

時間推移する定常分布の潜在構造モデル化

千葉 智暁^{1,a)} 日野 英逸² 赤穂 昭太郎³ 村田 昇¹

概要：購買者が限定されているマーケットでの製品の売上や株式市場などをモデル化するには、有限な資源を複数の関係者が奪い合うような条件を想定することが必要となる。本稿では、この条件下で存在しうる、資源の移動経路の動的な潜在構造と、関係者が持つ資源の量の変動に着目することで、潜在構造と時系列の関係性を非斉時マルコフ連鎖の遷移確率行列とこれによる分布の遷移でモデル化し、この表現に基づき時間変化する潜在構造を多変量時系列から推定する手法を提案する。

キーワード：時系列解析，グラフ構造，動的潜在構造，有限状態マルコフ連鎖

1. はじめに

売上高や交通量などのように、現実存在する多変量の時系列の多くは、各変数の時間変化の背後に潜在的な構造を持つ。このような場合、この潜在構造と時系列の関係をモデル化することで、時系列のより良い予測や、潜在構造の推定が可能になる [1-4]。

本稿では、有限な資源を複数の関係者が奪い合うような状況を想定し、この下で存在しうる動的な潜在構造と、関係者が持つ資源の量の変動の関係性をモデル化し、時系列データから動的な潜在構造を推定する手法を提案する。

変数間の潜在構造をモデル化し、その因果関係を推定する手法としては、共分散構造分析 [5, 6] が広く用いられている。また、計量経済学では、時系列データ間の相関の分析のために、Granger 因果のグラフ構造表現 [7] が用いられている。遺伝子の相互作用を解析するバイオインフォマティクスへの応用では、関係する変数の大規模化に伴い計算コストの削減が要求される。変数が多次元正規分布に従うことを仮定する Graphical Gaussian Model を用いた Sparse Inverse Covariance Selection (SICS) [8] は、多数の変数間の関係を効率的に推定することができる。SICS は無向グラフの推定を行う手法だが、Noda らは有向グラフ上でのランダムウォークをモデル化し、有向グラフを推定

する手法を提案した [9]。こうした手法で分析された結果は、変数を頂点(ノード)に置き、それらの関係を辺(エッジ)に対応させたグラフ構造として表現することが可能であり、このグラフ構造から相関・因果関係を見て取ることができる。

近年では、こうした手法をベースに、動的なグラフ構造を推定する手法が開発されている。例えば、時間方向に時系列データを区切って SICS を繰り返し適用する手法 [10, 11] や、隠れマルコフモデル回帰 (HMMR) を用いた手法 [12] がある。この他にも、社会・遺伝子ネットワークの変化を検出する応用研究 [13] がある。

既存研究で提案されているモデルは、複雑なグラフ構造の推定精度が高くないことや、変数が正規分布に従わない場合に精度が保証できないことが問題になる。また、購買者が限定されているマーケットでの製品の売上や、資本家の拠出する資本が限定されている株式市場の取引など、考慮する対象内の資源が有限であり、各ノードが持つ資源の合計がほぼ変化しない場合には、こうした制約をモデルに陽に組み込むことが望ましい。

本稿では、潜在構造が有向グラフを成し、この上のエッジを経て有限の資源が移動する問題を考える。資源が各ノード間を移動する際、移動前と移動後で全体の資源の総量が一定という条件下で、資源の遷移と、その前後の動的な潜在構造の関係を有限状態マルコフ連鎖としてモデル化し、時系列データから潜在構造を推定する手法を提案する。

まず、潜在構造を表現する有向グラフが時間的に変化しない場合について、資源の分布の遷移が斉時マルコフ連鎖により自然にモデル化できることを示す。有限状態マルコフ連鎖の定常性を用いたモデリングには、統計力学分野に

¹ 早稲田大学
Waseda University, Okubo 3-4-1, Shinjuku, Tokyo, 169-8555
² 筑波大学
University of Tsukuba, Tennoudai 1-1-1, Tsukuba, 305-8573
³ 産業技術総合研究所
National Institute of Advanced Industrial Science and Technology, 1-1-1 Umezono, Tsukuba, Ibaraki 305-8568
a) tomoaki.chiba@fuji.waseda.jp

