テクニカルノート

ゲームダイナミクスの離散表現と連続表現に関する考察

谷本　潤[†]　相良博喜[††]

Replicator Dynamics はプレーヤの母集団数が十分に大きいことが仮定されている．プレーヤ個々の振舞いを粒子的に表記するなら，ゲームのダイナミクスは離散表現として得られる．一般に知られる Replicator Dynamics は戦略分布を実数で表す連続表現であるが，これは上記の離散表現ダイナミクスに $(N-1)/N \cong 1$ なる仮定を入れることで導かれる．導出した離散表現ダイナミクスを 2×2 ゲームに適用すると，利得行列で決まるゲームの帰趨は N により異なることが示され，特に，$N=2$ では spite 的なゲーム構造となることが分かる．

A Study on Both Discrete and Continuous Expressions of a Game Dynamics

Jun Tanimoto[†] and Hiroki Sagara[††]

Dealing with each player as a particulate agent, the game dynamics should be expressed in the discrete system, not the continuous system that leads to the so-called Replicator Dynamics. The shown dynamics expression in the discrete way assumes the mother-population; the number of players N, in short, as finite. Based on this discrete dynamics expression, we can obtain the Replicator Dynamics in continuous expression by assuming N as infinite. As far as 2×2 game concerned, a finite, small N assumed game has different consequence from what the Replicator Dynamics with assumption of infinite N prospects. Particularly, in the case of $N=2$, the game structure differs from usual infinite mother-population game, which rather seems to be a spite game structure.

1. 緒　　言

進化ゲームのダイナミクスは Replicator Dynamics（以下，RD）により考量されることが一般的だが，RD ではプレーヤ集団の母数 N は十分大きいこと（$N\to\infty$）が前提になっている．N が有限値の場合，RD が予想するゲームの帰結とは異なるダイナミクスとなるが，このことは数理生物学で，母集団個体数が小さい場合に適応度の高い個体が必ずしも次世代に子孫を残しうるとは限らないこと，すなわち，たまたま運悪く子供を残せない確率が高くなる現象（いわゆる，ランダムドリフト効果）として広く知られている[1]．

Taylor らおよび Nowak ら[2),3)] は，2×2 ゲームを対象に有限の N に関するゲームのダイナミクスについて考察を加えている．戦略（A 戦略）により占められている resident 集団に突然変異（mutant）でもう一方の戦略（B 戦略）が侵入し，ついには mutant が resident を駆逐するに至る確率を Moran Process でモデル化し，これとまったくでたらめな淘汰が行われた場合に同様に独占に至る確率とを比較することで，ランダムドリフト効果を定量的に評価している．この条件に加え，N 個体からなる母集団の中で個体個々の振舞い（A 戦略をとるか B 戦略をとるか）を粒子的に表記したダイナミクス（以下，離散表現のダイナミクス）を同時に考量することで，ゲームの帰結（均衡）は 8 タイプに類別されるとしている．$N\to\infty$ では，RD が予測するようにゲームの均衡は，A 戦略（強）支配（A-dominate），B 戦略（強）支配（B-dominate），A 戦略 B 戦略の併存均衡（Polymorphic），初期戦略分布により A 戦略支配か B 戦略支配かに分岐する（Bi-stable），計 4 タイプに類別される．A 戦略，B 戦略を仮に協調（C），裏切り（D）と呼ぶならば，それぞれのゲームは Trivial，Prisoner’s Dilemma（以下，PD），Chicken，Stag Hunt（以下，SH）である．こ

† 九州大学大学院総合理工学研究院
Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University
†† 九州大学大学院総合理工学府環境エネルギー工学専攻
Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

こで指摘すべきは，彼らの言うランダムドリフト効果の強弱に関する前者の条件は，実際にはゲームの均衡点そのものに変容をもたらすものではないことである．つまり，ルーレット選択で淘汰を行う同一ゲームを数多く試行する際に，たとえば，Chicken 型ならその多くのエピソードで戦略分布は C，D 併存の内部均衡点に向かうのだが，ごく稀にランダムドリフト効果により，C 支配（C 独占）か D 支配（D 独占）となるエピソードが生起する確率の大小を前者の条件は評価しているのであって，ゲームの均衡だけをいうのなら，N が有限でも $N \to \infty$ 同様，ゲームの帰結は 4 タイプということができる．後者の条件，すなわち表記上 N を含む離散表現ダイナミクスが主張する重要な点は，同じ利得構造（すなわち同じ利得行列）でも，N が有限の場合は，$N \to \infty$ とは異なるゲームの帰結となることにある．

