異方性散乱媒質が存在するシーンの高速レンダリング手法

徳 吉 雄 介† 丸 山 稔†

本論文では関与媒質が存在するシーンにおいて効率的に大域照明レンダリングを行う手法を提案する．関与媒質を扱うレンダリングは通常レイマーチング法によって実行される．高画質の画像をレンダリングするにはレイマーチング法の微小区間を細かくとり，多くのサンプルに対して計算を行わなければならないため，通常長い計算時間が必要になる．本論文では重点的サンプリング法に基づいてサンプリングを行うことで少ないサンプル数で高い推定精度を得ることを考える．このとき，高精度の重点的サンプリングを行うには事前に被積分関数に近い形の確率密度関数を手に入れることが望ましい．本論文では一様グリッドと球面調和関数を用いて高速に放射輝度の近似値を計算し，これを用いて重点的サンプリングのための確率密度関数を決定する手法を提案する．この確率密度関数の形は被積分関数の形の近似になっているため，これを用いて重点的サンプリングを行うことで従来手法と比べると少ないサンプル数で画質を落とすことなく高速に関与媒質が存在するシーンをレンダリングすることが可能となる．

A Fast Rendering Method for a Scene with Participating Media of Anisotropic Scattering Property

Yusuke Tokuyoshi† and Minoru Maruyama†

This paper presents an efficient technique for global illumination rendering of a scene with participating media. The rendering handling participating media is performed by ray marching method, which requires sampling along each view direction. The step size of the ray marching must be taken short to generate a high quality image and thus leads to very long computational time. One possible method to improve the computational cost is to exploit importance sampling. In this paper, we propose a method to determine the step size based on the importance sampling technique. For efficient sampling, the probability density function which is "close" to the radiance distribution is required. In our method, 3D space is divided into a set of uniform grids. The radiance distribution is approximated using the grid structure. To deal with the participating media which has anisotropic scattering property, we use spherical harmonics to represent directional dependence of radiance distribution. Using this grid-based representation, fast calculation of good approximation of desirable probability density is made possible. Using this probability, high quality image can be rendered with fewer number of sampling compared to the conventional methods.

1. はじめに

霧，煙，雲や濁った水の存在により引き起こされる様々な視覚効果，たとえば雲間から差し込む光，埃っぽい部屋の灯り，霧の中を走る車のヘッドライトなどを含むシーンのレンダリングを行うためには関与媒質による光の散乱を考慮した計算が必要となる．

関与媒質が存在するシーンにおける大域照明レンダリング手法としては，ボリュームフォトンマップを用いた手法がある[2)]．この手法は，非均質かつ任意の位相関数を持った関与媒質をレンダリングすることができる．また，比較的難しいとされるボリュームコースティックスを効率良く描画することができる．ボリュームフォトンマップの可視化にはレイマーチング法[2)]が用いられ，微小区間ごとの放射輝度が計算される．

レイマーチング法を用いるのは相互作用点が物体表面の平面上だけでなく関与媒質の体積中のあらゆる点に存在するためである．レイマーチング法の計算量は区間数に比例し，物体表面のみの放射輝度を求めるのに比べ非常に多くなり，その結果多大な計算時間を必要とすることになる．

レイマーチング法は微小区間のとり方によって大きく効率が変化するため，効率の良いレンダリングのためには関与媒質の特性や放射輝度の変化に応じて区間長を変える必要がある．このために微小区間を観測さ

† 信州大学工学部情報工学科
Department of Information Engineering, Shinshu University

れた値に応じて適応的に分割する方法[2)]や，透過率に沿った重点的サンプリング（importance sampling）を行う方法[3)]が提案されている．これら適応的サンプリングと重点的サンプリングは併用することも可能である．

レイマーチング法はモンテカルロ積分をボリュームレンダリングに適した形に記述したものであるといえる．重点的サンプリングは，モンテカルロ法の分散減少のための手法である．このような分散減少手法を用いて効果的なサンプリングを行うことで，少数サンプルで積分の近似精度を上げることが期待できる．重点的サンプリングを効果的に実行するためには被積分関数にできるだけ近い形をした確率密度関数を求め，これを用いることが必要である．このためには光線上で得られる放射輝度に近い形状の分布が必要になる．確率密度関数に比較的計算が容易な透過率を用いた場合では，実際に得られる放射輝度は透過率に比例した形に近いとは限らず，追跡レイの始点よりも遠くに強い光が存在する場合などで効率が悪くなってしまう．本論文では重点的サンプリングに基づくレンダリングの高速化手法について検討を行い，透過率だけでなく実際に得られるであろう放射輝度の推定に基づいて重点的サンプリングを行うことで分散減少効果を向上させ，より少ないサンプリングで高いクオリティの画像を得ることを考える．重点的サンプリングを放射輝度に基づいて実行できれば分散減少の観点からは最適であるが，放射輝度は位置だけでなく異方性散乱の媒質の場合，方向にも大きく依存する複雑な関数である．本論文では各光線ごとにその上の放射輝度の近似を高速に求めるために，空間の一様グリッド分割と球面調和関数に基づく推定法を提案する．また，本手法を適用することにより，媒質を有するシーンのレンダリングが従来法と比べて高速に実行できることを実験によって示す．