おける古典的なモデル化 [14] や、金融工学におけるボラティリティのモデル化 [15] があるほか、情報分野で有名なモデル化としては PageRank [16–18] がある。PageRank は WWW 上の各 Web サイトの重要度をスコア化するために提案された手法である。WWW 上を移動する閲覧者の移動をマルコフ連鎖として捉えると、適当な条件の下で、このマルコフ連鎖は遷移確率行列に固有の定常分布に収束する。この定常分布をスコアとして、各 Web サイトの重要度を測ることができる。本稿では、この PageRank に関連する研究 [19] で得られた知見を元に、モデル化するマルコフ連鎖の収束性についての仮定をおく。

さらに、潜在構造を表現する有向グラフが時間的に変化する場合について、斉時マルコフ連鎖の定常分布への収束の速さに関する性質を用い、動的な潜在構造と多変量時系列の関係を、非斉時マルコフ連鎖の遷移確率行列と、これによる分布の遷移の関係で表現する。

2. 有向グラフ時系列と定常分布時系列の関係のモデル化

潜在構造上の各ノードにある資源の量を、その合計で正規化したものは、各ノード上の資源の存在比率を示す。本稿では、これを資源の分布と呼ぶ。まず、マルコフ連鎖により資源の分布が遷移する頻度は十分に大きく、これに対して潜在構造の変化は低頻度であると仮定する。さらに、データとして取得できる分布の観測もまたマルコフ連鎖による分布の遷移よりも低頻度であるとする。すなわち、観測の間隔は十分に大きく、この間に十分な回数の分布の遷移が行われるとし、観測された分布は定常分布に収束していると仮定する。2.1 節では、この潜在構造の変化と変化の間の時間区間での分布の動きについて述べる。次に、2.2 節では、この潜在構造の変化が含まれる全時間での分布の遷移について述べる。

以下では、マルコフ連鎖により分布が遷移する時刻を $\tau \in \mathbb{N}$ とおく。このうち、分布を観測する時刻 t の集合を T とおき、 $T \subset \mathbb{N}$ とする。また、潜在構造が時間変化する時刻 s の集合を $S \subset \mathbb{N}$ とする。

2.1 有向グラフにより決まる定常分布

まず潜在構造が時間的に変化しない場合について、資源の移動を斉時マルコフ連鎖としてモデル化する。

潜在構造は有向グラフを成し、この上のエッジを経て資源が移動すると考える。潜在構造上に n 個のノードがあるとし、その集合を V とする。時刻 τ における各ノード上の資源の分布を $\pi_\tau \in \mathbb{R}^n$ で表す。ただし、

$$\forall i, \tau \begin{cases} (\pi_\tau)_i \geq 0, \\ \sum_{i=1}^n (\pi_\tau)_i = 1 \end{cases}$$

が常に成立する。

次に、潜在構造として、この上のノード集合 V を結び移動経路を重み付きのエッジ $E \subseteq V^2$ とみなした有向グラフ $G = (V, E)$ を考える。

この有向グラフ G 上での分布の遷移確率を遷移確率行列 $G \in \mathbb{R}^{n \times n}$ で与える。ここで、行列 G の i 行 j 列成分 $(G)_{ij}$ はノード i からノード j への遷移確率である。このマルコフ連鎖の遷移は、有向グラフ G に従わないランダムな低確率の遷移を含むとする。このようなモデル化はマルコフ連鎖の既約性と非周期性を保証するために、PageRank でも用いられている [17]。これにより、グラフ G 上のすべてのノード V 間の遷移確率はすべて 0 でないとする。

$$0 < (G)_{ij} \leq 1, \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (1)$$

遷移確率行列 G と π_τ を用いて、有向グラフ G 上の時刻 $\tau + 1$ における分布 $\pi_{\tau+1}$ は

$$\pi_{\tau+1}^T = \pi_\tau^T G \quad (2)$$

のように計算される。

式 (1) より、遷移確率行列 G は正行列になるので、ペロン・フロベニウスの定理 [20] より、任意の非負ベクトル $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\forall i, (\mathbf{w}_0)_i \geq 0$ に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}_0^T G^k = \mathbf{w}_\infty^T \quad (3)$$

