法でも求めることができるが、計算効率はあまり良くない。

また、次のような計算法もある。この方法は、1 次式の式を代入するとき効率的であるが

2 次以上の式の場合使えない欠点がある。

$$e^{a+(x-a)} = e^a e^{x-a} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a (x-a)^k}{k!} \tag{13}$$

より一般的な方法として、次のような計算法が知られている。まず、$g(x) = g_0 + g_1(x-a) + g_2(x-a)^2 + g_3(x-a)^3 + \cdots$ とし、$h(x) = e^{g(x)}$ を計算する。$h(x)$ を $x$ で微分すると

$$h'(x) = e^{g(x)} g'(x) \quad \text{すなわち} \quad h'(x) = h(x)g'(x) \tag{14}$$

が成り立つ。$h(x) = h_0 + h_1(x-a) + h_2(x-a)^2 + h_3(x-a)^3 + \cdots$ とする。この $h(x)$ と $g(x)$ の微分 $g'(x) = g_1 + 2g_2(x-a) + 3g_3(x-a)^2 + 4g_4(x-a)^3 + \cdots$ を式 (14) を代入して、$x-a$ の同次数の係数は等しいと置き、$h(x)$ の係数について解くと次の関係式が得られる。ただし、$h_0 = h(a) = e^{g(a)} = e^{g_0}$ となる。ここで、$m$ は、演算の対象となっている Taylor 級数の次数である。

$$h_0 = e^{g_0}, \qquad h_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k h_{n-k} g_k \qquad (n = 1, 2, \cdots, m) \tag{15}$$

このように計算すると、効率的に計算できるだけでなく、精度も良くなる。指数関数は最初に定数項を計算するとき使うが、それ以外では使用しない。$n$ 次の Taylor 展開式の指数関数は $n$ 次まで正確に計算できることがわかる。式 (15) からもわかるように、Taylor 展開の位置は多くの Taylor 展開式の計算式には入らないことがわかる。そのため以下では、すべて原点で展開された Taylor 展開式のみを扱う。

Taylor 展開式のいろいろな計算の手順を以下に記す。そのために、次の 3 個の級数を定義する。

$$f(x) = f_0 + f_1 x + \cdots \qquad g(x) = g_0 + g_1 x + \cdots \qquad h(x) = h_0 + h_1 x + \cdots \tag{16}$$

このとき、四則演算は、以下のように定義できる。これらの公式は簡単なものであるがまとめて、記載されている文献があまりないので以下に記載する。

(i) 乗和差 $h(x) = f(x) \pm g(x)$, $\quad h(x) = f(x)g(x)$

係数は次の式によって計算することができる。

$$h_n = f_n \pm g_n \qquad h_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

(ii) 除算 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

係数は次の式によって計算することができる。式からわかるように、$g_0 = 0$ のときは、計算することはできない。ただし、$f_0 = g_0 = 0$ の場合は、分子と分母を $x$ で割る操作を行う。この操作で、$g_0 \neq 0$ になれば、以下の式で除算を行うことができる。

$$h_n = \frac{1}{g_0} \left( f_n - \sum_{k=0}^{n-1} h_k g_{n-k} \right) \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

この公式は、$g(x)h(x) = f(x)$ とおいて、(16) の式を代入して、展開し、各次数の係数が等しいと置いて得られる。

(iii) 逆数 $h(x) = \mathrm{invers}(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$

係数は次の式によって計算することができる。除算と同じ方法で得られる。除算と同じように、$g_0 = 0$ のときは、計算することはできない。

$$h_0 = \frac{1}{f_0} \qquad h_n = -\frac{1}{f_0} \sum_{k=0}^{n-1} h_k f_{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \cdots, m)$$

(iv) 対数関数 $h(x) = \log f(x)$

この関数は、それぞれつぎの微分方程式を満たす。

$$f(x) \frac{dh(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}$$

この式に (16 の式を代入し、同次数の係数を等しいと置くと、次のような関係式が得られる。ただし、$h_0 = \log f_0$ である。

$$h_0 = \log f_0, \qquad h_n = \frac{1}{n f_0} \left( n f_n - \sum_{k=1}^{n-1} k h_k f_{n-k} \right) \qquad (n = 1, 2, \cdots, m)$$