ところで，最近，異種の 2×2 ゲームを 2 つのパラメータで 2 次元平面上に表し，ジレンマゲームの生起領域を明示的に理解するアイデアが提示されている[4)]．それに依拠すると，2×2 ゲームのジレンマの本質は，Pareto 最適からくるギャンブル性ジレンマと Pareto 最悪からくるリスク回避性ジレンマに分けて考えることができ，前者が Chicken 型の，後者が SH 型のジレンマのもとであるというものである．

本稿の試みは，上記の 2 次元平面表示された 2×2 ゲームのフィールドに N を変えながらゲームの帰結を描いてみることで，$N = 2$ と $N \geq 3$ とでそのゲームの帰結が圧倒的に異なり，前者は，いわゆる，spite ゲームになることを示そうというものである．

本論で扱うゲームは 2 人対称ゲームであり，single population，プレーヤ数は N である．

2 章では，戦略数 N_{st} のゲームについて，ダイナミクスの離散表現と連続表現を示す．3 章では上記の spite ゲームを含め，N_{st} 戦略ゲームの特殊形としての 2×2 ゲームの場合について詳しく論じる．

2. N_{st} 戦略ゲームの離散表現と連続表現

2.1 離 散 表 現

プレーヤ数 N の集団における 2 人 N_{st} 戦略ゲームを考える．利得行列を $\mathbf{M} = [m_{ij}]_{1 \leq i \leq N_{st}, 1 \leq j \leq N_{st}}$ で，戦略 i（$1 \leq i \leq N_{st}$）をとるプレーヤ数を ℓ_i（$\sum_{i=1}^{N_{st}} \ell_i = N$）で，戦略分布を x_i（$= \ell_i / N$）で表す．ただし，ℓ_i には自己を含む場合からその下限を，自己を含まない場合からその上限を設け，$1 \leq \ell_i \leq N-1$ なる制約を付しておく．これは，戦略分布は $0 < x_i < 1$ で，すなわち 0 および 1 の両端値を除外することを意味する．また，協調戦略を k で表す．ただし協調戦略の定義は他戦略を弱支配する（$m_{kk} = \mathrm{Max}[m_{ii}]_{1 \leq i \leq N_{st}}$）戦略とする．戦略 i をとるプレーヤが対戦により得る期待利得 π_i は，同戦略をとりかつ対戦候補となるプレーヤには自己が含まれないことに留意すると以下となる．

$$\pi_i = \frac{1}{N-1} \left\{ m_{ii} \left(\ell_i - 1 \right) + \sum_{j=1}^{N_{st}, j \neq i} m_{ij} \ell_j \right\} \quad (1)$$

今，ある戦略の戦略分布の変化率が，その戦略を採用するプレーヤが上げる期待利得と社会の中で平均的なプレーヤが上げる期待利得との差分に応じて増減するダイナミクスを考える．このダイナミクスに準拠するとき協調戦略の増減は以下で付与される．

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_k}{x_k} &= \pi_k - \left\{ x_k \pi_k + \sum_{j=1}^{N_{st}, j \neq k} x_j \pi_j \right\} \\ &= \sum_{j=1}^{N_{st}, j \neq k} x_j \left(\pi_k - \pi_j \right) \end{aligned} \quad (2)$$

式 (1)，式 (2) より，このダイナミクスには N が包含されている．すなわち，ゲームの帰趨は N の大小に依存する．

2.2 連 続 表 現

ここで，プレーヤ数 N は十分に大きく，$(N-1)/N \cong 1$ かつ $(\ell_j - 1)/\ell_j \cong 1$ が成り立つとすれば，$(\pi_k - \pi_j) = \sum_{i=1}^{N_{st}} \frac{\ell_i}{N} \left(m_{ki} - m_{ji} \right)$ となって，式 (2) は，

$$\frac{\dot{x}_k}{x_k} = \sum_{j=1}^{N_{st}} x_j \left\{ \sum_{i=1}^{N_{st}} x_i \left(m_{ki} - m_{ji} \right) \right\} \quad (3)$$

となる．これは，$\mathbf{x_k}$ を第 $\mathbf{k}$ 要素のみ 1，それ以外の要素がすべてが 0 のベクトルの意味で用い，$\mathbf{x} = (x_1 \cdots x_{N_{st}})$ をとすれば，

$$\frac{\dot{x}_k}{x_k} = \left[{}^{T}\mathbf{x_k} \cdot \mathbf{M} \mathbf{x} - {}^{T}\mathbf{x} \cdot \mathbf{M} \mathbf{x} \right] \quad (4)$$