が成り立ち、 $\mathbf{w}_\infty = (w_1, \dots, w_n)^T$ は G の第一左側固有ベクトルとなる。これにより、マルコフ連鎖の収束先である定常分布 π について、以下の式が成り立つ。

$$\pi = \mathbf{w}_\infty / \sum_{i=1}^n w_i$$

また、正行列である遷移確率行列 G によるマルコフ連鎖は非周期的であることから、定常分布はただ一つとなり、必ず G の第一左側固有ベクトルとなる。以上により、定常分布 π が計算できる。

PageRank に関する研究から、上記のような遷移確率行列 G によるマルコフ連鎖の定常分布への収束は非常に高速であることが経験的に知られている [19]。ノード数 15、経過時間 12 ステップで計算した際の分布 π_τ の変化時系列を図 1 に示す。

ここで、縦軸は各ノードの番号で、ベクトル π_τ の各要素に対応する。丸のサイズは各要素の大きさを指しており、丸が大きいくほどその状態にある確率が高い。これをみると、 $\tau = 8$ から後ではほとんど分布が変化していないことがわかる。

2.2 有向グラフ構造の変化による定常分布の変化

前節では、分布が時間経過に従って遷移する確率過程を斉時マルコフ連鎖として定義した。これは、資源が存在する可能性があるノードの数が有限であり、さらに時刻 τ に

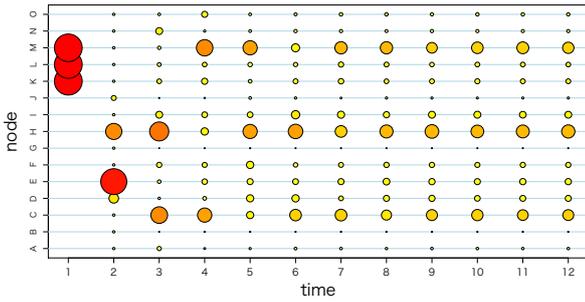


図 1 斉時マルコフ連鎖による分布 π_τ の時系列変化

Fig. 1 Change of distributions π_τ with time-homogeneous Markov chain with a finite state space

おける有向グラフ G_τ が時間経過に従って変化する可能性が無いということを意味していた。

本小節では、モデルの背後にあるグラフ構造が変化した場合の分布 π_τ の動態を示す。ただし、ここではグラフ構造の変化はマルコフ連鎖による分布の遷移に比べ低頻度であると仮定する。2.1 節でモデル化した確率過程を拡張し、有向グラフ G_τ が時刻 τ の経過に応じて逐次変化する場合をモデル化する。具体的には、有向グラフ G_τ に従って変化した遷移確率行列 G_τ による、非斉時有限状態マルコフ連鎖について、分布 π_τ の変化を考える。

G_τ が変化する時刻の集合を $S = \{s_1, \dots, s_k\} \subset \mathbb{N}$ と表すことにし、

$$G_\tau = G_{s_m} \quad (s_m \leq \tau < s_{m+1}) \quad (4)$$

と仮定する。このとき、遷移確率行列が変化する時間間隔

$$l_m = s_{m+1} - s_m \quad (5)$$

が十分に大きければ、十分大きい $r < l_m$ に対して近似的に以下の式が成り立つ。

$$\pi_{s_m}^T G_{s_m}^r \approx \pi_{G_{s_m}} \quad (6)$$

ただし、ここで $\pi_{G_{s_m}}$ は G_{s_m} を遷移確率行列とする斉時マルコフ連鎖の定常分布である。

また、2.1 節の最後に言及したように、多くの場合、連鎖が定常分布に収束する速度は非常に高速であることが知られており [19]、経験的には 10 回未満の連鎖で分布は定常分布にかなり近い値に到達する。そのため、式 (6) の条件として必要な l_m の大きさは 10 程度と考えるとよい。

