安定結婚問題における最適選好マッチングの端点集合族の性質

平川 瑞樹[1,a)]　山内 由紀子[1,b)]　来嶋 秀治[1,c)]　山下 雅史[1,d)]

概要：本稿では，安定結婚問題における最適選好マッチングの解構造について考察する．ただし，入力として与えられる選好リストは全順序制約付きの不完全リストを仮定する．最適選好マッチングとは，任意のマッチングと比較したときに人気で負けないマッチングであり，安定マッチングの緩和概念として知られる．最適選好マッチングを構成している男女を各要素とする集合族には（唯一の）最小元が必ず存在することが知られていた．本研究では，その集合族には（唯一の）最大元も必ず存在することがわかっている．本稿では，その集合族が積や和の操作に関して閉じていないことを示す．

1. はじめに

安定結婚問題 (stable marriage problem) の入力は，男性集合と女性集合および各人の異性に対する選好リストからなり，各人は選好リスト上位の人とペアになる状況を好む．安定結婚問題の解には安定マッチング (Stable Matching; SM) がよく用いられるが，本稿のような入力の仮定 (2.1 節を参照) においては，SM の解のサイズが小さくなることがある．本稿で扱う最適選好マッチング (Popular Maching; PM) [2] は SM の緩和概念として知られており，全ての PM のサイズは任意の SM のサイズに等しいかそれより大きくなる性質がある [1], [4]．しかし，その他の PM の解構造はあまり知られていなかった．本稿では，PM の解構造，特に，各 PM を構成する端点集合を要素とする集合族に着目する．この集合族には（唯一の）最小元が必ず存在することがわかっており [1], [4]，また本研究において（唯一の）最大元も必ず存在することがわかっている．しかし本稿では，この集合族は積や和の操作に関して一般に閉じていないことを示す．

2. 定義

2.1 安定結婚問題

安定結婚問題の入力を，無向二部グラフ $G = (\mathcal{A} \cup \mathcal{B}, E)$ と各人の選好リストによって表現する．$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ はそれぞれ男性集合と女性集合とし，$a \in \mathcal{A}$ が $b \in \mathcal{B}$ を選好リストにもつとき，かつそのときに限り，b も a を選好リストにもつと仮定し，$(a, b) \in E$ とする．本稿では $|\mathcal{A}| \neq |\mathcal{B}|$ を許し，選好リストは全順序制約を満たす不完全リストを仮定する．

2.2 安定マッチング

各枝 $(a, b) \in E$ を**ペア**とよび，どの頂点も一つより多くのペアに属さない集合 $M \subseteq E$ を**マッチング**という．マッチング M における頂点 $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ のペアの相手を $M(u)$ と表す．ある M において，$a' \in \mathcal{A}$ のペア $M(a')$ が存在しないか a' は $M(a')$ よりも b' を好むとき，かつ，$b' \in \mathcal{B}$ のペア $M(b')$ が存在しないか b' は $M(b')$ よりも a' を好むとき，ペア $(a', b') \in E \setminus M$ を M の**ブロッキングペア**という．マッチング M にブロッキングペアが存在しないとき，M を**安定マッチング** (Stable Matching; SM) という．本稿の入力の仮定において，SM は必ず存在する．

2.3 最適選好マッチング

2 つのマッチング M, M' において，頂点 u が M' での状況よりも M での状況を好むとき (u が M' ではペアに属していないが M ではペアに属しているとき，または，いずれのマッチングでもペアに属しているが $M'(u)$ よりも $M(u)$ の方を好むとき)，「u は M' よりも M を好む」と表現する．M' よりも M を好む頂点数がその逆よりも多いとき，「M は M' よりも人気である」と表現する．マッチング M よりも人気のあるマッチング M' が存在しないとき，M を**最適選好マッチング** (Popular Maching; PM) という．任意の SM は，PM の定義も同時に満たすことがわかっている [2]．2.2 節の通り，本稿の入力の仮定において

1 九州大学
Kyushu Uniersity
a) mizuki.hirakawa@inf.kyushu-u.ac.jp
b) yamauchi@inf.kyushu-u.ac.jp
c) kijima@inf.kyushu-u.ac.jp
d) mak@inf.kyushu-u.ac.jp

