フーリエ変換を用いた B スプライン曲線補間による CT 画像の鮮鋭化

沼田宗敏[†1,†2] 野村俊[†2] 神谷和秀[†2]
輿水大和[†3] 田代発造[†4]

CT（Computed Tomography）は投影されたデータから原画像を再構成する方法で，医療分野をはじめ FA 分野でも広く応用されている．しかし，CT で再構成された画像の輪郭は鮮鋭度が低く，このため微小欠陥を見逃しやすい．本論文では，再構成画像の鮮鋭度低下の原因の 1 つが，逆投影処理における直線補間にあることを示し，これを B スプライン曲線による曲線補間に置き換える．B スプライン曲線の制御点はフーリエ変換により計算されるが，この計算を行っても計算コストは変わらない．実験では，従来法と比較し，RL フィルタと SL1 フィルタを用いた場合で不鮮鋭度が 1/2 以下，処理時間がほぼ同等となることを確認した．

Sharpening of CT Images by B-spline Curve Interpolation Using Fourier Transform

Munetoshi Numada,[†1,†2] Takashi Nomura,[†2] Kazuhide Kamiya,[†2]
Hiroyasu Koshimizu[†3] and Hatsuzo Tashiro[†4]

Computed tomography (CT) is a method by which a cross section of an object is reconstructed based on a set of projected profiles from various directions along the cross section, and is widely used in the medical and industrial fields. However, microflaws are often overlooked due to the fact that the edges of the patterns in the reconstructed CT image are likely to be unsharp. In this paper, we demonstrated that one of the causes of the decreased sharpness of the reconstructed image is associated with linear interpolation during the back-projection process, and in our method, the linear interpolation is replaced by cubic interpolation using the B-spline curve. In addition, by calculating the control points of the B-spline curve by Fourier transform, the process time required for the calculation of the control points could be reduced. Experimental considerations showed that the unsharpness around the edges was reduced to less than half that of the conventional method, and that the processing time was approximately equivalent to that of the conventional one.

1. はじめに

近年，CT（Computed Tomography）手法によって[1)]，物体や空間の断面を可視化する試みが数多くなされている．X 線 CT，SPECT，PET など多くの実績を持つ医療分野[2)~4)] や工業分野[5),6)] をはじめ，熱陰極電子銃の電子密度分布やプラズマの発光分布など空間における物理現象を計測する手段[7),8)] としても CT 手法は応用分野を広げている．この CT は，原画像 $f(x, y)$ をあらゆる角度 θ で投影しその投影データ $g(s, \theta)$ から原画像を再構成する技術である．CT 画像の再構成には，FBP 法（Filtered back projection method）が広く用いられている[9)]．これは**図 1** に示すように，投影データ $g(s, \theta)$ を 1 次元フーリエ変換し，周波数空間でフィルタ関数をかけ，これを 1 次元フーリエ逆変換して実空間に戻す．このフィルタ処理された投影 $g'(s, \theta)$ を式 (1) に示す合成正弦曲線に従って線積分し，再構成画像 $\bar{f}(x, y)$ を得る．

$$s = x\cos\theta + y\sin\theta \tag{1}$$

ここに，θ は原点を通る直線の角度，s は直線に投影した点と原点との間の距離である．画像再構成に

†1 株式会社ロゼフテクノロジー
Lossev Technology Corp.
†2 富山県立大学大学院工学研究科
Graduate School of Engineering, Toyama Prefectural University
†3 中京大学情報科学部
School of Computer and Cognitive Sciences, Chukyo University
†4 富山大学工学部
Faculty of Engineering, Toyama University

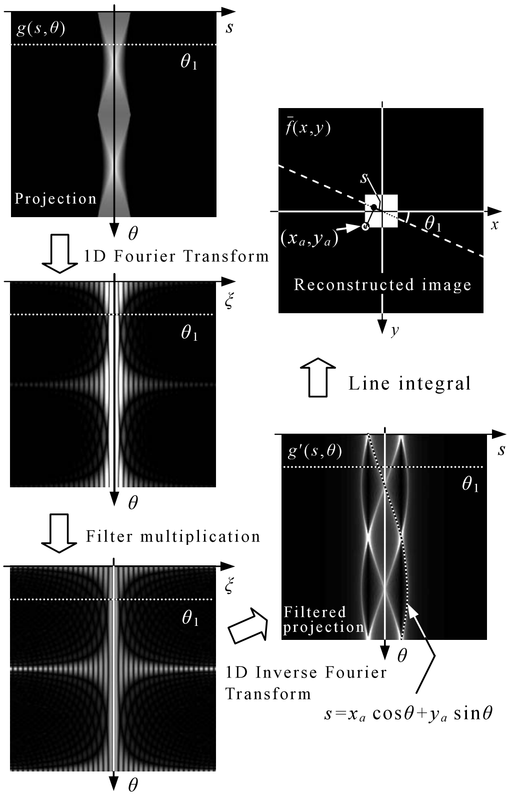


図 1 FBP 法
Fig. 1 FBP method.

おいて，フィルタ処理された投影を求めるまでをフィルタ処理，それ以降を逆投影処理と呼ぶ．また，周波数空間におけるフィルタ処理を実空間のコンボリューションに置き換えた方法を，特にコンボリューション法（Convolution back projection method）という[10]．

さて，再構成された画像の輪郭は鮮鋭度が低く，微小欠陥を見逃しやすい．この原因は，フィルタ関数の周波数特性によるものである．ノイズを低減させるためのフィルタ関数による高周波成分の抑制が空間分解能を低下させ[11]，輪郭部分で影響が顕著に現れるためである[12]．一方，逆投影処理における補間誤差も輪郭の鮮鋭度を低下させる．フィルタ処理された投影を式 (1) に従って線積分すると，θ は標本値であるが s は実数となる．このため，フィルタ処理された投影は標本値 s_k を用いて直線補間しなければならない．この直線補間の誤差により，再構成画像の輪郭の鮮鋭度が低下する．ところが，これまでこの補間誤差は問題視されてこなかった．それは，輪郭の鮮鋭度がフィルタ関数の周波数特性によって低下するため，これに含まれる補間誤差の影響が現れにくかったためである．しかし，近年では X 線 CT 装置の高性能化により，投影に含まれるノイズが小さくなり，高周波成分をより抑制しないフィルタ関数が使えるようになってきている．このため，今後，輪郭の鮮鋭度に与える補間誤差の影響が増大すると考えられる．