したがって、遷移確率行列の変化回数が l 回であるとき、 l_m , $m \in \{1, \dots, l-1\}$ がすべて十分に大きい値をとっていれば、マルコフ連鎖により生成される各時刻の分布は、すべて次の遷移確率行列変化の前に定常分布 $\pi_{G_{s_m}}$ に収束すると考えてよい。

このときの分布 π_τ の変化を図 2 に示す。ここで、縦軸は各ノードの番号で、ベクトル π_τ の各要素に対応する。丸

のサイズは各要素の大きさを指している。また、等間隔に引かれた縦線は、遷移確率行列が変化する直前の時刻 $s-1$ を示しており、ここではインターバル $l=7$ 回の連鎖ごとに遷移確率行列が変化している。この図を見ると、分布の連鎖は遷移確率行列が変化する前に定常分布に近い値に到達していることがわかる。

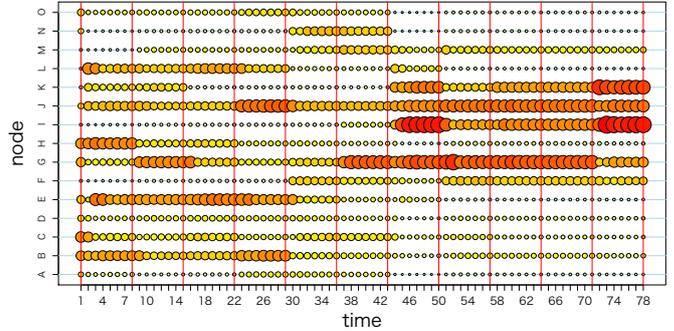


図 2 非斉時マルコフ連鎖による分布 π_τ の時系列変化

Fig. 2 Change of distributions π_τ with time-inheterogeneous Markov chain with a finite state space

収束の早さを考慮すると、遷移確率行列 G_τ の変化が連鎖の頻度に比べ頻繁でなければ、観測された分布 $\{\pi_t, t \in T\}$ のほとんどは定常分布に収束していると考えられる。したがって、疎らに観測された分布 π_t は対応する時刻での遷移確率行列 G_t を反映した定常分布の状態 π_{G_t} にあると考えるのは自然である。次節の構造推定では、この疎らに観測された定常分布 $\{\pi_t\}$ を入力データとして用いることを考える。

3. 有向グラフ時系列の推定

本節では、各時刻の分布から時間推移する遷移確率行列を推定する方法を示す。ここでは、前節までに定式化したモデルから生成される、全時刻の分布 $\{\pi_\tau\}$ から、一部を疎らに観測した $\{\pi_t; t \in T\}$ を入力データとし、観測時刻 $t \in T$ での遷移確率行列 G_t を推定する。まず、遷移確率行列 G_t を推定する上での制約条件として、遷移する定常分布 π_t を用いることを考える。また、定常分布を生成する遷移確率行列 G_t の行列としての性質と、時間的変動の仕方を考慮し、これらからいくつかの制約条件を与える。

3.1 各時刻の定常分布による条件

定常分布 π_t を遷移確率行列 G_t の条件を与えるために用いる。2.1 節および 2.2 節で示した有限状態マルコフ連鎖の定常分布についての性質から式 (3) が成立するので、定常分布 π_t は遷移確率行列 G_t の左第一固有ベクトルを正規化したものに一致し、対応する固有値は常に $\lambda = 1$ である。

これにより、 G_t は π_t を左第一固有ベクトルとして持つ

という条件が与えられる．

$$\forall t, \pi_t^T G_t = \pi_t^T \quad (7)$$

3.2 グラフ構造変化の微小性

以上で示した条件に加え，より候補を絞り込むために，潜在構造の特性を考慮し，遷移確率行列 G_t の変化を最小化する目的関数を用いる．

G_t が時間経過に従ってどのように変化するかという性質を考える．潜在構造の変化は頻繁ではなく，前の時刻での構造に微小な変化が加わる形で緩やかに変化すると考えられる．これを考慮して，グラフ構造の変化を微小にするために，以下のように損失関数 $L(\{G_t\})$ を定義する．

$$L(\{G_t\}) = \sum_{t \in T} \|G_t - G_{t-1}\|_1 \quad (8)$$

3.3 遷移確率行列に関する制約条件

行列 G_t は式 (1) での仮定から，正值行列である．これに加え，行列 G_t が遷移確率行列となる条件として，以下が必要である．

$$\forall t, \begin{cases} G_t \mathbf{e} = \mathbf{e} \\ (G_t)_{ij} > 0 \end{cases} \quad (9)$$