2. ボリュームレンダリング手法

以下では，関与媒質が存在するシーンのレンダリングをボリュームフォトンマップを用いてレイマーチング法で実行するための手法の概要を文献 1) にしたがってまとめ，その問題点について述べる．

2.1 関与媒質内における光輸送

媒質内を通過する追跡レイでは発光，散乱，吸収といった現象が起こる．これらの現象によって得られる位置 x_0，方向 $\vec{\omega}$ における放射輝度 $L(x_0,\vec{\omega})$ は次の式で表される．

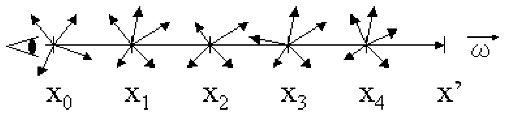

図 1 レイマーチング法
Fig. 1 Ray marching.

$$L(x_0,\vec{\omega}) = \int_{x_0}^{x'} \gamma(x_0,x)\sigma_a(x)L_e(x,\vec{\omega})dx + \int_{x_0}^{x'} \gamma(x_0,x)\sigma_s(x)L_i(x,\vec{\omega})dx + \gamma(x_0,x')L(x',\vec{\omega}) \quad (1)$$

これが関与媒質を描画するために解かなければならない方程式で，第 1 項は発光を，第 2 項は光が入射する散乱を，そして第 3 項は散乱と吸収によって光が減衰する現象を表したものである．x' は追跡レイの終点．L_e は発光された放射輝度．σ_a は吸収係数．σ_s は散乱係数．σ_t は消滅係数で吸収係数と散乱係数の和である．$\gamma(x_0,x)$ は透過率，$L_i(x,\vec{\omega})$ は散乱による入射放射輝度で，それぞれ以下の式で与えられる．

$$\gamma(x_0,x) = e^{-\int_{x_0}^{x}\sigma_t(\tau)d\tau} \quad (2)$$

$$L_i(x,\vec{\omega}) = \int_{\Omega} p(x,\vec{\omega}'\cdot\vec{\omega})L(x,\vec{\omega}')d\vec{\omega}' \quad (3)$$

ここで $p(x,\vec{\omega}'\cdot\vec{\omega})$ は位相関数である．Jansen ら[2)]はボリュームフォトンマップを用いることで内部散乱の放射輝度 $L_i(x,\vec{\omega})$ を効率的に計算する手法を提案した．ボリュームフォトンマップは関与媒質中に散乱したフォトンを記録したフォトンマップであり，通常のフォトンマップとほぼ同じ手法で放射輝度を推定することができる．

$$L_i(x,\vec{\omega}) \approx \frac{1}{\sigma_t(x)}\sum_{p=1}^{N} p(x,\vec{\omega}_p\cdot\vec{\omega})\frac{\Delta\Phi(x,\vec{\omega}_p)}{dV} \quad (4)$$

ここで，N は近傍フォトンの数，$\Delta\Phi(x,\vec{\omega}_p)$ は近傍フォトンの放射束，dV は近傍領域の体積である．

2.2 レイマーチング法を用いた描画

ボリュームレンダリング方程式は最も単純な場合を除けば，数値積分法だけが唯一の解法である．数値積分法は小さな区間ごとに単純化された仮定を設けることで計算される．この方法はレイマーチング法と呼ばれており，**図 1** に示すように追跡レイを多くの区間に分割し，各区間は媒質の特性も放射輝度も均一であると仮定して計算を行う．レイマーチング法を用いた場合のボリュームレンダリング方程式を以下に示す．

$$L(x_k,\vec{\omega}) = \Delta x \sigma_a(x_k) L_e(x_k,\vec{\omega}) + \Delta x \sigma_s(x_k) L_i(x_k,\vec{\omega}) + e^{-\Delta x \sigma_t(x_k)} L(x_{k+1},\vec{\omega}) \quad (5)$$

ここで点 x_k は追跡レイを分割した k 番目の区間の始点である．Δx は区間長で，$\Delta x = |x_{k+1} - x_k|$ で与えられる．入射放射輝度 $L_i(x,\vec{\omega})$ は区間ごとにサンプリングされ，Δx が十分に小さいとき正しくレンダリングが行われる．しかし Δx を小さくとった場合，サンプリングされる $L_i(x,\vec{\omega})$ の数が多くなるため計算時間がかかってしまう．

2.3 レイマーチング法の最適化

レイマーチング法で効率的にレンダリングを行うためには，区間幅を適応的に変えることが考えられる．このための手法の 1 つに区間の両端の関与媒質の特性もしくは放射輝度の差が大きいとき，再帰的に区間を分割していく適応的サンプリング法がある．この手法は特に放射輝度や媒質の変化が激しいシーンで効果を発揮するが，初期区間長が実際の変化よりも小さくないと機能しないという問題がある．たとえば，コースティックスのように狭い領域に強い光が照らされているモデル等では高い効率化は望めない．適応的サンプリング法はある程度の時間をかけて高精度な計算を行うには有効であるが，高速化を図るには適応的サンプリングだけでなく他の手法も併用する必要がある．