Holbelt らは FBP 法で生じる補間誤差に注目し，直線補間の代わりに B スプライン曲線を用いた近似法を提案した[21]．医療画像処理にスプライン補間を用いると，最良のコストパフォーマンスが得られるからである[22]．ただ，スプライン補間の計算は複雑である．そこで Holbert らはスプライン補間ではなく，与えられたデータ点との 2 乗誤差が最小の B スプライン曲線を用いる近似法を提案した．そして再構成画像の SN 比が最大になることを示した[23]．しかし，近似は平滑化手法の 1 つであるため輪郭の鮮鋭度を低下させる．これより，再構成画像全体の SN 比は数 pixel の微小欠陥検出の性能の評価には使えないことが分かる．

本研究では，輪郭の鮮鋭度を測る指標として，再構成画像の輪郭画像と原画像の輪郭画像との正規化相関値を用いることにする．そして，輪郭の鮮鋭度を向上させるため，近似法ではなく B スプライン曲線を用いた補間法を用いる．そして，この補間法には周波数空間で B スプライン曲線の制御点を計算する方法を用いることにする．このため，連立 1 次方程式や内積の計算[16),21] の必要がなく，簡単に計算できる．また，これを FBP 法に適用すると，B スプライン曲線を用いた曲線補間による画像再構成法ができる．この方法では制御点をフィルタ処理の中で計算するが，フィルタ処理に必要な計算コストは FBP 法と同じであるため，制御点算出のための計算時間にオーバヘッドが生じない．さらに，輪郭の鮮鋭度に及ぼす補間誤差とフィルタ関数の特性の影響についても調べる．

以下，2 章では逆投影処理における直線補間の問題点と，これに代わる B スプライン曲線による曲線補間について論じる．3 章では，フーリエ変換を用いた B スプライン曲線の制御点の算出方法を示し，FBP 法へこれを適用することにより，制御点算出のための計算コストが増加しないことを示す．4 章では，周波数特性の異なる 3 種類のフィルタ関数を用いて，従来法と輪郭の鮮鋭度を比較する．そして，提案手法がフィルタ関数の周波数特性によらず輪郭の鮮鋭度を向上させること，2 種類のフィルタ関数では不鮮鋭度が半減することを示す．また，処理時間を従来法と比較し，制御点算出のための計算コストのオーバヘッドが生じないこと，また，全体の処理時間が従来法と大差ないことを確認する．5 章でまとめを行う．

2. 逆投影処理における B スプライン曲線補間

この章では，逆投影処理における直線補間法が再構成画像の輪郭を不鮮鋭にする原因について調べる．次に，これを B スプライン曲線を用いた曲線補間に置き換える．

2.1 直線補間法の問題点

離散化された投影を $g(s_k, \theta_l)$ とする．投影の標本値 θ_l における 1 次元離散的フーリエ変換を $G^*_\theta(\xi_n)$ とすると，次式が成立する．

$$G^*_\theta(\xi_n) = \mathrm{DFT}[g(s_k, \theta_l)]. \quad (2)$$

ここで，$\mathrm{DFT}[f]$ は関数 f の離散的フーリエ変換を示す．同様に，$\mathrm{DFT}^{-1}[F]$ は関数 F の離散的フーリエ逆変換を示すものとする．$G^*_\theta(\xi_n)$ にフィルタ関数 $H(\xi_n)$ をかけ合わせ，続いて 1 次元離散的フーリエ逆変換を行うと，フィルタ処理された投影 $g'(s_k, \theta_l)$ を得る．すなわち，

$$g'(s_k, \theta_l) = \mathrm{DFT}^{-1}[G^*_\theta(\xi_n)H(\xi_n)] \quad (3)$$

である．フィルタ関数 $H(\xi_n)$ は次式で定義される．

$$H(\xi_n) = |\xi_n| \qquad (|\xi_n| \le \xi_{\max}). \quad (4)$$

これを RL（Ram-Lak filter）フィルタ[13] という．また，RL フィルタに比べ高周波特性を抑えた 2 種類の SL（Shepp-Logan）フィルタもフィルタ関数である（付録 A.1）．ここで，投影のサンプリング数を N，単位角度を $\Delta\theta = \pi/N$ とすると，原画像 $f(x, y)$ を復元する式は式 (1) を用いて，次式となる[20]．

$$\bar{f}(x, y) \cong \sum_{l=0}^{N-1} g'(x\cos\theta_l + y\sin\theta_l, \theta_l)\Delta\theta. \quad (5)$$

ここで $g'(x\cos\theta_l + y\sin\theta_l, \theta_l)$ は，フィルタ処理された投影 $g'(s_k, \theta_l)$ から直線補間を使って求める．すなわち，s のサンプリング間隔を Δs とし，$s_t = x\cos\theta_l + y\sin\theta_l$，$t = s_t/\Delta s$，$k \le t < k+1$，$d = t-k$ として次式を得る．

$$g'(s_t, \theta_l) \cong (1-d)g'(s_k, \theta_l) + dg'(s_{k+1}, \theta_l). \quad (6)$$