SM は必ず存在するので，PM も必ず存在する．また，次の 3 節で示すが，PM の必要十分条件とその判定を線形時間で行う方法が [4] で提案されている．

3. PM の必要十分条件

定義 1 ([4]) 頂点 $u \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ とその選好リストに含まれる頂点 x, y に対して，関数 $\mathrm{vote}_u(x,y)$ を

$$\mathrm{vote}_u(x,y) = \begin{cases} 1 & (u \text{ は } y \text{ よりも } x \text{ を好む}), \\ -1 & (u \text{ は } x \text{ よりも } y \text{ を好む}), \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

と定める．

グラフ G における任意のマッチングを M とするとき，各枝 $e = (u,v) \in E \setminus M$ に対して，$\alpha_e = \mathrm{vote}_u(v, M(u))$ と $\beta_e = \mathrm{vote}_v(u, M(v))$ からなるラベル (α_e, β_e) を付ける．また，ラベルが $(-1,-1)$ である枝を G から全て削除した部分グラフを G_M とする．このとき，次の定理 1 が成り立つ．

定理 1 ([4]) G_M が以下の条件 (i)-(iii) を全て満たすとき，かつそのときに限り，M は PM である．

(i) ラベルが $(1,1)$ である枝を含むような M の交互サイクルが存在しない．

(ii) M に属さない枝で始まり，ラベルが $(1,1)$ である枝を含むような M の交互パスが存在しない．

(iii) ラベルが $(1,1)$ である枝を 2 つ以上含むような M の交互パスが存在しない．

条件 (i)-(iii) が成り立つかを線形時間で判定する手法が [4] で提案されている．

4. PM の端点集合族の一意性

マッチング M を構成する各枝の両端点全てからなる集合を $V(M)$ と表記する．また，与えられた入力に存在する全ての PM からなる集合を $\mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ と表記する．このとき，Huang と Kavitha [4] は次の定理 2 を示している．

定理 2 ([4]) 任意の SM $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ と任意の PM $M' \in \mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ に対して，$V(M) \subseteq V(M')$ が成り立つ．

定理 2 は，任意の SM はサイズ最小の PM であり，サイズ最小の PM の端点集合は一意であることを意味している．

それに対して，本研究では次の定理 3 を示している．

定理 3 ([3]) サイズ最大の任意の PM $M \in \mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ と任意の PM $M' \in \mathcal{M}_{\mathrm{P}}$ に対して，$V(M') \subseteq V(M)$ が成り立つ．

定理 3 は，サイズ最大の PM の端点集合は一意であることを意味している．

ここで，**PM の端点集合族**を $\mathcal{V} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{V(M) \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \mid M \in \mathcal{M}_{\mathrm{P}}\}$ と定義する．このとき，定理 2，3 より次の定理 4 が成り立つ．

定理 4 ([3]) 安定結婚問題の任意の入力における PM の端点集合族 $\mathcal{V}$ には，包含関係 $\subseteq$ に関する（唯一の）最小元と最大元が必ず存在する．

5. 積や和の操作が成り立たない例

PM の端点集合族 $\mathcal{V}$ は，包含関係に関する半順序集合 $(\mathcal{V}, \subseteq)$ とみなせる．定理 4 より，この半順序集合には唯一の最小元と最大元が存在する．しかし，$\mathcal{V}$ は積 $\cap$ や和 $\cup$ の操作に関して一般には閉じていない．

はじめに，$\cap$ に関して閉じていない例を次の (1) に示す．

$$\begin{array}{lllll} a_1 & : & b_1 & & \\ a_2 & : & b_1 & b_2 & \\ a_3 & : & b_1 & b_5 & b_3 \\ a_4 & : & b_4 & b_3 & \\ a_5 & : & b_5 & b_4 & \\ a_6 & : & b_6 & & \\ a_7 & : & b_6 & b_7 & b_4 \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} b_1 & : & a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & : & a_2 & & \\ b_3 & : & a_4 & a_3 & \\ b_4 & : & a_7 & a_4 & a_5 \\ b_5 & : & a_3 & a_5 & \\ b_6 & : & a_7 & a_6 & \\ b_7 & : & a_7 & & \end{array} \tag{1}$$