効率良くレンダリングを行うためには重点的サンプリング法を用いることが考えられる．重点的サンプリング法はモンテカルロ積分における分散低減手法で，分散低減のためには被積分関数と同じ形状の確率密度関数を用いるのが最適であることが知られている．このとき，最適な確率密度関数に近い確率密度関数に基づいてサンプリングを行うことにより，少数サンプルで高精度の積分を行うことが期待できる．本論文ではこの重点的サンプリング法を入射放射輝度 $L_i(x,\vec{\omega})$ のサンプリングに適用することを考える．レイマーチング法において，各区間で媒質の特性と発光放射輝度は均一だが入射放射輝度は不均一であると仮定し，モンテカルロ積分によって放射輝度の計算を行う．このときボリュームレンダリング方程式 (1) は次のようになる．

$$L(x_k,\vec{\omega}) = S(x_k,x_{k+1}) \sigma_a(x_k) L_e(x_k,\vec{\omega}) + \frac{\sigma_s(x_k)}{M} \sum_{j=1}^{M} \frac{e^{-t_j \sigma_t(x_k)} L_i(x_k + t_j\vec{\omega},\vec{\omega})}{P(t_j)} + e^{-\Delta x \sigma_t(x_k)} L(x_{k+1},\vec{\omega}) \quad (6)$$

ただし，$S(x_k,x_{k+1})$ は以下の式で与えられる．

$$S(x_k,x_{k+1}) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} \gamma(x_k,x)dx = \frac{1 - e^{-\Delta x \sigma_t(x_k)}}{\sigma_t(x_k)} \quad (7)$$

ここで M はサンプル数，t_j は区間上の j 番目のサンプル点，$P(t)$ は区間上の確率密度関数である．各区間ごとに M 回のサンプリングを行うため，一見通常のレイマーチング法よりもサンプル数が多く見える．しかし各区間では放射輝度が均一と仮定していないので，区間幅は大きくとることができる．つまり通常のレイマーチング法に比べ区間幅を大きくとる代わりに，区間内ではサンプル数を多くし計算精度を上げることを考える．特に関与媒質が均一な領域では区間の細分割はまったく行わなくてよい．また各区間内の放射輝度の計算には重点的サンプリング法が用いられるため，同じサンプル数を用いて通常のレイマーチング法を用いるよりも高精度な結果を得ることが期待できる．

重点的サンプリングに用いる確率密度関数には，計算が容易な透過率に沿った関数がよく利用される．均質な関与媒質において透過率に沿った確率密度関数は

$$P(t) = \frac{e^{-t\sigma_t(x_k)}}{S(x_k,x_{k+1})} \quad (8)$$

となる．この確率密度関数に従って重点的サンプリングを行った場合，ボリュームレンダリング方程式は次のようになる．

$$L(x_k,\vec{\omega}) = S(x_k,x_{k+1}) \sigma_a(x_k) L_e(x_k,\vec{\omega}) + \frac{S(x_k,x_{k+1})\sigma_s(x_k)}{M} \sum_{j=1}^{M} L_i(x_k + t_j\vec{\omega},\vec{\omega}) + e^{-\Delta x \sigma_t(x_k)} L(x_{k+1},\vec{\omega}) \quad (9)$$

ここで t_j は透過率に従った確率密度 (8) によって生成されたサンプル点で，以下の式から求められる．

$$t_j = -\frac{\log \xi_j}{\sigma_t} \quad (10)$$

ここに ξ_j は $e^{-\Delta x \sigma_t}$ から 1 までの一様乱数である．t_j は区間の始点からの距離に相当し，t_j の確率密度は式 (8) で与えられるので，この場合，追跡レイの始点付近を密にサンプリングすることになる．

重点的サンプリング法は他の最適化手法と併用が可能であることも利点の 1 つであり，重み付けされた長さの違う区間に再分割されたレイマーチング法ととると適応的サンプリング法とも組み合わせることができる．

2.4 重点的サンプリングの問題点

重点的サンプリング法を用いた場合，一様なサンプリングと比べてサンプル数が少なくても高精度な計算

を行うことが可能であり，大きな高速化が期待できる．しかしこの手法を用いるには事前に確率密度関数を定義しなければならない．重点的サンプリングを行う際の理想的な確率密度関数 $P(t)$ は，単位距離あたりの放射輝度に比例する．関与媒質が均一だと，以下の式となる．

$$P(t) \propto e^{-t\sigma_t(x_k)} L_i(x_k + t\vec{\omega}, \vec{\omega}) \tag{11}$$

実際にはこのような正確な確率密度関数を得るのは困難なため，一般的に $L_i(x, \vec{\omega})$ を定数と仮定し，式 (8)，(9) で示したような計算が比較的簡単な透過率 $e^{-t\sigma_t(x_k)}$ に沿った重点的サンプリングが行われる．しかし，この確率密度関数を用いると追跡レイの始点付近を密にサンプリングするため，始点から遠い位置に強く光が照らされる場合に分散が大きくなってしまい，高い精度を得るにはサンプル数を多くとらなければならず，効率が悪くなってしまう．

3. 放射輝度に基づくサンプリング

本論文では前章で述べたレイマーチング法の最適化手法のうち重点的サンプリング法に着目し，難しいとされる入射放射輝度を考慮した重点的サンプリングを行うことで高速化を行う．入射放射輝度はサンプリングの対象であり，正確な値は事前に知ることができない．しかし，レンダリング前に粗い近似値を計算しておき，その値をレンダリングの際に利用することは可能である．本章では入射放射輝度の効率的な近似法について述べ，それを利用した重点的サンプリング法について説明する．