(v) 微積分演算 $g(x) = \frac{df(x)}{dx}$ $\qquad h(x) = \int f(x)dx$ 微積分演算は、Taylor 級数特有の演算である。$g(x)$ が $f(x)$ の微分で,$h(x)$ が $f(x)$ の積分とすると、それぞれの係数は、次のような関係になる。

$$g(x) = \frac{df(x)}{dx} \qquad g_m = 0, \qquad g_n = (n+1) f_{n+1} \quad (n = 0, \cdots, m-1)$$

$$h(x) = \int f(x)dx \qquad h_0 = 0, \qquad h_n = \frac{1}{n} f_{n-1} \quad (n = 1, \cdots, m)$$

## 3. 留数の計算

複素関数論では、解析関数 $f(z)$ とその孤立特異点 $z = a$ に対し、次の積分で定義できる。ただし、積分路 $c$ は点 $z = a$ を含む十分小さな閉曲線で正の向きに積分するものとする。

$$Res(f(z), x = a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z)dz$$

この積分は、周期関数の 1 周期に渡る積分なので、台形公式を適用して計算すると効率的に計算できる。

特異点 $z=a$ が 関数 $f(z)$ の $n$ 位の極であるなら、関数 $f(z)$ は, 次のように Laurent 展開できる。

$$f(z)=\sum_{k=-n}^{\infty}a_k(z-a)^k$$

この関数を $x=a$ を含む閉曲線 $c$ で積分すると次のようになる。

$$\oint_c f(z)dz=\sum_{k=-n}^{\infty}a_k\oint_c(z-a)^k dz=2\pi i a_{-1}$$

すなわち、$Res(f(z),z=a)=a_{-1}$ となることがわかる。関数 $f(z)$ の留数は Laurent 展開したときの、$1/(z-a)$ の係数になる。

$n$ 位の極を持つ関数であるから $(z-a)^n f(z)$ は正則で、次のように Taylor 展開できる。

$$(z-a)^n f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_{k-n}(z-a)^k$$

留数は、$x^{n-1}$ の係数になる。これは、関数論では、次のようになっている。

$$Res(f(z),z=a)=a_{-1}=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$$

### 3.1 Taylor 展開法による留数の計算

Taylor 展開で留数を計算するために、関数 $f(z)$ の逆数 $1/f(z)$ を特異点 $z=a$ で Taylor 展開する。$n$ 位の特異点ならば、少なくとも $n$ 次まで Taylor 展開する。$g(z)=(z-a)^n f(z)$ は正則だから、Taylor 展開が可能でその逆数も Taylor 展開できる。$1/g(z)=g_0+g_1(z-a)+g_2(z-a)^2+g_3(z-a)^3+\cdots$ と置くと

$$\frac{1}{f(z)}=\frac{(z-a)^n}{g(z)}=(z-a)^n(g_0+g_1(z-a)+\cdots)=(z-a)^n\sum_{k=0}^{m}g_k(z-a)^k$$

となる。したがって

$$(z-a)^n f(z)=g(z)=g_0+g_1(z-a)+\cdots=\sum_{k=0}^{m}g_k(z-a)^k$$

この式から、次の関係式が得られる。

$$\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z-a)^n f(z)=g_n$$

関数 $f(z)$ が $z=a$ で 1 位の極を持つとき、$1/f(z)$ を $z=a$ で Taylor 展開する。Taylor 展開式を求めるために、1 階微分係数まで計算する。

$$\frac{d}{dz}\frac{1}{f(z)}=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$$

この式から、$1/f(z)$ を $z=a$ で 1 次までの Taylor 展開式は, 次のようになる。$f(z)$ が $z=a$ が極を持つので、$1/f(z)$ の定数項は 0 であることを考慮して

$$\frac{1}{f(z)}=-\frac{f'(a)}{f(a)^2}(z-a)$$

となる。1 位の極の場合, 次のように計算できる。

$$Res(f(z),z=a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=\frac{z-a}{-\frac{f'(a)}{f(a)^2}(z-a)}=-\frac{f(a)^2}{f'(a)}$$