となる．ただし，記号 $\mathbf{T}$ は転置を示す．これは RD にほかならない．このように，$N \to \infty$ では，個々のプレーヤの選択戦略を粒子的に表現する ℓ_i に代わって，戦略分布 x_i をそのまま用いることができる（式中に陽に ℓ_i を含まない）．いうまでもなく，式 (4) が意味するダイナミクスではプレーヤ数 N への依存性はない．本論では，前者をダイナミクスの離散表現と呼ぶのに対して，後者を連続表現ということにする．連続表現における戦略分布は，離散表現の両端制約が外れて，$0 \leq x_i \leq 1$ となる．

3. 2 × 2 ゲーム

前章の議論（N_{st} 戦略ゲーム）を 2 戦略ゲーム（2×2 ゲーム）について考える．

3.1 離散表現

戦略 $i=1$ を協調戦略（C），$i=2$ を裏切り戦略（D）とする（この仮定により議論の一般性は失われない）．また，利得行列の各要素を特に，$m_{11}=R$，$m_{12}=S$，$m_{21}=T$，$m_{22}=P$ で表すことにすると，式 (1) は，

$$\pi_C^{\ell}=\frac{1}{N-1}\left\{R\left(\ell-1\right)+S\left(N-\ell\right)\right\}$$
$$\equiv\frac{1}{N-1}f_{\ell} \quad (5)$$
$$\pi_D^{\ell}=\frac{1}{N-1}\left\{T\ell+P\left(N-\ell-1\right)\right\}$$
$$\equiv\frac{1}{N-1}g_{\ell} \quad (6)$$

となる．π_C^{ℓ}，π_D^{ℓ} は協調戦略をとるプレーヤが ℓ 人いるときの協調戦略および裏切り戦略の期待利得である．ただし，$1\le\ell\le N-1$ である．

このとき式 (2) の離散表現のダイナミクスは，

$$\frac{\dot{x}}{x}=\left(1-x\right)\left(\pi_C^{\ell}-\pi_D^{\ell}\right)$$
$$=\frac{1}{N-1}\left(1-x\right)\left(f_{\ell}-g_{\ell}\right) \quad (7)$$

と表される．ただし，協調戦略の戦略分布を x で表している．

定義より $0<x<1$ である．よって，協調率の増減 $\dot{x}$ は $\pi_C^{\ell}-\pi_D^{\ell}$ の正負，換言すると $f_{\ell}-g_{\ell}\equiv h_{\ell}$ の正負を吟味することで尽くされる．ところで，h_{ℓ} は式 (5)，(6) よりたかだか ℓ の 1 次式で表されるから，その符号は両端の $\ell=1$，$\ell=N-1$ における h_{ℓ} の正負をみればよい．

すなわち，

#1. $h_1>0\ \wedge\ h_{N-1}>0\ \Leftrightarrow\ x$ は単調増加．すなわち，C-dominate であり，Trivial である．

#2. $h_1<0\ \wedge\ h_{N-1}<0\ \Leftrightarrow\ x$ は単調減少．すなわち，D-dominate であり，PD である．

#3. $h_1>0\ \wedge\ h_{N-1}<0\ \Leftrightarrow x$ は 0 近傍で増加，1 近傍で減少．すなわち，Polymorphic であり，Chicken である．

#4. $h_1<0\ \wedge\ h_{N-1}>0\ \Leftrightarrow\ x$ は 0 近傍で減少，1 近傍で増加．すなわち，Bi-stable であり，SH である．

3.2 連続表現

$N\to\infty$ では，$(N-1)/N\cong 1$ が成り立ち，近似的に協調戦略の戦略分布は $x=\ell/N\cong\ell/(N-1)\cong(\ell-1)/(N-1)$ である．このとき，式 (5)，(6) は，

$$\pi_C=xR+\left(1-x\right)S \quad (8)$$
$$\pi_D=xT+\left(1-x\right)P \quad (9)$$

となり，式 (7) に相当する連続表現のダイナミクスは 2 × 2 の RD,

$$\frac{\dot{x}_k}{x_k}=\left[(1\quad 0)\cdot\begin{pmatrix}R & S\\ T & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 1-x\end{pmatrix}\right.$$
$$\left.-\ (x\quad 1-x)\cdot\begin{pmatrix}R & S\\ T & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ 1-x\end{pmatrix}\right]$$
$$=\left(1-x\right)\left(\pi_C-\pi_D\right) \quad (10)$$