3.1 一様グリッドを用いた放射輝度の近似

入射放射輝度の近似にはまず一様グリッドデータ構造を利用する．これはシーン全体を表す 3 次元空間を一様グリッド（ボクセル）によって分割し，ボクセル内の任意の点 x における $L_i(x, \vec{\omega})$ をボクセル中心点における代表値で表すことにより近似表現したものである．このデータ構造の特徴は値の取得が非常に高速なことであり，光線上の近似された入射放射輝度の関数は光線と交差するボクセルに格納された値に基づくヒストグラムの形で手に入れることができる．

3.1.1 交差ボクセルの探索

データ構造として一様グリッドを用いるのは，レイトレーシング法を用いたレンダリングアルゴリズムと非常に相性が良いためである[4)]．光線と交差するボクセルは 3DDDA（3 dimensional digital difference analyzer）を用いることで高速に探索できる（**図 2**）．全ボクセル数を n としたとき 3DDDA による全交差ボクセルの探索時間は $O(n^{\frac{1}{3}})$ であることが知られている．

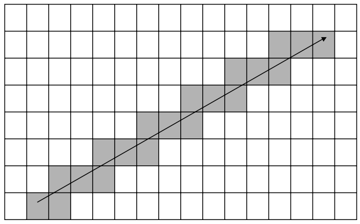

図 2 交差ボクセルの探索
Fig. 2 Grid traverse.

3.1.2 グリッドの構築

一様グリッドの構築に必要なものは，各ボクセルに格納するデータ，ボリュームのバウンディングボックス，そして軸ごとの分割数 n_x，n_y，n_z である．一様グリッドの各ボクセルには，フォトンマップから推定したボクセル中心の入射放射輝度 $L_i(x, \vec{\omega})$ を格納する．ボリュームのバウンディングボックスはフォトンマップのバウンディングボックスをそのまま使う．グリッドの分割数は多いほど正確な確率密度関数を得られるが，その分オーバヘッドが大きくなってしまう．またフォトンマップの精度以上に分割数をとっても得られる確率密度関数は変わらない．そこで確率密度関数として十分な精度とオーバヘッドにかかる時間のバランスを考えてグリッドの分割数を決定する必要がある．

本論文では文献 4) で提案されているオブジェクトを一様グリッドに格納する際の最適化分割数を決定する手法を用いた．これはデータの個数に応じてグリッドの分割数を決めるもので以下の式で与えられる．

$$s = \left(\frac{n}{w_x w_y w_z}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$n_x = w_x s, n_y = w_y s, n_z = w_z s \tag{12}$$

ここで n はデータ数，w_x，w_y，w_z はデータが存在する空間のバウンディングボックスの幅である．

一様グリッドに連続的な関数である入射放射輝度の情報を格納する場合，分割数は入射放射輝度の周波数に応じて決定することが望ましい．入射放射輝度の局所的変化の大きさがボクセルの幅よりも小さくなければ，入射放射輝度をうまく近似できないためである．このとき高周波の入射放射輝度を正確にモデル化するためには，フォトンマップに用いるフォトン数を多くする必要がある．フォトンマップを用いた入射放射輝度の推定時間は総フォトン数を N，近傍フォトンの数

を k とおくと，kd-tree を用いて k 個のフォトンを探索するため $O(k \log N)$ となる．また一様グリッドの構築時間はボクセル数 × 入射放射輝度の推定時間なので，$O(nk \log N)$ となる．これらのことを考慮し，一様グリッドをなるべく短い時間で構築でき，十分な精度を持つような n をとる必要がある．本論文では以下の式で与えられる n を用いてグリッド数を決定する．

$$n = a\frac{N}{k} \tag{13}$$

a はユーザが一様グリッドの精度をコントロールするためのパラメータであり，a の値が大きいほどグリッドは多く分割され，高い精度を持つことになるが，事前計算時間が多くなる．このとき，一様グリッドの構築時間は $O(N \log N)$ で実行できる．

3.2　方向性の考慮

3.2.1　球面調和関数

位相関数が等方的であれば $L_i(x,\vec{\omega})$ は $\vec{\omega}$ によって値が変化することはない．したがって方向性について考慮する必要はなく，一様グリッドの各ボクセルにはフォトンマップから推定した放射輝度の値を格納すればよい．しかし自然界の多くの関与媒質は異方性散乱を行う．異方性散乱の場合 $\vec{\omega}$ の値によって $L_i(x,\vec{\omega})$ は変化する．そこで方向を考慮した効率の良い近似手法が必要となる．本論文では点 x における $L_i(x,\vec{\omega})$ を球面調和関数を用いて近似する手法を用いた．

3.2.2　球面調和関数による展開

球面調和関数を用いると球面上の関数を級数展開した形で表現できる．この特性を利用して CG では主に放射輝度の近似に用いられる[7),8)]．

点 x における $L_i(x,\vec{\omega})$ は球面上の関数なので球面調和関数を用いて級数展開すると次のようになる．

$$L_i(x,\vec{\omega}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} f_{x,l,m}Y_{l,m}(\vec{\omega}) \tag{14}$$