さて，**図 2** (a) に正方形を含む原画像 $f(x, y)$ と，図 2 (b) にこの投影 $g(s_k, \theta_l)$ をフィルタ処理した $g'(s_k, \theta_l)$，そして図 2 (c) に $g'(s_k, \theta_l)$ の $\theta_1 = \pi/2$ における断面を示す．$g'(s_k, \theta_1)$ には部分的に急峻な勾配部分があるが，その 1 つである領域 B を拡大して図 2 (d) に示す．この領域の座標値 (s_k, θ_1) を式 (1) に代入すると，原画像 $f(x, y)$ の正方形の上辺部 b に対応していることが分かる．すなわち，フィルタ処理された投影は原画像の輪郭に対応した部分で急勾配となる．これは，式 (4) のフィルタ関数が高周波成分を強調する特性を持つためである．よって，式 (6) の直線補間は大きな誤差を発生させるので，式 (5) によって再構成される画像の輪郭部分の濃度値は正しく再現できない．このため，輪郭部分が不鮮鋭になる．

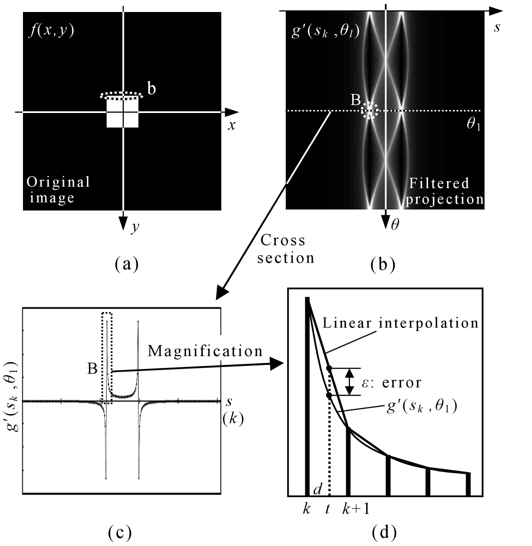


図 2 直線補間の誤差
Fig. 2 Error by linear interpolation.

2.2 3 次 B スプライン曲線補間

そこで，フィルタ処理された投影 $g'(s_k, \theta_l)$ の補間に，誤差の小さな曲線補間を適用することにする．曲線補間には，高次多項式を用いる方法と区分的多項式を用いる方法とがあるが，前者は Runge の現象によって振動が発生し，局所的に大きな補間誤差が発生するため除外する．後者はスプライン補間であるが，3 次以上のスプライン補間を用いると補間誤差が小さい[22]．ただし，スプライン関数を切断べき関数[14] で表現するとパラメータを決定する線形システムが複雑になる．そこで，局所的な台である B スプライン基底関数と制御点からなる B スプライン曲線を用いて曲線補間を行うことにする．制御点は，連立 1 次方程式を解くことにより決定できる．

さて，B スプライン曲線の制御点を $q(s_k, \theta_l)$ とおくと，式 (6) の直線補間に代わる B スプラインを用いた曲線補間式を得る．これを次式に示す．

$$g'(s_t, \theta_l) \cong \sum_{k=0}^{N+M-3} N_{k,M}(t)q(s_k, \theta_l). \quad (7)$$

ここに，N は投影のサンプリング数，$N_{k,M}(t)$ は階数 M，次数 $m = M-1$ の B スプライン基底関数である．ところで制御点の数 $N+M-2 = N+m-1$ は，投影のサンプリング数 N よりも $m-1$ だけ多

い．このため，制御点を求めるための連立 1 次方程式には，両端点の微分係数など $m-1$ 個の条件を新たに付け加えなければならない．式 (5) より再構成画像は次式で与えられる．

$$\bar{f}(x,y)=\sum_{l=0}^{N-1} g'(s_t,\theta_l)\Delta\theta. \qquad (8)$$

式 (7) の B スプライン曲線の制御点 $q(s_k,\theta_l)$ は連立 1 次方程式で解くことができるが，フィルタ処理で事前に算出しておかなければならないため，従来のフィルタ処理に比べ処理時間にオーバヘッドが生じる．これを生じさせない制御点の求め方を 3 章で述べる．また，式 (7) の計算は，式 (8) の線積分を用いて逆投影を行う際に実行する．式 (6) の直線補間と式 (7) の曲線補間の計算コストの違いが，逆投影処理に与える影響については，4 章の数値実験で検証する．

3. フーリエ変換を用いた B スプライン曲線の制御点の算出

本章では，連立 1 次方程式や内積の計算を行うことなしに，フーリエ変換を用いて B スプライン曲線の制御点を計算する方法を導入する．これを FBP 法に適用し，フィルタ処理で B スプライン曲線の制御点を算出する．そして，逆投影処理で B スプライン曲線を用いた曲線補間により画像を再構成する．フィルタ処理における制御点算出のための計算コストにはオーバヘッドが生じない．

3.1 B スプライン曲線の制御点の算出

N 個の計測点 p_k を通過するパラメータ t によるユニフォームな m 次 B スプライン曲線 $p(t)$ は，$N+m-1$ 個の制御点 q_k で定義される．制御点を求めるには，連立 1 次方程式を解かなければならない．未知数は $m-1$ 個多いので，通常は端点に微分係数などの条件を付加し，$N+m-1$ 個の条件からなる連立 1 次方程式を解いて制御点を得る．

これに対し，フーリエ変換を用いて B スプライン曲線の制御点を求める方法[15),16),23)] では，計測点 p_k の離散的フーリエ変換 $P^*(\xi)$ を求め，これにフィルタ関数 $C_m(\xi)$ を掛けて制御点 q_k の離散的フーリエ変換 $Q^*(\xi)$ を得る．すなわち，

$$Q^*(\xi)=C_m(\xi)P^*(\xi) \qquad (9)$$

である．式の導出手順を付録 A.2 に示す．ここに，$P^*(\xi)$ は p_k の離散的フーリエ変換であり，次式で求めることができる．

$$P^*(\xi)=\mathrm{DFT}[p_k]. \qquad (10)$$

表 1 にフィルタ関数 $C_m(\xi)$ を示す．

表 1 フィルタ関数 $C_m(\xi)$
Table 1 Filtering function $C_m(\xi)$.