で与えられる．

一般に RD の解析では $\dot{x}=x(1-x)(\pi_C-\pi_D)\equiv F(x)$ とおいて，$F(x)=0$ なる均衡点 $x=0$，$x=1$，$x=\frac{P-S}{P+R-S-T}$ の近傍で $\frac{\partial F}{\partial x}$ の正負を調べるが，2×2 ゲームの場合，式 (10) より $\pi_C-\pi_D$ が x の 1 次式で表されることが分かっているので，離散表現と同様にして，$\pi_C-\pi_D\equiv H(x)$ の $x=0$，$x=1$ における正負を調べれば十分である．その結果，文献 4) に倣って $P-S\equiv DL_r$（リスク回避性ジレンマ強度），$T-R\equiv DL_g$（ギャンブル性ジレンマ強度）とすれば，

#1. $H\left(0\right)>0\ \wedge\ H\left(1\right)>0\ \Leftrightarrow\ DL_r<0\ \wedge\ DL_g<0$．すなわち，C-dominate（Trivial）である．

#2. $H\left(0\right)<0\ \wedge\ H\left(1\right)<0\ \Leftrightarrow\ DL_r>0\ \wedge\ DL_g>0$．すなわち，D-dominate（PD）である．

#3. $H\left(0\right)>0\ \wedge\ H\left(1\right)<0\ \Leftrightarrow\ DL_r<0\ \wedge\ DL_g>0$．すなわち，Polymorphic であり，Chicken である．

#4. $H\left(0\right)<0\ \wedge\ H\left(1\right)>0\ \Leftrightarrow\ DL_r>0\ \wedge\ DL_g<0$．すなわち，Bi-stable であり，SH である．

3.3 有限な N を考慮したゲーム帰結の図的表示

文献 4) に倣って，様々な 2 × 2 ゲームを

$$P=x_o-0.5\cdot r_1\cdot\cos\left(45\right) \quad (11\text{–}1)$$
$$R=x_o+0.5\cdot r_1\cdot\cos\left(45\right) \quad (11\text{–}2)$$
$$S=x_o+r_2\cdot\cos\left(45+\theta_1\right) \quad (11\text{–}3)$$
$$T=x_o+r_2\cdot\sin\left(45+\theta_1\right) \quad (11\text{–}4)$$

で表す．利得の相対的大小関係には影響しないことから $x_o=0$ とし，解可能域を拡大縮小した相似形をパラメタライズして議論するために，r_2 を r_1 に対する比として新たに r として再定義する（すなわち $r_1=1$ を仮定する）と，2×2 ゲームの利得構造は r と $\theta=\theta_1$ [deg] なる 2 パラメータで表記できることになる．r と θ を変えながら利得構造上知られているジレ

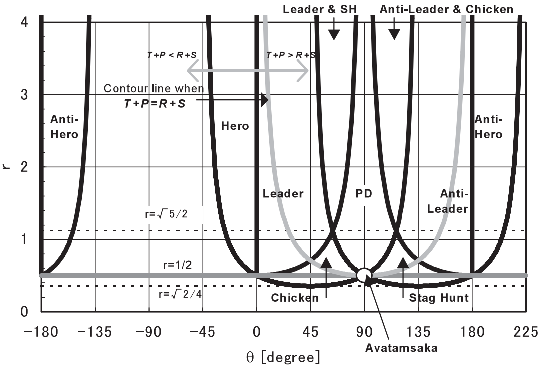

図 1　対称 2×2 ゲームにおけるジレンマ生起領域
Fig. 1　Dilemma area in case of 2×2 game expressed by the proposed schematic description.

ンマゲームを描くと，種々のジレンマゲームの発生域は**図 1** のように得られる．ここでいうジレンマゲームの発生域は，利得行列のみから決まるもので，本稿でいえば，$N \to \infty$ なる連続表記ダイナミクスにおけるゲームの帰結を示している．すなわち，C-dominate なる Trivial ゲーム，D-dominate なる PD ゲーム，Leader&SH ゲーム，Anti-Leader&Chicken ゲーム，Polymorphic なる Chicken ゲーム，Leader ゲーム，Hero ゲーム，Bi-stable なる SH ゲーム，Anti-Leader ゲーム，Anti-Hero ゲームの計 4 タイプである．

図 2 は式 (5)〜(7) および式 (11) をもとに，3.1 節で述べた有限な N を考慮したゲームの帰結を示したものである．

まず，$N = 2$ と $N \geq 3$ とで大きな差異があることに気がつく．

後者についてみると N が大きくなるに従い，C-dominate（Trivial）と D-dominate（PD）の領域が徐々に狭くなり，Polymorphic（Chicken）と Bi-stable（SH）の領域が広くなっていく．$N = 2$ と $N = 10$ の差異の方が $N = 10$ と $N = 1000$ のそれより大きいことから，N がそこそこ大きくなると，ゲームの帰結という意味での特性はほとんど $N \to \infty$ と同様になることが推量される．