$f_{x,l,m}$ は展開係数，$Y_{l,m}(\vec{\omega})$ は球面調和関数である．無限個の展開係数によって $L_i(x,\vec{\omega})$ を表現しているが，展開係数の小さいものは 0 として扱い有限個の展開係数で $L_i(x,\vec{\omega})$ を十分に近似することができる．l が大きいほど球面調和関数を求める計算量は多くなる．また高周波となるので一般的に展開係数が小さくなる傾向がある．そこで l を有限の数まで展開し，$L_i(x,\vec{\omega})$ を近似するのが効率的である．

$$L_i(x,\vec{\omega}) \approx \sum_{l=0}^{K}\sum_{m=-l}^{l} f_{x,l,m}Y_{l,m}(\vec{\omega}) \tag{15}$$

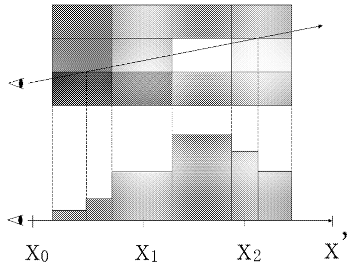

図 3　一様グリッドから得たヒストグラム
Fig. 3　Histogram acquisition.

このとき一様グリッドの各ボクセルに格納するデータはこの $f_{x,0,0}$ から $f_{x,K,K}$ までの $(K+1)^2$ 個の展開係数となる．K の数が大きいほど高周波のライティングを近似することができるが，データ量と計算量は大きくなっていく．球面調和関数の値を求めるのはボクセル探索の前に 1 回行えばよく，ボクセルごとに $L_i(x,\vec{\omega})$ を求める計算は単純な内積演算で行うことができる．このため，全体の処理時間から見るとこの $L_i(x,\vec{\omega})$ を求める処理は非常に高速であるといえる．

展開係数は以下の式で求めることができる．

$$f_{x,l,m} = \int_{\Omega} L_i(x,\vec{\omega})Y^{*}_{l,m}(\vec{\omega})d\vec{\omega} \tag{16}$$

$Y^{*}_{l,m}(\vec{\omega})$ は $Y_{l,m}(\vec{\omega})$ の複素共役な関数である．この展開係数は付録で示す計算法を用いることで効率的に計算を行うことができる．

3.3　近似された放射輝度の直接可視化

高精度の重点的サンプリングを行うために入射放射輝度を近似表現する必要があり，その近似手法をこれまで述べてきた．この近似された入射放射輝度を直接可視化し，レンダリング結果として出力することももちろん可能である．関与媒質を進行する追跡レイごとに一様グリッドを探索し，交差したボクセルごとに球面調和関数と展開係数から入射放射輝度を推定することで，追跡レイ上の近似された入射放射輝度のグラフをサンプリングする際の頻度分布（ヒストグラム）として用いる（**図 3**）．ヒストグラムの横軸が追跡レイの始点からの距離，縦軸が入射放射輝度の近似値となる．このヒストグラムに透過率 $\gamma(x_k,x)$ と散乱係数 $\sigma_s(x_k)$ を掛け合わせた関数を積分した値が追跡レイの放射輝度となる．区間内で関与媒質が均一であると仮定し，ヒストグラムの形で与えられる区間内の近似された入射放射輝度の関数を $h_{x_k,\vec{\omega}}(t)$ とすると，ボリュームレンダリング方程式は以下の式で与えられる．

$$\begin{aligned} L(x_k,\vec{\omega}) = {} & \sigma_a(x_k)S(x_k,x_{k+1})L_e(x_k,\vec{\omega}) \\ & +\sigma_s(x_k)S_h(x_k,x_{k+1}) \\ & +e^{-\Delta x\sigma_t(x_k)}L(x_{k+1},\vec{\omega}) \end{aligned} \tag{17}$$

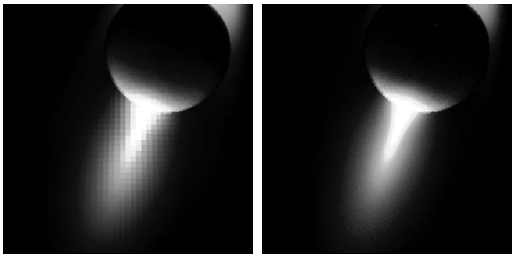

図 4 左：近似された放射輝度を直接可視化した結果．右：重点的サンプリングを用いてレンダリングを行った結果

Fig. 4 Comparison of images by direct rendering from the voxel representation (left) and through importance sampling (right).

ここで $S_h(x_k, \vec{\omega})$ はヒストグラム $h_{x_k,\vec{\omega}}(t)$ に透過率 $\gamma(x, x+t\vec{\omega}) = e^{-t\sigma_t(x)}$ を掛けて積分した値で，以下の式で与えられる．

$$S_h(x_k, x_{k+1}) = \int_0^{\Delta x} h_{x_k,\vec{\omega}}(t')e^{-t'\sigma_t(x_k)}dt' = \sum_{i=1}^{n} h_{x_k,\vec{\omega}}(t_i) S(x_k+t_i\vec{\omega}, x_k+t_{i+1}\vec{\omega}) \quad (18)$$

ここで n はヒストグラム $h_{x_k,\vec{\omega}}(t)$ の区間内の要素数．t_i はヒストグラム $h_{x_k,\vec{\omega}}(t)$ の i 番目の要素までの距離である．ヒストグラムの作成は区間にかかわらず追跡レイごとに行われ，区間ごとの計算では $h_{x,\vec{\omega}}(t) = h_{x+t\vec{\omega},\vec{\omega}}(0)$ として計算する．