M	m	$C_m(\xi)$
1	0	1
2	1	1
3	2	$e^{-j\pi\xi}/\cos(\pi\xi)$
4	3	$3e^{-j2\pi\xi}/\{2+\cos(2\pi\xi)\}$
5	4	$12e^{-j3\pi\xi}/\{11\cos(\pi\xi)+\cos(3\pi\xi)\}$

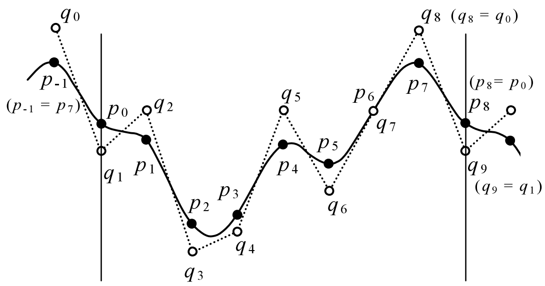


図 3 周期的な 3 次 B スプライン曲線（$N=8$）
Fig. 3 Periodic cubic B-spline curve ($N=8$).

ここでは次数を $m=3$ として，CAD や CG の分野で多く用いられている 3 次 B スプライン曲線を用いることにする[17)]．ここで，あらためて $C(\xi)=C_3(\xi)$ とおく．式 (9) より，

$$Q^*(\xi)=C(\xi)P^*(\xi) \qquad (11)$$

を得る．制御点は，式 (11) を離散的フーリエ逆変換して，次式で与えられる．

$$q_k=\mathrm{DFT}^{-1}[Q^*(\xi)]. \qquad (12)$$

この方法では，N 個の計測点 p_k から N 個の制御点 q_k を算出することができる．3 次 B スプライン曲線では端点条件を 2 個追加しなければ制御点が得られないが，この方法では離散的フーリエ変換の周期性を利用し，$p_{-1}=p_{N-1}$，$p_N=p_0$ を端点条件としている．B スプライン曲線は，**図 3** に示すような周期スプラインとなっているためである．不足する制御点は次式から求めることができる．

$$q_{k+N}=q_k \quad (k=0,1,\cdots,N-1). \qquad (13)$$

したがって，計測点 p_k を通る B スプライン曲線が周期スプラインであれば，フーリエ変換を用いて制御点を求めることができる．

3.2 FBP 法への適用

フィルタ処理された投影 $g'(s_k,\theta_l)$ を通過する 3 次 B スプライン曲線の制御点を $q(s_k,\theta_l)$ とし，これを求めよう．図 2 (c) から分かるように，一般に $g'(s_k,\theta_l)$ の θ_l における断面の両端近傍はともにゼロで等しい．なぜなら，両端近傍は通常 X 線を吸収する物質がな

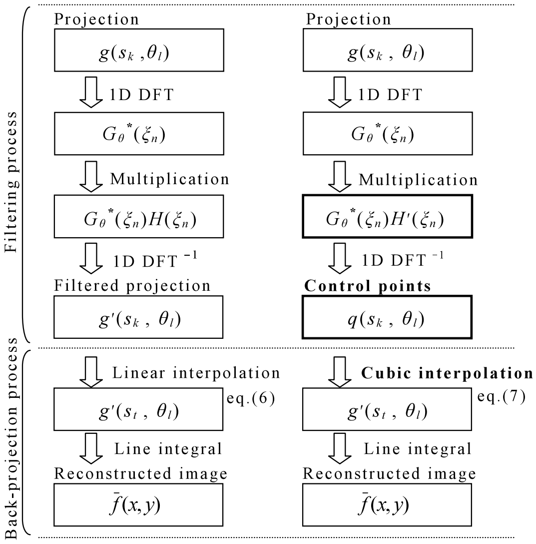


図 4 画像再構成の手順
Fig. 4 Sequence for reconstruction of images.

図 5 原画像
Fig. 5 Original image.

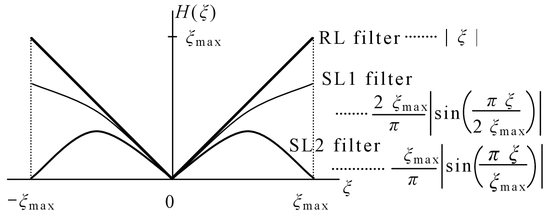


図 6 フィルタ関数の周波数特性
Fig. 6 Frequency characteristics of the filter.

いためである．このため，B スプライン曲線は周期スプラインとなり，フーリエ変換を用いて制御点の算出が可能になる．

ここで制御点の離散的フーリエ変換を $Q_\theta^*(\xi_n)$ とすると式 (11) より，次式を得る．

$$Q_\theta^*(\xi) = C(\xi)\mathrm{DFT}[g'(s_k,\theta_l)]. \quad (14)$$

上式に式 (3) を代入して，次式を得る．

$$Q_\theta^*(\xi_n) = C(\xi_n)H(\xi_n)G_\theta^*(\xi_n). \quad (15)$$

上式の $C(\xi_n)H(\xi_n)$ を新たに合成フィルタ関数 $H'(\xi_n)$ と置き換えると，次式を得る．

$$Q_\theta^*(\xi_n) = H'(\xi_n)G_\theta^*(\xi_n). \quad (16)$$

これを 1 次元離散的フーリエ逆変換すると，B スプラインの制御点 $q(s_k,\theta_l)$ が得られる．

$$q(s_k,\theta_l) = \mathrm{DFT}^{-1}[Q_\theta^*(\xi_n)]. \quad (17)$$

図 4 に，提案手法と FBP 法の画像再構成の手順を比較する．合成フィルタ関数 $H'(\xi_n)$ を，初期条件としてあらかじめ計算しておけば，両手法のフィルタ処理の計算コストは同じになる．

4. 数 値 実 験

本章では，再構成画像の輪郭の鮮鋭度と処理速度を，従来法と比較する数値実験を行う．従来法として FBP 法とコンボリューション法を用いる．まず，輪郭の鮮鋭度を調べる数値実験では，輪郭の鮮鋭度に及ぼすフィルタ関数の周波数特性と補間誤差の関係を検討するために，周波数特性の異なる 3 つのフィルタ関数を適用する．また，処理速度を調べる数値実験では，フィルタ処理と逆投影処理に要する処理時間を調べる．