ただし， \mathbf{e} はすべての成分が 1 の n 次元ベクトルである．

3.4 制約条件と正則化項を用いた損失関数

以上で議論した制約条件と損失関数を纏めると，以下のような損失関数の最小化問題を制約条件の下で解けば良いことになる．

$$\min_{\{G_t\}} \sum_{t \in T} \|G_t - G_{t-1}\|_1 \text{ s.t. } \forall t, \begin{cases} \pi_t^T G_t = \pi_t^T, \\ G_t \mathbf{e} = \mathbf{e}, \\ (G_t)_{ij} > 0 \end{cases} \quad (10)$$

3.5 最適化

制約条件を含めた損失関数の最小化問題 (10) は，線形制約下で $L1$ ノルムを最小化する問題なので，行列 $\Xi_t \in \mathbb{R}^{n \times n}$ を変数として導入し，線形計画法による最適化を行う．

$$\min_{\{G_t\}, \{\Xi_t\}} \sum_{t \in T} \sum_{i,j=1}^n (\Xi_t)_{ij} \quad (11)$$

$$\text{s.t. } \forall t, \begin{cases} \pi_t^T G_t = \pi_t^T, \\ G_t \mathbf{e} = \mathbf{e}, \\ (G_t)_{ij} > 0 \\ -(\Xi_t)_{ij} < (G_t - G_{t-1})_{ij} < (\Xi_t)_{ij} \end{cases}$$

この最適化の中で変数になっているのは $\{\Xi_t\}$, $\{G_t\}$ であり，最小化の結果として得られる $\{\hat{G}_t\}$ を出力とする．これにより遷移確率行列 $\{G_t\}$ を推定できる．

4. 実験

本節では，人工データによる実験から，本手法の有効性を示す．人工データは，2 節のモデルに従い，分布の時系列を生成し，この時系列の背後にある遷移確率行列 G を式 (11) の最適化により推定する．今回の実験では，ノード数 $n = 10$ ，時間方向データ数を 60 として設定し，人工データを生成した．

4.1 人工データの生成

人工データとして分布の時系列を生成する際には，まず，遷移確率行列を先に生成し，これによるマルコフ連鎖として分布の時系列を生成する．

まず，初期の潜在構造として，ランダムな有向グラフ G_0 を作成する．これに対して新たなエッジの付加と既存のエッジの除去から成る僅かな変化を加え，次の時刻での有向グラフ G_1 を作成する．同様にして，時刻 t での有向グラフ G_t に変化を加える形で G_{t+1} を順次生成していく．これらを各時刻での潜在構造 $\{G_t\}$ とする．

次に，この有向グラフ上での遷移確率を表現する遷移確率行列 G_t について考える．有向グラフ G_t に従う遷移確率に，すべてのノード間について有向グラフ G_t に従わない低確率の遷移を加え，遷移確率行列 G_t を作成する．

2.1 節において示した有限状態マルコフ連鎖の定常分布への収束の早さを考慮すると，分布の時系列のうち，観測データ π_t は遷移確率行列 G_t により決まる定常分布の状態にあると考えるのが自然である．これに従い， G_t の第一左側固有ベクトル $\mathbf{w}_t = (w_1, \dots, w_n)^T$ から，各時刻 t の分布 π_t を生成する．

以上により，入力である観測データ $\{\pi_t\}$ と，推定対象である各時刻の遷移確率行列 G_t を生成した．

4.2 結果の評価

人工データに対し，3 節で示した推定法を用いた結果を示す．

まず，人工データで生成されたグラフ構造 $\{G_t\}$ と推定された各時刻でのグラフ構造 $\{\hat{G}_t\}$ を比較した際の Accuracy を図 3 に示す．このとき，Accuracy は，各ノード間のエッジの有無を評価し，

$$\text{Accuracy} = \frac{TP + TN}{TP + TN + FP + FN} \quad (12)$$

により計算した．ここでは，データを生成し推定するまでの全試行を 50 回繰り返し得られた平均値と標準偏差を示している．横軸には分布 π_t の観測時刻 t を取り，縦軸には Accuracy を取った．この結果から，観測データの末端