しかし，この方法で高画質な画像をレンダリングするためには近似精度を上げるために一様グリッドの分割数と球面調和関数の展開係数を非常に多くとる必要がある．そのため事前計算に多くの時間を費やし，結果として全体のレンダリング時間は非常に長くなってしまう．また，データを蓄えるために必要な記憶容量も莫大なものとなる．またこの手法ではグリッド状のエイリアスが発生しやすいという問題を有している．**図 4** は分割数を多くとった一様グリッドを直接可視化した画像（左）と 3.4 節で述べる提案手法を基に重点的サンプリングを行った画像（右）である．どちらの総レンダリング時間もほぼ同じ（8 分）となるようにパラメータの調整を行った．直接可視化したものはエイリアスが発生してしまっている．

3.4 近似放射輝度を用いた重点的サンプリング

本論文では入射放射輝度をある程度粗く近似し，その近似された値を利用して重点的サンプリングを行う手法を提案する．一様グリッドと球面調和関数を用いて入射放射輝度を近似する場合，精密に計算を行おうとすると非常に多くの事前計算時間と記憶容量が必要となるが，粗い近似ならばそれらは非常に小さくて済む．またたとえ粗い近似であっても確率密度関数として利用するには効果的である．追跡レイの放射輝度を求める際，グリッドを探索することで得られる入射放射輝度のヒストグラムの作成は，データが近似表現されているためフォトンマップから入射放射輝度を推定するよりもはるかに高速に行うことができる．したがって重点的サンプリングを行うのに必要なオーバヘッドはきわめて小さくて済む．

区間内で関与媒質が均一であると仮定すると，確率密度関数は $h_{x,\vec{\omega}}(t)$ に透過率 $\gamma(x_k, x_k+t\vec{\omega}) = e^{-t\sigma_t(x_k)}$ を掛けて正規化した以下の式となる．

$$P(t) = \frac{h_{x_k,\vec{\omega}}(t)e^{-t\sigma_t(x_k)}}{S_h(x_k, x_{k+1})} \quad (19)$$

このとき重点的サンプリングを用いたボリュームレンダリング方程式は次のようになる．

$$L(x_k, \vec{\omega}) = \sigma_a(x_k)S(x_k, x_{k+1})L_e(x_k, \vec{\omega}) + \frac{\sigma_s(x_k)S_h(x_k, x_{k+1})}{M}\sum_{j=1}^{M}\frac{L_i(x_k+t_j\vec{\omega}, \vec{\omega})}{h_{x_k,\vec{\omega}}(t_j)} + e^{-\Delta x\sigma_t(x_k)}L(x_{k+1}, \vec{\omega}) \quad (20)$$

ここで，ヒストグラム $h_{x_k,\vec{\omega}}(t)$ は入射放射輝度を近似しているので，$L_i(x_k+t_j\vec{\omega}, \vec{\omega}) \approx h_{x_k,\vec{\omega}}(t_j)$ である．

一様グリッドのボクセル数を n とすると，ヒストグラムから t_j を求める計算に全要素をしらみつぶしに探すアルゴリズムを使用すると計算時間は $O(n^{\frac{1}{3}})$ となる．M 回サンプリングによるオーバヘッドは $O(Mn^{\frac{1}{3}})$ となる．ここで，$t_j < t_{j+1}$ が成り立つとき前回調べた要素は調べる必要がないので，オーバヘッドは $O(n^{\frac{1}{3}})$ にできる．展開係数の数を c とするとヒストグラムを得るのに必要な時間は $O(cn^{\frac{1}{3}})$ なので，この重点的サンプリングを行うのに必要なオーバヘッドは $O(cn^{\frac{1}{3}})$ となる．これらの計算は単純なものなので実際の計算時間は小さいものとなる．

本手法は入射放射輝度の局所的変化の大きさが一様グリッドのボクセル幅よりも小さくなければ有効ではない．これは適応的サンプリング法の初期区間幅と同じ問題であり，サンプリング法は異なるものの，粗く近似した入射放射輝度の関数を基に高精度なサンプリングを行うという意味では同じである．しかし，大きく異なるのは適応的サンプリング法が追跡レイごとに計算が独立しているのに対し，本手法は事前に計算された値を複数の追跡レイが用いるので非常に高速であるという点である．また事前計算の段階では 3.1.2 項で述べたように入射放射輝度の周波数を考慮してデータを構築するため局所的変化の大きさがボクセル幅よりも小さくなることはほとんどない．そのため高画質

の画像を短時間でレンダリングすることができる．

3.5 最適なサンプル数の決定

レンダリングした画像のほとんどの場所で画質が高くても，ある一部分で画質が低ければそれは画質が低い画像といえる．場所によって画質が異なるのは場所ごとに最適なサンプル数が選び取られていないことが原因である．ある部分ではサンプル数が多すぎるために計算に時間がかかり，またある部分ではサンプル数が少なすぎるために画質を落としてしまう．こうした問題を回避するに，画像のすべての点でできるだけ同じ画質になるようにレンダリングを行うべきである．