4.1 輪郭の鮮鋭度

数値実験に用いる原画像は，**図 5** に示す 2 枚の数値ファントム（256 × 256 pixel）である．画像 1 は一辺が 41 pixel の正方形，画像 2 は Shepp-Logan のヘッドファントム[18] に 2 × 2 pixel の微小欠陥 A を付加してある．フィルタ関数には，RL フィルタと 2 種類の SL フィルタを用いた．各フィルタの周波数特性を**図 6** に示す．投影回数は 256 回とし，投影データに標準偏差 $\sigma = 0.1\%$，0.2%，0.4%の正規ノイズを加えた．**図 7** に，RL フィルタを画像 2 に適用した場合の FBP 法と提案手法による再構成画像と，微小欠陥 A の濃度値の再現性を示す．再構成画像は両手法ともほぼ同じに見えるが，微小欠陥の濃度値を見ると提案手法の方が正しく再現されており輪郭のボケが小さいことが分かる．

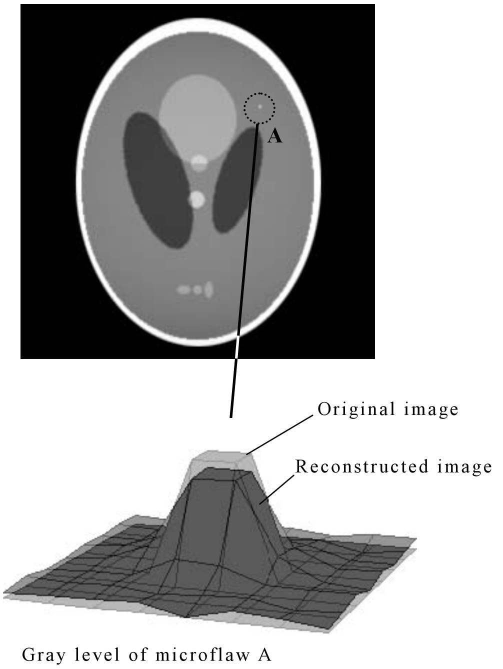
さて，輪郭の鮮鋭度を数値的に求めるため不鮮鋭度 C_u を次式で定義する．C_u が小さいと鮮鋭度・再現性が向上する．

$$C_u = 1 - |C_{NC}|. \quad (18)$$

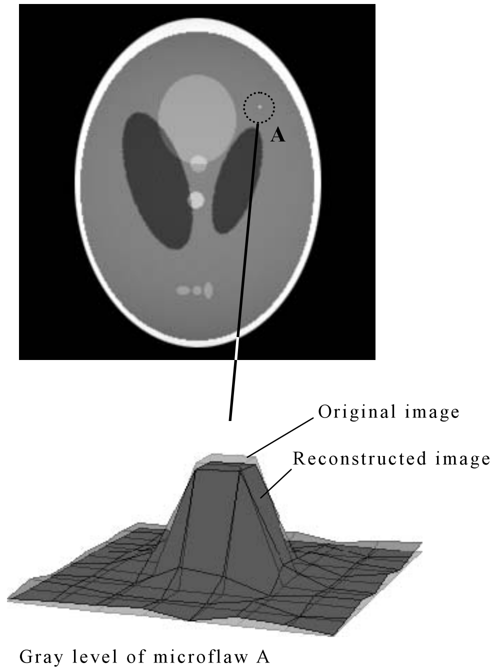
ここに C_{NC} は，原画像 f と再構成画像 $\bar{f}$ に各々 Sobel フィルタを適用して得た，輪郭画像 f' と $\bar{f}'$ との正規化相関値である．$\langle f'\rangle$，$\langle \bar{f}'\rangle$ を f'，$\bar{f}'$ の平均値として，正規化相関値 C_{NC} は次式で定義される．

$$C_{NC} = \frac{\sum(f' - \langle f'\rangle)(\bar{f}' - \langle \bar{f}'\rangle)}{\sqrt{\sum(f' - \langle f'\rangle)^2}\sqrt{\sum(\bar{f}' - \langle \bar{f}'\rangle)^2}}. \quad (19)$$

図 8 に結果を示す．画像 1，2 のいずれにおいても，提案手法の方が FBP 法に比べ輪郭の不鮮鋭度 C_u が

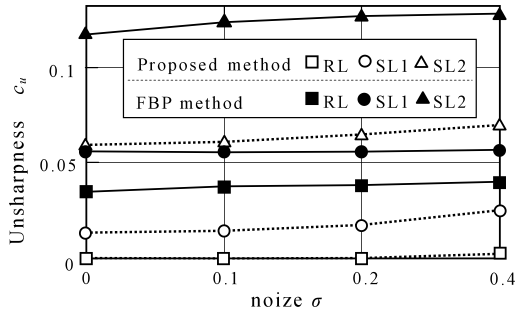


(a) FBP method.

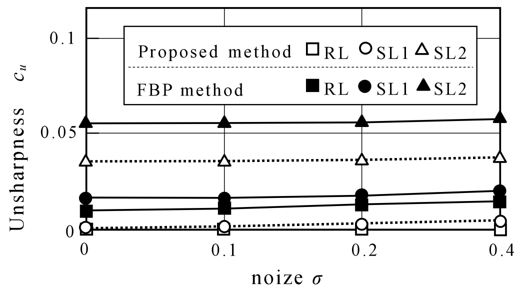


(b) Proposed method.

図 7　RL フィルタ適用時の画像 2 再構成
Fig. 7　Image 2 reconstructed using RL filter.



(a) Image 1.



(b) Image 2.

図 8　輪郭の鮮鋭度
Fig. 8　Sharpness of the edge.