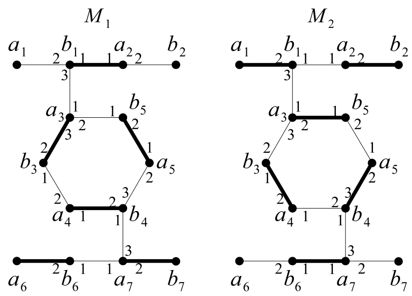

図 1 (1) に存在する PM M_1 と M_2

ここで，$M_1 = \{(a_2,b_1),(a_3,b_3),(a_4,b_4),(a_5,b_5),(a_6,b_6),(a_7,b_7)\}$，$M_2 = \{(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_5),(a_4,b_3),(a_5,b_4),(a_7,b_6)\}$ とすると（図 1 を参照），M_1, M_2 はいずれも PM であることが定理 1 によって確認できる．

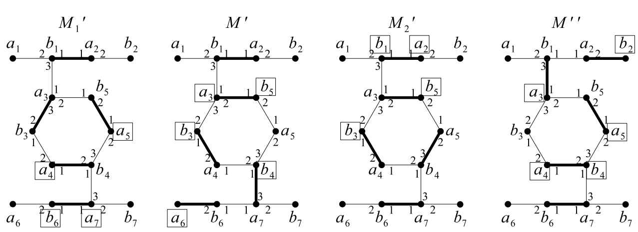

図 2 (1) における M'_1 や M'_2 は PM ではない．

このとき，端点集合 $V(M_1) \cap V(M_2) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \setminus \{a_1, a_6, b_2, b_7\}$ によって構成されるマッチングは，$M'_1 = \{(a_2,b_1),(a_3,b_3),(a_4,b_4),(a_5,b_5),(a_7,b_6)\}$，$M'_2 = \{(a_2,b_1),(a_3,b_5),(a_4,b_3),(a_5,b_4),(a_7,b_6)\}$ の 2 種類（図 2 を参照）しかないことが簡単に確認できる．しかし，$M' = \{(a_2,b_1),(a_3,b_5),(a_4,b_3),(a_6,b_6),(a_7,b_4)\}$ は M'_1 よりも人気なマッチングであり，$M'' = \{(a_2,b_2),(a_3,b_1),(a_4,b_4),(a_5,b_5),(a_7,b_6)\}$ は M'_2 よりも人

気なマッチングである（図 2 を参照）．よって，M_1', M_2' はいずれも PM ではない，すなわち，$V(M_1) \cap V(M_2) \notin \mathcal{V}$ となる．

次に，$\cup$ に関して閉じていない例を次の (2) に示す．

$$\begin{array}{lllll} a_1 & : & b_1 & & \\ a_2 & : & b_1 & b_2 & \\ a_3 & : & b_5 & b_1 & b_3 \\ a_4 & : & b_3 & b_4 & \\ a_5 & : & b_4 & b_5 & b_8 \\ a_6 & : & b_6 & & \\ a_7 & : & b_6 & b_4 & b_7 \\ a_8 & : & b_3 & & \end{array} \qquad \begin{array}{lllll} b_1 & : & a_2 & a_3 & a_1 \\ b_2 & : & a_2 & & \\ b_3 & : & a_3 & a_4 & a_8 \\ b_4 & : & a_4 & a_7 & a_5 \\ b_5 & : & a_5 & a_3 & \\ b_6 & : & a_7 & a_6 & \\ b_7 & : & a_7 & & \\ b_8 & : & a_5 & & \end{array} \qquad (2)$$