$t = 0, t = 60$ に近いほど精度が落ち、中央部では精度が高くなることわかる。

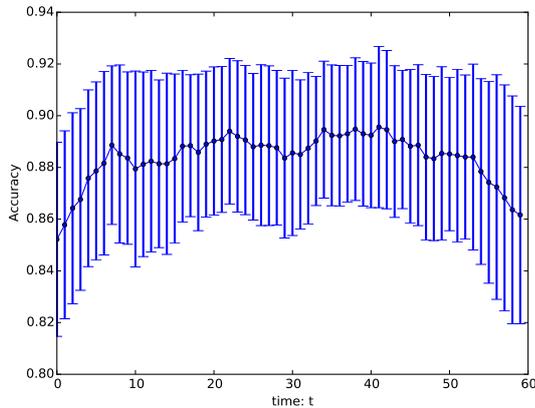


図 3 各時点でのグラフ構造の推定精度
Fig. 3 Accuracy of estimated graphs

次に、人工データで生成された遷移確率行列 $\{G_t\}$ と、推定された遷移確率行列 $\{\hat{G}_t\}$ について、 $t = 0, t = 19, t = 49, t = 60$ での遷移確率行列を図 4 にそれぞれ図示する。左に人工データで生成された遷移確率行列、右に推定された遷移確率行列を描画した。色が濃い要素は数値が高く、薄い部分は数値が低い。この図を見ると、図 3 のプロットから見て取れるのと同様に、観測データの末端 $t = 0, t = 60$ に近いほど精度が落ちているが、中間部では比較的良好な推定ができています。

次に、推定された遷移確率行列 \hat{G}_s の各要素をエッジの存在確率として考え、エッジの有無に関して ROC カーブを描いたものを図 5、Precision-Recall curve を描いたものを図 6 に示す。ノード数 n に対して、存在できるエッジの数は n^2 であるが、グラフ構造の表現では n^2 に対して半数以上にエッジが張られてしまうと過密なグラフ構造になってしまう。そのため、自然なグラフ表現では n^2 に対して低い割合でしかエッジが存在しないものになる。今回生成した人工データの構造でもこのことを考慮しており、エッジが存在する部分とエッジが存在しない部分の割合はアンバランスになっている。このことから、True Negative を評価に含める ROC カーブは比較的良好な結果になっている。一方で、Precision-Recall curve の結果からは、エッジをすべて推定するのではなく、顕著な一部分のエッジを抽出することを目的とする上では有効であることがわかる。ただし、Recall を高くしたとき、Precision が大きく低下してしまうことから、人工データで生成したすべてのエッジを推定することは困難であることがわかる。