小さくなった．また，RL フィルタと SL1 フィルタで，不鮮鋭度が FBP 法に比べて 1/2 以下になった．しかも，提案手法で高周波成分を抑制した SL1 フィルタを用いると，FBP 法で RL フィルタを用いた場合よりも鮮鋭度が向上した．なお，FBP 法とコンボリューション法は両者とも直線補間方式であり，鮮鋭度は等しい．

なお，ヘリカルスキャンでは，投影データの体軸方向（z 方向）の座標値がまちまちであるため，スライス中心（$z = z_0$）と等しい z 座標の投影データを得るにはヘリカル補間が必要となる．このため，2 点の投影データから直線補間を行う線形ヘリカル補間法[26]や，近傍の多点の投影データから非線形補間を行う Z フィルタ法[27] が用いられる．本研究を応用すれば提案した B スプライン曲線補間に体軸の z 方向を加えて，高精度の B スプライン曲面補間を行える可能性がある．この B スプライン曲面の制御点の離散的フーリエ変換は，投影データの離散的フーリエ変換に 2 次元のフィルタ関数をかけるだけで得られると考えられるため[15]，計算コストはとても小さくなると予想される．また，補間精度は Z フィルタ法の鮮鋭化フィルタと比べ，同等もしくはそれ以上となる可能性がある．ただし，ヘリカルスキャンはシングルスライス CT・マルチスライス CT とも扇状のビームを用いる．本研究では X 線が平行ビームである場合の投影データを扱っているので，扇状のビームを用いるファンビーム方式への提案手法の拡張が前提条件となる．

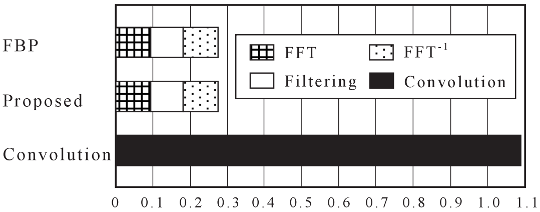


図 9 単位角度あたりのフィルタリング処理時間（ms）
Fig. 9 Time of the filtering process for unit angle $\Delta\theta$ (ms).

表 2 単位角度あたりの画像再構成時間（ms）
Table 2 Processing time required to reconstruct images for unit angle $\Delta\theta$ (ms).

Interpolation	Method	Filtering	BP	Total
Linear	FBP	0.3	17.1	17.4
	Convolution	1.1	17.1	18.2
Cubic	Proposed	0.3	19.2	19.5

4.2 処理時間

次に，手法別に単位角度 $\Delta\theta$ ごとの処理時間を調べた．使用したパソコンは，Pentium4（2.4 GHz），Windows2000，メモリ 512 MB，プログラムは Visual C/C++である．

フィルタ処理として，画像 2 に SL2 フィルタを適用した．**図 9** に示すように，提案手法の処理時間は FBP 法と同等であった．これより，制御点算出の計算時間にオーバヘッドが生じないことが確認された．また，提案手法はコンボリューション法よりも約 4 倍速い．これは，1 次元離散的フーリエ変換およびその逆変換が，コンボリューション処理よりも十分に速いためである．

逆投影処理では，**表 2** に示すように提案手法の処理時間 19.2 ms に対して，FBP 法とコンボリューション法は 17.1 ms であった．処理時間の違いは曲線補間と直線補間の違いである．しかし，提案手法ではフィルタ処理ですでに B スプライン曲線の制御点を計算したうえで曲線補間しているので，直線補間の従来法と比べて約 10%の処理時間の増加にとどまった．フィルタ処理と逆投影処理を合計しても，提案手法は従来の FBP 法に比べて約 10%処理時間が大きいだけである．

なお，最近では 512 × 512 pixel の再構成画像を 1 秒以下で処理するため，フィルタ処理に DSP，処理時間の大きい逆投影処理には高速化を図るため並列処理型の専用集積回路が用いられている[19]．フィルタ処理で用いる 1 次元離散的フーリエ変換およびその逆変換，フィルタ関数との乗算は，DSP が得意とする演算処理であるため，提案手法は実用化に適した手法であるといえる．

5. 結　　論

本論文では，B スプライン曲線を用いた曲線補間により CT 画像の輪郭を鮮鋭化する方法を示した．また，B スプライン曲線の制御点はフーリエ変換により算出され，このために計算コストが増加することはない．そして，数値実験を行い以下の結論を得た．

- 提案手法を用いると，輪郭の鮮鋭度はフィルタ関数に関係なく向上する．このため，微小欠陥を見逃しにくくなる．特に，SL1 フィルタと RL フィルタでは不鮮鋭度が 1/2 以下になる．
- ノイズに強い SL1 フィルタに提案手法を適用すると，従来法で RL フィルタを適用した場合より鮮鋭度が増加する．ノイズ低減と輪郭の鮮鋭度向上が両立できる．
- B スプライン曲線の制御点の計算時間は表面に現れない．また，全体の処理時間は，従来法と大差ない．

なお，ファンビーム方式への提案手法の拡張と，ヘリカル補間への応用が今後の課題である．

謝辞 本研究は，文部科学省の科研費（C2, No. 15560099）の補助によって行われた．ここに感謝申し上げる．

参 考 文 献

1) Kak, A.C. and Slaney, M.: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, p.327, IEEE Press, New York (1988).
2) Crawford, C.R. and King, K.F.: Computed tomography scanning with simultaneous patient translation, *Med. Phys.*, Vol.17, pp.967–982 (1990).
3) Metz, C.E. and Pan, X.: A Unified analysis of exact methods of inverting the 2-D exponential Radon transform with implications for noize control in SPECT, *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol.14, No.4, pp.643–658 (1995).
4) Hawkins, R.A.: Pancreatic tumors: Imaging with PET, *Radiology*, Vol.195, pp.320–322 (1995).
5) Rapaport, M.S., Gayer, A., et al.: A dual-mode industrial CT, *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.*, Vol.A352, pp.652–658 (1995).
6) Luthi, T., Flisch, A. and Wyss, P.: Industrial computed X-ray tomography, *INSIGHT*, Vol.40, No.3, pp.196–197 (1998).
7) McKee, C.B., O'Shea, P.G. and Madey, J.M.: Phase Space Tomography of Relativistic Elec-