2 位以上の極を持つ場合も同様に導けるが、複雑な形になるので、ここでは省略する。

## 4. 数 値 例

ここでは、留数の計算の具体例を示す。以下にある例題の積分 $I_1 I_2$ の正確な値は多倍長計算プログラム[3] を利用し、二重指数関数型数値積分法で計算したものである。

### 4.1 留数の単純な計算

関数 $f(x)=\tan x$ の $x=\frac{\pi}{2}$ における留数を求める。

まず関数 $f(x)$ の逆数 $\frac{1}{\tan x}=\frac{\cos x}{\sin x}$ を $x=\frac{\pi}{2}$ で Taylor 展開する。

$$\frac{1}{\tan x}=6.12303\times10^{-17}-(x-\frac{\pi}{2})+6.12303\times10^{-17}(x-\frac{\pi}{2})^2-0.333333(x-\frac{\pi}{2})^3$$

この関数の逆数は定数項のみゼロとみなせるので、1 位の極であることがわかる。1 位の極であることが分かったので、次の計算を行う。

$$\frac{x-\frac{\pi}{2}}{6.12303\times10^{-17}-(x-\frac{\pi}{2})+6.12303\times10^{-17}(x-\frac{\pi}{2})^2-0.333333(x-\frac{\pi}{2})^3}$$

分母の定数項は非常に小さいので、ゼロと見なして、分子と分母を $x-\frac{\pi}{2}$ で割り、Taylor 展開式としての割り算を行う。使用したプログラムでは、絶対値が $10^{-10}$ より小さいときゼロと見なすようになっている。この計算を行うと

$$-1-6.12303\times10^{-17}(x-\frac{\pi}{2})+0.333333(x-\frac{\pi}{2})^2$$

ここで、$x\to\frac{\pi}{2}$ の極限値を求めると-1 であることがわかる。すなわち

$$Res(\tan(x),x=\frac{\pi}{2})=-1$$

となる。

### 4.2 2 位の留数の計算

関数 $f(z)=\frac{\log z}{(z^2-2z+2)^2}$ の $z=1+i$ における留数を求める。

逆数関数 $1/f(x)$ を $x=1+i$ で Taylor 展開すると次のようになる。

$$0.0+0.0(x-1-i)+(-1.88109+4.26289i)(x-1-i)^2+(0.428955+1.70559i)(x-1-i)^3$$

定数項と 1 次の項が 0 であるから、2 位の極であることがわかる。

$$\frac{(x-1-i)^2}{(-1.88109+4.26289i)(x-1-i)^2+(0.428955+1.70559i)(x-1-i)^3}$$

を計算する。分子と分母を $(x-1-i)^2$ で割り、Taylor 展開を行う。

$$(-0.0866434-0.19635i)+(0.0713495+0.0383566i)(x-1-i)$$

この結果から、1 回微分すると定数項が留数になる。したがって留数は $0.0713495, 0.0383566i$ となる。

### 4.3 数値積分の応用 1

最初に例として挙げた次の数値積分を考える。

$$I_1 = \int_{-1}^{1} \frac{5x-1}{x^3-3x-2.001}dx = 164.95627835353708216153 5\cdots$$

この積分は、$x=-1$ 付近でピークを持つ積分であることがわかる。分母の零点は以下の 3 点である。

$$a_1 = 2.0001111, \quad a_2, a_3 = -1.0000555 \pm 0.018256996i$$

複素解 $-1.0000555 \pm 0.018256996i$ が最も積分区間の近くにあり、ピーク現象の原因であることがわかる。$-1.0000555 \pm 0.018256996i$ における留数は $-0.49995679 \mp 54.776058i$（復号同順）であるから、特異性を除いた被積分関数は, 次のようになる。

$$\begin{aligned} &\frac{5x-1}{x^3-3x-2.001} - \frac{-0.49995679-54.776058}{x+1.0000555-0.018256996i} \\ &\qquad - \frac{-0.49995679+54.776058}{x+1.0000555+0.018256996i} \\ &= \frac{5x-1}{x^3-3x-2.001} - \frac{-0.99991360x+1.0001234}{x^2+2.0001111x+1.0004444} \end{aligned} \tag{17}$$