5. まとめ

本稿では、有限な資源を複数の関係者が奪い合うような

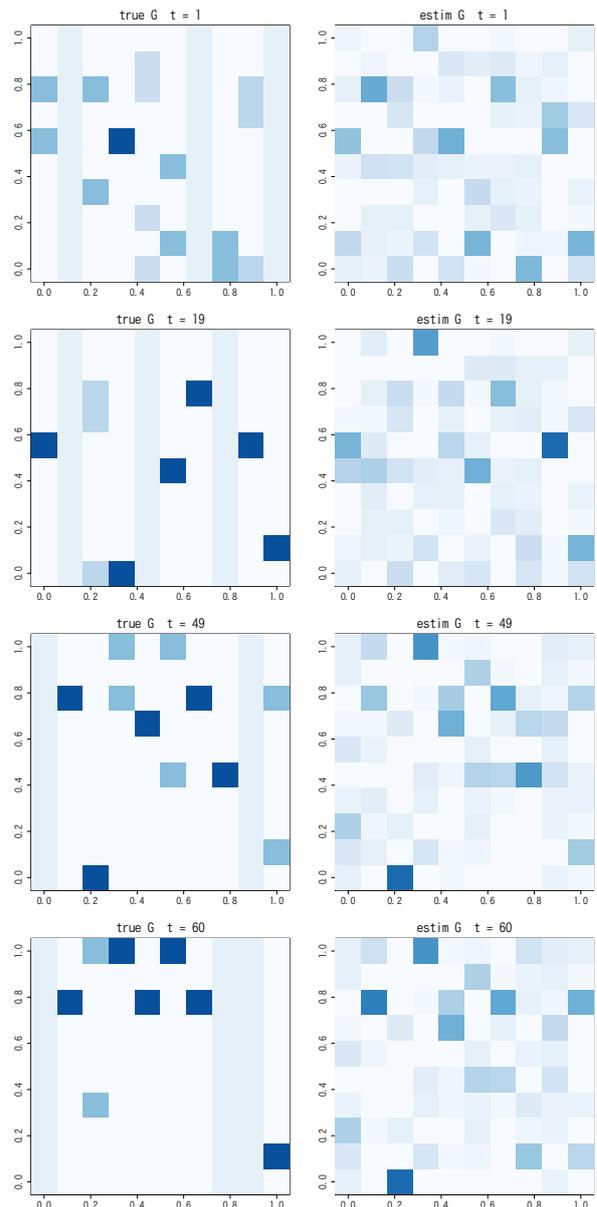


図 4 人工データの遷移確率行列と推定された遷移確率行列
Fig. 4 True and estimated transition probability matrices

状況を想定し、各関係者が持つ資源の量の時間遷移を非斉時マルコフ連鎖と捉えることで、動的な潜在構造を遷移確率行列として推定する手法を提案した。

資源の量の時間遷移の時系列に対する疎な観測は、その時刻での遷移確率行列に固有の定常分布に収束していると仮定し、この定常分布を構造の制約条件として用いた。また、構造変化の動態として、変化は緩やかであるという仮定を与え、これを制約として加えた。これらの制約の元で、線形計画法による最小化問題を解くことで、定常分布の時間遷移から各時点での遷移確率行列を推定する手法を示した。

人工データを用いた実験では、観測時間の末端部分にない遷移確率行列の推定は比較的精度が高いことを示した。また、グラフ構造として潜在構造を抽出する上では、構造

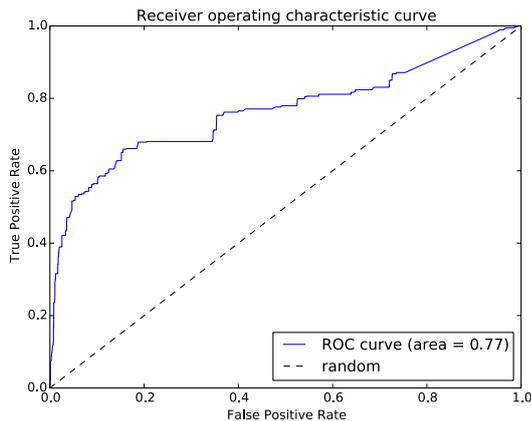


図 5 有向グラフ \mathcal{G} の推定における ROC カーブ
Fig. 5 ROC curve in estimating directed graph \mathcal{G}

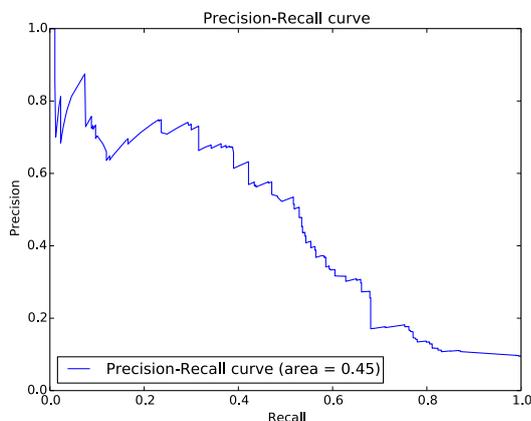


図 6 有向グラフ \mathcal{G} の推定における Precision-Recall カーブ
Fig. 6 Precision-Recall curve in estimating directed graph \mathcal{G}