画像のすべての点で同じ画質にするために，重点的サンプリング法に基づいて画像に対する寄与の大きさに比例したサンプル数を用いることが考えられる．これは区間内の一様性を仮定すれば以下の式で与えられる．

$$M = bS(x_k, x_{k+1}) \tag{21}$$

ここに $S(x_k, x_{k+1})$ は式 (7) で与えられる．b はユーザが与える積分の精度をコントロールするためのパラメータである．ただし式 (21) は入射放射輝度値を考慮していないので，暗い部分と明るい部分の差が激しいシーンの場合，最適なサンプル数とはならない．このような問題も本手法を用いることによって解決できる．本手法は事前に放射輝度の近似値を求めるので，サンプル数をこの値に比例した数にする．

$$M = bS_h(x_k, x_{k+1}) \tag{22}$$

ここに $S_h(x_k, x_{k+1})$ は式 (18) で与えられる．上記の式を用いてサンプル数を決定することですべての点でほぼ同じ画質の画像をレンダリングすることが可能となる．

4. 実験結果

式 (6) に示す等間隔に区間幅をとった通常のレイマーチング法，式 (9) に示す透過率に沿った重点的サンプリング法，そして式 (20) に示す本論文の手法を用いて一定時間でレンダリングを行った画質の比較を**図 5** に示す．実験 1 は点光源，実験 2 は方向性の強い平面光源を用いて実験を行った．実験 1 で用いたオブジェクトの表面はフレネル反射・屈折する鏡面であり，外部は消滅係数 1，散乱係数 0.3 の等方性散乱媒質，内部は消滅係数 50，散乱係数は RGB ごとに (0.8,0.9,0.8) の前方散乱媒質（$k = 0.5$ の Schlick の位相関数モデル[9]）でできている．実験 2 で用いたオブジェクトの表面はフレネル反射・屈折する鏡面であり，外部は消滅係数 1，散乱係数 1 の等方性散乱媒質，内部は消滅係数 200，散乱係数 120 の前方散乱媒質（$k = 0.6$ の Schlick の位相関数モデル）でできている．両実験とも画像サイズは 640×480，フォトン数は 10 万フォトン，使用した CPU は Pentium4 2.8 GHz である．実験 1 で用いたグリッドのサイズは物体外部で $31 \times 21 \times 62$，物体内部で $17 \times 41 \times 16$ である．実験 2 で用いたグリッドのサイズは物体外部で $25 \times 17 \times 83$，物体内部で $30 \times 31 \times 24$ である．これは 3.1.2 項で述べた方法を使い，$a = 125$ として決定した値である．球面調和関数の展開係数は 16 個使用した．サンプル数は 3.5 節で述べたように，等間隔のレイマーチング法と透過率に沿った重点的サンプリング法の場合は式 (21) で，本論文の手法は式 (22) で追跡レイごとに与えるようにし，それぞれの画像が同じ時間になるように比例定数 b を調整した．図の上段が等間隔に区間幅をとった画像．中段が透過率に基づいた重点的サンプリングを行った画像．そして下段が本研究で我々が提案した手法でレンダリングを行った画像である．どの結果も適応的サンプリング法は使用していない．右側 3 つが時間ごとのレンダリング結果の拡大画像である．本手法を用いた場合のグリッドの構築に要した時間は実験 1 で 7 秒，実験 2 で 8.4 秒であった．

画像のノイズの量から，本論文の手法は少ない時間においても画質を向上させていることが分かる．また，等間隔サンプリングと透過率に基づいたサンプリングでは場所によってノイズの量が異なっているのに対し，本手法はノイズの量が画像全体でほとんど同じである．このため高画質な画像に収束するまでの時間も本手法は比較的短いといえる．

5. 結び

本論文では関与媒質の放射輝度計算において，近似解を用いて重点的サンプリングを行い，レイマーチング法における微小区間を決定する手法を提案した．この手法によってクオリティを落とすことなく高速に関与媒質が存在するシーンをレンダリングすることが可能になった．

なお，今回の実験では適応的サンプリング法を組み合わせた実験は行っていないが，本論文の手法と適応的サンプリング法とを組み合わせることでより効率的なレンダリングが行えると考えられる．

また，今回は密度を記録するデータ構造として一様グリッドを用いたが，一様グリッドには問題点がある．シーンが広い場合や，あるいは小さな領域でフォトンの密度分布が激しく変化した場合に効率が悪くなる可能性がある．このような問題は階層型のデータ構造を用いることで解決できると思われる．

図 5 時間ごとの画質の比較：(a) は等間隔の区間幅で通常のレイマーチング法を用いた結果．(b) は透過率に沿った重点的サンプリング法を用いた結果，(c) は本論文の提案する手法を用いた結果．reference image は提案手法を用いて作成したもので計算時間はそれぞれ 45 分，20 分であった

Fig. 5 Comparison of image quality.