元の積分を二重指数型数値積分法を使い、要求精度 $10^{-13}$ で計算したとき、関数計算回数 205 で精度は $1.82\times10^{-14}$ であった。この被積分関数から特異性を除いた積分では同じ要求精度で計算したとき、関数計算回数 49 で精度は $7.00\times10^{-14}$ であった。

特異性を除くことによって、関数計算回数を約 4 分の 1 にすることができた。この問題は簡単な式なので、関数計算の回数が減っても、除去するための特異性の部分の計算もあるのでそれほど大きく計算量が少なくなることはないと思える。

### 4.4 数値積分の応用 2

もう少し計算が難しい問題を扱う。ここでは、留数を使って特異積分の計算している問題[2] から、特異性をなくした次の積分を計算することを考える。

$$I_2 = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}(x^2+10^{-5})}dx = 993.453859322731620936306\cdots \tag{18}$$

この問題の特異点は簡単にわかり、$\pm0.0031622776601684i$ であることがわかる。この場合の留数は、$\pm158.1130924449331i$ であった。これから特異点を除く関数を計算すると $0.9999950000375/(x^2+0.00001)$ であることがわかる。したがって、次の計算を行う。

$$I_2 = \int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}(x^2+10^{-5})} - \frac{0.9999950000375}{x^2+0.00001}\right)dx + \int_{-1}^{1}\frac{0.9999950000375}{x^2+0.00001}dx$$

2 番目の積分は、解析的に次のように不定積分が得られるのでそれを使って、計算する。

$$\int \frac{0.9999950000375}{x^2+0.00001}dx = 316.22618489\tan^{-1}(316.22776602x)$$

この積分は、分母に無理関数が入っているので、宮広等の方法では、部分分数に分解することはできない。この数値積分を二重指数型数値積分法を使って要求精度 $10^{-13}$ で計算すると、関数計算回数 3395 で、精度は $1.27\times10^{-3}$ であった。上位 2 桁合う程度の精度であった。

この問題を、特異点を除いた被積分関数を計算すると二重指数型数値積分を使い要求精度 $10^{-13}$ で計算すると、関数計算回数 61 で、倍精度の精度で誤差が 0.0 となった。関数の計算回数で 50 倍以上の速度向上が図られるだけでなく、計算結果の精度が 2 〜 3 桁から倍精度の限界の精度である約 15 桁に向上した。この程度の改善されるならば、極の位置、その点の留数、さらに特異性削除等の作業を行っても、十分に効率的で有効であると思われる。

## 5. まとめ

解析微分操作である Taylor 展開を使うと、留数計算に現れる極限操作や微分操作を高精度で計算できる。この方法を使うと、多くの関数が部分的に部分分数に展開が可能である。もし、関数が特異性を持ち、その部分が部分分数に展開できるならその特異性を完全に取り除くことができる。積分区間にピーク型の特異性を持つ数値積分を効率的かつ高精度で計算できることを示した。

留数計算は、関数論では基本的な演算であり、多くの応用が期待できる。この計算法が、関数論の結果が数値解析に応用できるよう研究調査が行われることを期待する。

## 参考文献

1) Aberth O. Iteration Methods for Finding all Zeros of a Polynomials Simultaneously Math. Comp. 27(1973), 339–344
2) Bialecki B., A Sinc-Hunter quadrature rule for Cauchy principal value integrals, Math. Comput. 55(1990), 665–681
3) 平山 弘, C++ 言語による高精度計算パッケージの開発、日本応用数理学会論文誌，5 (1995),307–318
4) 平山, 舘野, 浅野, 川口, Taylor 級数演算ライブラリの使用法, 東北大学情報シナジー

センター大規模科学計算システム広報 SENAC, 40(2007) 29–68
5) 久保田光一, 伊理正夫, アルゴリズムの自動微分と応用、コロナ社、(1998)
6) 宮広栄一, 野田松太郎, 新しい有理関数近似によるハイブリッド積分の拡張について, 日本応用数理学会学会論文誌, 2(1992), 193–206
7) Rall,L. B. , Automatic Differentiation-Technique and Applications, Lecture Notes in Computer Science, Vol.120, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York(1981)
8) 山本哲郎, 数値解析入門, サイエンス社、(2003)
9) 矢野健太郎, 石原繁, 基礎数学, 裳華房,(1982)