の上で比較的顕著なエッジは精度よく抽出できていることを示した。

今後の課題として、制約やデータの利用方法の変更などによって精度を向上させることや、遷移確率行列 G から、その背後にある有向グラフ \mathcal{G} を精度よく推定する手法の開発などが挙げられる。また、観測データにノイズが加わった場合の推定精度を向上させることも課題である。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 25120009, 25120011, 26120504 及び 25870811 の補助を受けて行われた。

参考文献

[1] Box, G. E. P., Jenkins, G. M. and Reinsel, G. C.: *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, Vol. 3, John Wiley & Sons (2013).
[2] Fildes, R.: *Forecasting structural time series models and the kalman filter*, Vol. 8, No. 4, Cambridge University Press (1992).
[3] Wu, Y., Hernández-Lobato, J. M. and Ghahramani, Z.: Dynamic Covariance Models for Multivariate Financial Time Series, *Proceedings of the 30th International Con-*

ference on Machine Learning (ICML-13) (2013).
[4] Kummerfeld, E. and Danks, D.: Tracking Time-varying Graphical Structure, *Advances in Neural Information Processing Systems 26*, pp. 1–9 (2013).
[5] Wright, S.: Correlation and causation, *Journal of agricultural research*, Vol. 20, No. 7, pp. 557–585 (1921).
[6] Pearl, J.: *Causality: Models, Reasoning, and Inference*, Cambridge University Press (2001).
[7] Granger, C. W. J.: Investigating causal relations by econometric models and cross-spectral methods, *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, pp. 424–438 (1969).
[8] Dempster, A. P.: Covariance selection, *Biometrics*, pp. 157–175 (1972).
[9] Noda, A., Hino, H., Tatsuno, M., Akaho, S. and Murata, N.: Intrinsic graph structure estimation using graph laplacian., *Neural computation*, Vol. 26, No. 7, pp. 1455–83 (online), DOI: 10.1162/NECO_a.00603 (2014).
[10] Xuan, X. and Murphy, K.: Modeling changing dependency structure in multivariate time series, *Proceedings of the 24th international conference on Machine learning*, pp. 1055–1062 (2007).
[11] Ide, T., Lozano, A. C., Abe, N. and Liu, Y.: Proximity-Based Anomaly Detection Using Sparse Structure Learning., *SDM* (2009).
[12] Liu, Y., Kalagnanam, J. R. and Johnsen, O.: Learning Dynamic Temporal Graphs for Oil-production Equipment Monitoring System, *Proceedings of the 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining*, pp. 1225–1233 (2009).
[13] Ahmed, A. and Xing, E. P.: Recovering time-varying networks of dependencies in social and biological studies., *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 106, No. 29, pp. 11878–83 (online), DOI: 10.1073/pnas.0901910106 (2009).
[14] Oliveira, C. and Werlang, T.: Ergodic hypothesis in classical statistical mechanics, *Revista Brasileira de Ensino de Física*, pp. 189–201 (2007).
[15] Genon-Catalot, V., Jeantheau, T. and Laredo, C.: Stochastic volatility models as hidden Markov models and statistical applications, *Bernoulli*, Vol. 6, No. 6 (2000).
[16] Kleinberg, J. M.: Authoritative Sources in a Hyperlinked Environment, *Journal of the ACM (JACM)*, No. May 1997 (1999).
[17] Page, L., Brin, S., Motwani, R. and Winograd, T.: The PageRank Citation Ranking: Bringing Order to the Web., Technical Report 1999-66, Stanford InfoLab (1999).
[18] Ng, A., Zheng, A. X. and Jordan, M. I.: Link analysis, eigenvectors and stability, *Proceedings of the 17th international joint conference on Artificial intelligence* (2001).
[19] Haveliwala, T. H. and Kamvar, S. D.: The Second Eigenvalue of the Google Matrix, *Stanford University Technical Report*, No. 1 (2003).
[20] Berman, A. and Plemmons, R. J.: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*, Society for Industrial and Applied Mathematics (1994).