今回の実験ではヒストグラムに補間処理を行っていない．これでも十分な精度を得ることができたと考えるが，補間処理を行うことでより精度の高い確率密度関数を定義することができる可能性がある．最終的な画像のクオリティを向上させるような効果的な確率密度関数の補完法などが今後の課題としてあげられる．

謝辞 本論文の実験においては The Stanford 3D Scanning Repository に公開されているデータを使用した[10)]．

参 考 文 献

1) Jensen, H.W.: *Realistic image synthesis using photon mapping*, A K Peters (2001).
2) Jensen, H.W. and Christen P.H.: Efficient simulation of light transport in scenes with participating media using photon maps, *Proc. SIG-*

GRAPH'98, pp.311–320 (1998).
3) Dutre, P., Bekaert, P. and Bala, K.: *Advanced global illumination*, A K Peters (2003).
4) Shirley, P.: *Realistic Ray Tracing*, pp.71–76, A K Peters (2000).
5) 金子尚武, 松本道男：特殊関数, pp.52–89, 培風館 (1984).
6) Kajiya, J.T. and Von Herzen, B.P.: Ray Tracing Volume Densities, *Proc. SIGGRAPH'84*, pp.165–174 (1984).
7) Kautz, J., Sloan, P. and Snyder J.: Fast, Arbitrary BRDF Shading for Low-Frequency Lighting Using Spherical Harmonics, *Eurographics Rendering Workshop'2002*, pp.291–296 (2002).
8) Sloan, P., Kautz, J. and Snyder, J.: Precomputed Radiance Transfer for Real-time Rendering for Dynamic, Low-Frequency Lighting Enviroments, *ACM Trans. Graphics*, Vol.21, No.3, pp.527–536 (2002).
9) Blasi, P., Saec, B.L. and Schlick, C.: A Rendering Algorithm for Discrete Volume Density Objects, *Proc. Eurographics'93*, Vol.12, No.3, pp.201–210 (1993).
10) The Stanford 3D Scanning Repository. http://graphics.stanford.edu/data/3Dscanrep/

付　　録

A.1 展開係数の導出

ある位置における展開係数は以下の式で与えられる．

$$f_{l,m} = \int_\Omega L_i(\vec{\omega}) Y^*_{l,m}(\vec{\omega}) d\vec{\omega} \tag{23}$$

式 (4) より

$$f_{l,m} = \int_\Omega \sum_{p=0}^{N} \frac{p(\vec{\omega}_p \cdot \vec{\omega}) \Delta\Phi(\vec{\omega}_p)}{\sigma_t dV} Y^*_{l,m}(\vec{\omega}) d\vec{\omega} \tag{24}$$

位相関数をルジャンドル多項式展開すると，

$$p(\vec{\omega}_p \cdot \vec{\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} w_k P_k(\vec{\omega}_p \cdot \vec{\omega}) \tag{25}$$

となる[5)]．$P_k(\vec{\omega}_p \cdot \vec{\omega})$ はルジャンドル多項式．w_k は展開係数で，以下の式で与えられる．

$$w_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} p(u) P_k(u) du \tag{26}$$

ルジャンドル多項式は球面調和関数を使って表現することができる[6)]．

$$P_k(\vec{\omega}_p \cdot \vec{\omega}) = \frac{4\pi}{2k+1} \sum_{i=-k}^{k} Y_{k,i}(\vec{\omega}) Y^*_{k,i}(\vec{\omega}_p) \tag{27}$$

したがって位相関数を球面調和関数を使って表現すると下式を得る．

$$p(\vec{\omega}_p \cdot \vec{\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} w'_k \sum_{i=-k}^{k} Y_{k,i}(\vec{\omega}) Y^*_{k,i}(\vec{\omega}_p) \tag{28}$$

ここで w'_k は以下の式で与えられる．

$$w'_k = 2\pi \int_{-1}^{1} p(u) P_k(u) du \tag{29}$$

式 (28) を式 (24) に代入して下式を得る．

$$\begin{aligned} f_{l,m} &= \int_\Omega \sum_{p=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w'_k}{\sigma_t} \sum_{i=-k}^{k} \frac{\Delta\Phi(\vec{\omega}_p)}{dV} \\ &\quad \times Y_{k,i}(\vec{\omega}) Y^*_{k,i}(\vec{\omega}_p) Y^*_{l,m}(\vec{\omega}) d\vec{\omega} \\ &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w'_k}{\sigma_t} \sum_{i=-k}^{k} \frac{\Delta\Phi(\vec{\omega}_p)}{dV} \\ &\quad \times Y^*_{k,i}(\vec{\omega}_p) \int_\Omega Y_{k,i}(\vec{\omega}) Y^*_{l,m}(\vec{\omega}) d\vec{\omega} \\ &= \sum_{p=0}^{N} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w'_k}{\sigma_t} \sum_{i=-k}^{k} \frac{\Delta\Phi(\vec{\omega}_p)}{dV} \\ &\quad \times Y^*_{k,i}(\vec{\omega}_p) \delta_{k,l} \delta_{i,m} \\ &= \frac{w'_l}{\sigma_t} \sum_{p=0}^{N} \frac{\Delta\Phi(\vec{\omega}_p)}{dV} Y^*_{l,m}(\vec{\omega}_p) \end{aligned} \tag{30}$$

(平成 16 年 11 月 8 日受付)
(平成 17 年 9 月 2 日採録)

徳吉　雄介

平成 14 年信州大学工学部情報工学科卒業．平成 16 年同大学大学院修士課程修了．同年同大学院博士課程入学．コンピュータグラフィックスの研究に従事．

丸山　　稔（正会員）

昭和 57 年東京大学工学部計数工学科卒業．同年三菱電機（株）入社，先端技術総合研究所勤務．平成 2〜3 年マサチューセッツ工科大学人工知能研究所客員研究員．平成 8 年信州大学工学部情報工学科助教授．博士（工学）．三次元物体認識，学習等の研究に従事．電子情報通信学会，IEEE 各会員．