$N = 2$ の場合とそれ以上との大きな差異は以下のように説明される．$N = 2$ では $1 \leq \ell \leq N - 1$ であるから，$h_1 = h_{N-1}$ となって 3.1 節で述べたゲームの帰結の 4 分類が，構造上，C-dominate と D-dominate の 2 タイプしか出現しえない．式 (7) を陽に書けば，

$$\frac{\dot{x}}{x} = (1 - x)(S - T) \tag{12}$$

である．これは，いわゆる，spite（嫌がらせ）ゲームである．このようなダイナミクスを持つゲームで

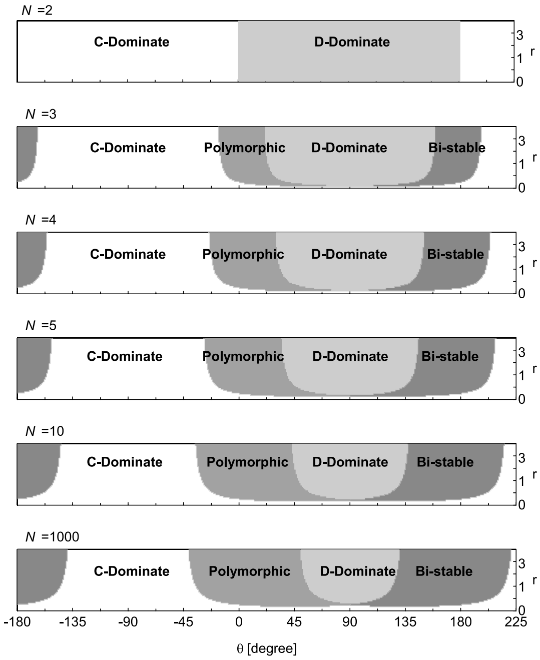

図 2　対称 2×2 ゲームにおける N によるゲームの帰趨
Fig. 2　Consequence of Dilemma area in case of 2×2 game varying with N.

留意すべき点は，ゲームがいかなる利得構造を持とうが，ゲームの帰結としては，S と T の大小だけで，C-dominate か D-domonate かが決せられることにある．$N \to \infty$ ではジレンマの生じえない r が十分に小さなゲームでさえも，このダイナミクス下では（つまり $N = 2$ では），D-dominate になる場合がある．

Ahmed らは，spite ゲームを生起するダイナミクスとして，Spiteful Replicator Dynamics を定義し，RD との特性差について論じている[5)]．しかし，如上の議論から自明なように，spite ゲームとは $N \to \infty$ なる仮定が適用しえない $N = 2$ の場合の RD を離散表現したダイナミクスにほかならない．

4. 結　　論

プレーヤ数 N の集団における 2 人対称ゲームを取り上げ，進化ゲームのダイナミクスを離散表現として与えた．$N \to \infty$ の場合は，いわゆる，Replicator Dynamics になる．特に 2×2 ゲームの場合を詳細に検討し，dominate（Trivial），D-dominate（PD），Polymorphic（Chicken），Bi-stable（SH）の 4 タイプに分けられるゲームの帰趨は，$N = 2$ と $N \geq 3$ とで大きな差異があるが，$N = 10$ を超えると $N \to \infty$ と大差がなくなる．$N = 2$ では，ゲームのダイナミクスは，相手に貪られたときの利得（**S**）と相手を貪った

ときの利得（**T**）との差異だけで決せられ，sipte ゲームの様相を呈する．

参 考 文 献

1) たとえば，巌佐 庸：数理生物学，共立出版 (2001).
2) Taylor, C., Fudenberg, D., Sasaki, A. and Nowak, M.: Evolutionary Game Dynamics in Finite Populations, *Bulletin of Mathematical Biology*, Vol.66, pp.1621–1644 (2004).
3) Nowak, M., Sasaki, A., Taylor, C. and Fudenberg, D.: Emergence of cooperation and evolutionary stability in finite population, *NATURE*, Vol.428, pp.646–650 (2004).
4) 相良博喜，谷本 潤：ジレンマゲームにおけるジレンマ性に関する考察，情報処理学会研究報告 2005-ICS-139, pp.43–48 (2005).
5) Ahmed, E. Hegazi, A. and Elgazzar, A.: On some variants of prisoner's dilemma dynamics, *Applied Mathematics and Computation*, Vol.163, pp.163–168 (2005).

(平成 17 年 6 月 1 日受付)
(平成 18 年 1 月 6 日採録)