tron Beams, *Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res.*, Vol.A358, pp.264–267 (1995).
8) Hino, M., Aono, T., Nakajima, M. and Yuta, S.: Light Emission Computed Tomography System for Plasma Diagnostics, *Appl. Opt.*, Vol.26, No.22, pp.4742–4746 (1987).
9) 横山哲夫：X 線 CT と MRI における情報処理，情報処理，Vol.30, No.3, pp.215–224 (1989).
10) Desai, M.D. and Jenkins, W.K.: Convolution back-projection image reconstruction for spotlight mode synthetic aperture radar, *IEEE Trans. Image Processing*, Vol.1, No.4, pp.505–517 (1992).
11) 藤田憲次郎：画像処理技術—ソフトウェアを中心として，医用電子と生体工学，Vol.22, No.5, pp.337–345 (1984).
12) 篠原広行：基礎数学講座［10］：重畳積分法による画像再構成，東京放射線，Vol.33, No.385, pp.5–20 (1986).
13) Ramachandran, G.N. and Lakshminarayanan, A.V.: Three-dimentional Reconstruction from Radio-graphs and Electron Micrographs: Application of Convolution instead of Fourier Transforms, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, Vol.68, pp.2236–2240 (1971).
14) 桜井　明，石井　好，吉村和美，高山文雄：スプライン関数入門，p.173, 東京電機大学出版局，東京 (1981).
15) 沼田宗敏，野村　俊，神谷和秀，輿水大和，田代発造：B スプライン曲面のフーリエ変換と投影定理への応用，情報処理学会研究報告，CVIM141, No.9, pp.63–70 (2003).
16) Numada, M., Nomura, T., Kamiya, K., Koshimizu, H. and Tashiro, H.: Sharpening of CT Images by Cubic Interpolation using B-spline, *Proc. 17th International Conference on Pattern Recognition* (*ICPR2004*), pp.701–704 (2004).
17) Farin, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*, 4th edition, p.429, Academic Press, New York (1997).
18) Shepp, L.A. and Logan, B.F.: The Fourier reconstruction of a head section, *IEEE Trans. Nucl. Sci.*, NS-21, pp.21–43 (1974).
19) 河野秀樹：X 線 CT 装置の最近の動向，第 53 回日本放射線技術学会総会学術大会，教育講演，No.5 (1997).
20) 篠原広行：基礎数学講座［11］：逆投影画像，東京放射線，Vol.33, No.386, pp.19–37 (1986).
21) Holbelt, S., Liebling, M. and Unser, M.: Discretization of the Radon Transform and of Its Inverse by Spline Convolutions, *IEEE Trans. Medical Imaging*, Vol.21, No.4, pp.363–376 (2002).
22) Meijering, E.H.W., Niessen, W.J. and Viergever, M.A.: Quantitative evaluation of convolution-based methods for medical image interpolation, *Med. Image Anal.*, Vol.5, No.2, pp.111–126 (2001).
23) Holbelt, S., Munoz, A., Blu, T. and Unser, M.: Spline Kernels for Continuous-Space Image Processing, *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing* (*ICASSP'00*), Vol.4, pp.2191–2194 (2000).
24) 三浦憲二郎：細分割曲線・曲面理論，精密工学会誌，Vol.69, No.4, pp.477–481 (2003).
25) Achilles, D.: New algorithms for fast convolution based on convolution preserving spline signals, *IEEE, ICASSP-79*, pp.486–489 (1979).
26) Hu, H.: Multi-Slice Helical CT: Scan and Reconstruction, *Med. Phys.*, Vol.26, No.1, pp.5–18 (1999).
27) Hu, H. and Shen, Y.: Helical CT Reconstruction with Longitudinal Filtration, *Med. Phys.*, Vol.25, No.11, pp.2130–2138 (1998).

付　　録

A.1　SL フィルタの数式について

2 種類の SL フィルタを下式に示す．式 (20) が SL1 フィルタ，式 (21) が SL2 フィルタである[12]．

$$H(\xi_n) = \frac{2\xi_{\max}}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi\xi}{2\xi_{\max}}\right)\right| \quad (|\xi_n| \le \xi_{\max}). \tag{20}$$

$$H(\xi_n) = \frac{\xi_{\max}}{\pi}\left|\sin\left(\frac{\pi\xi}{\xi_{\max}}\right)\right| \quad (|\xi_n| \le \xi_{\max}). \tag{21}$$

A.2　制御点の離散的フーリエ変換の導出手順

計測点 p_k を通過するユニフォームな M 階 m 次の B スプライン曲線 $p(t)$ は次式で表現できる．

$$p(t) = \sum_{k=0}^{N+M-3} N_{k,M}(t) q_k \quad (0 \le t \le N-1). \tag{22}$$

ここに，$N_{k,M}(t)$ は階数が M，次数が $m = M-1$ の B スプライン基底関数である．また，q_k は制御点である．

さて，m 次 B スプライン基底関数 $N_{k,M}(t)$ は，RECT（矩形）関数 $r_0(t)$ の m 回自己相関関数 $r_m(t)$ を平行移動して得られる[24]．

$$N_{k,M}(t) = r_m\left(t + \frac{M}{2} - 1 - k\right). \tag{23}$$

ここで $r_0(t)$ とその m 回自己相関関数 $r_m(t)$ とを示す．

$$r_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad |t| \le 1/2 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{24}$$

$$r_{m+1}(t) = (r_m * r_0)(t). \tag{25}$$

ここで $r_m(t)$ のフーリエ変換を $R_m(\xi)$ とすると，式 (24) より次式が成立する．

$$R_0(\xi) = \mathrm{FT}[r_0(t)] = \mathrm{sinc}(\xi). \tag{26}$$

ここに，$\mathrm{FT}[f]$ は関数 f のフーリエ変換を示すものとする．また，$\mathrm{sinc}(\xi) = \sin(\pi\xi)/\pi\xi$ である．続いて式 (25) をフーリエ変換する．空間領域における 2 つの関数のたたみこみは周波数領域における乗算と等しいため，次式を得る．

$$R_{m+1}(\xi) = \mathrm{FT}[(r_m * r_0)(t)] = R_m(\xi)R_0(\xi). \tag{27}$$

式 (26) と式 (27) より次式を得る．

$$R_m(\xi) = \mathrm{sinc}^{m+1}(\xi). \tag{28}$$

さて，式 (22) に式 (23) を代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} p(t) &= \sum_{k=0}^{N+M-3} r_m\left(t + \frac{M}{2} - 1 - k\right) q_k \\ &= \sum_{k=0}^{N+M-3} q(k) r'_m(t-k). \end{aligned} \tag{29}$$

ここに $r'_m(t) = r_m(t + M/2 - 1)$，$q(k) = q_k$ である．ここで $p(t)$ が周期 N の周期スプラインであると仮定する．これより l を任意の整数として，次式が成立する．

$$\left.\begin{aligned} &p(t + Nl) = p(t) \quad (0 \le t < N) \\ &q_{k+Nl} = q_k \quad (k = 0, 1, \cdots, N-1). \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

よって周期スプラインは式 (29) より次式のように表現できる．

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} q(k) r'_m(t-k). \tag{31}$$

これをフーリエ変換して

$$P(\xi) = Q^*(\xi) R'_m(\xi) \tag{32}$$

を得る．ここに，$P(\xi)$ は周期 B スプライン曲線 $p(t)$ のフーリエ変換，$Q^*(\xi)$ は制御点 q_k の離散的フーリエ変換，$R'_m(\xi)$ は $r'_m(t)$ のフーリエ変換である．周波数 ξ の帯域は $\pm\infty$ であるが，離散的フーリエ変換の周期性を利用して $0 \le \xi < 1$ とできる．また，式 (28) より次式を得る．

$$\begin{aligned} R'_m(\xi) &= \mathrm{FT}[r_m(t + M/2 - 1)] \\ &= R_m(\xi) e^{-j2\pi(1-M/2)\xi} \\ &= \mathrm{sinc}^{m+1}(\xi) e^{-j2\pi(1-M/2)\xi}. \end{aligned} \tag{33}$$

よって，

$$P(\xi) = Q^*(\xi)\mathrm{sinc}^{m+1}(\xi) e^{-j2\pi(1-M/2)\xi} \tag{34}$$

が成立する．また，次式が成立する[25)]．

$$P(\xi) = A_m(\xi) P^*(\xi). \tag{35}$$

$P^*(\xi)$ は計測点 p_k の離散的フーリエ変換である．また，重み関数 $A_m(\xi)$ は次式で与えられる[25)]．

$$A_m(\xi) = \frac{(d/d\xi)^m(1/\xi)}{\pi(d/d\xi)^m \cot(\pi\xi)}. \tag{36}$$

式 (34)，(35)，(36) より次式が成立する．

$$\begin{aligned} Q^*(\xi) &= A_m(\xi) P^*(\xi) \\ &\quad \cdot \mathrm{sinc}^{-m-1}(\xi) e^{+j2\pi(1-M/2)\xi} \\ &= C_m(\xi) P^*(\xi). \end{aligned} \tag{37}$$

ただし，ここでフィルタ関数 $C_m(\xi)$ は次式とする．

$$C_m(\xi) = A_m(\xi) \cdot \mathrm{sinc}^{-m-1}(\xi) e^{+j2\pi(1-M/2)\xi}. \tag{38}$$

たとえば，$m = 3\,(M = 4)$ のときフィルタ関数は次式となる．

$$\begin{aligned} C_3(\xi) &= A_3(\xi) \cdot \mathrm{sinc}^{-4}(\xi) e^{-j2\pi\xi} \\ &= \frac{3e^{-j2\pi\xi}}{2 + \cos 2\pi\xi}. \end{aligned} \tag{39}$$

(平成 16 年 9 月 29 日受付)
(平成 17 年 9 月 2 日採録)

沼田　宗敏（正会員）

1984 年富山大学理学部物理学科卒業．同年（株）ロゼフテクノロジーに入社し現在に至る．3 次元データ処理，画像処理の研究開発に従事．2003 年富山県立大学大学院工学研究科博士後期課程に入学．電子情報通信学会，精密工学会各会員．共著書に『最新コンピュータグラフィックスがわかる』（技術評論社）等．

野村　　俊

1975 年富山大学大学院工学研究科修士課程修了．工学博士（東工大）．現在，富山県立大学工学部教授．応用物理学会日本光学会，精密工学会，日本機械学会，先端加工学会，Optical Society of America，American Society for Precision Engineering 各会員．著書『インプロセス計測・制御・加工』（日刊工業新聞社，分担執筆）等．

神谷　和秀

1992 年富山大学大学院工学研究科修士課程修了．博士（工学;東大）．現在，富山県立大学工学部講師．応用物理学会日本光学会，精密工学会，日本機械学会，先端加工学会，Optical Society of America，American Society for Precision Engineering 各会員．

輿水　大和（正会員）

1975 年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了．工学博士．名古屋大学助手などを経て，現在，中京大学情報科学部教授・学部長．ビジョンの人工知能，画像パターン認識と産業応用，画像デジタル化理論，Hough 変換など画像処理アルゴリズム開発などの研究に従事．近年，似顔絵生成などの顔研究に興味を持つ．電気学会（上級会員），電子情報通信学会，画像情報メディア学会，日本顔学会（理事），計測自動制御学会等各会員．共著書に『画像処理の基本技法』（技術評論社），『実践画像処理』（Springer-Verlag 東京），『コンピュータビジョン』（丸善）等．

田代　発造

1979 年富山大学大学院工学研究科修士課程修了．工学博士（東大）．現在，富山大学工学部助教授．応用物理学会日本光学会，精密工学会，日本機械学会各会員．