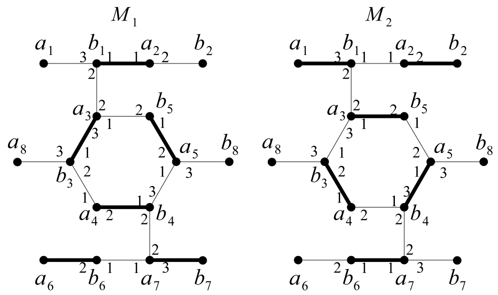

図 3　(2) に存在する PM M_1 と M_2

ここで, $M_1 = \{(a_2, b_1), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6), (a_7, b_7)\}$, $M_2 = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_5), (a_4, b_3), (a_5, b_4), (a_7, b_6)\}$ とすると（図 3 を参照），M_1, M_2 はいずれも PM であることが定理 1 によって確認できる．

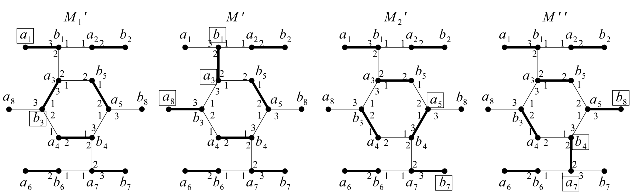

図 4　(2) における M_1' や M_2' は PM ではない．

このとき，端点集合 $V(M_1) \cup V(M_2) = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \setminus \{a_8, b_8\}$ からなるマッチングは，$M_1' = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6), (a_7, b_7)\}$, $M_2' = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_5), (a_4, b_3), (a_5, b_4), (a_6, b_6), (a_7, b_7)\}$ の 2 種類（図 4 を参照）しかないことが簡単に確認できる．しかし，$M' = \{(a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_4, b_4), (a_5, b_5), (a_6, b_6), (a_7, b_7), (a_8, b_3)\}$ は M_1' よりも人気なマッチングであり，$M'' = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_5), (a_4, b_3), (a_5, b_8), (a_6, b_6), (a_7, b_4)\}$ は M_2' よりも人気なマッチングである．よって，M_1', M_2' はいずれも PM ではない，すなわち，$V(M_1) \cup V(M_2) \notin \mathcal{V}$ となる．

6. 考察

(1)，(2) より，PM の端点集合族 $\mathcal{V}$ は積 $\cap$ や和 $\cup$ の操作に関して閉じていない，すなわち，半順序集合 $(\mathcal{V}, \subseteq)$ は $\cap$ や $\cup$ の操作に関して一般に束を形成しない．しかし，(1) には PM $M_\wedge = \{(a_2, b_1), (a_3, b_5), (a_4, b_4), (a_7, b_6)\}$ が存在し（図 5 の左を参照），端点集合 $V(M_\wedge) \in \mathcal{V}$ は $V(M_1), V(M_2) \in \mathcal{V}$ に対する包含関係 $\subseteq$ の下での下限であることを確認している．同様に, (2) には PM $M_\vee = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_5), (a_4, b_4), (a_5, b_8), (a_6, b_6), (a_7, b_7), (a_8, b_3)\}$ が存在し（図 5 右を参照），端点集合 $V(M_\vee) \in \mathcal{V}$ は $V(M_1), V(M_2) \in \mathcal{V}$ に対する包含関係 $\subseteq$ の下での上限であることを確認している．つまり，(1) や (2) は，半順序集合 $(\mathcal{V}, \subseteq)$ が束を成すことの反例にはなっていない．

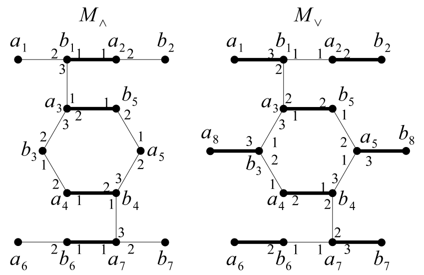

図 5　(1) に存在する PM $M_\wedge$（左）と (2) に存在する PM $M_\vee$（右）

また，(1)，(2) のそれぞれにおいて，2 つの異なる PM M_1, M_2 の排他的論理和の中には $\langle a_3, b_3, a_4, b_4, a_5, b_5 \rangle$ という交互サイクルがそれぞれ存在している．2 つの異なる PM の排他的論理和の中に交互サイクルが存在しないときには，次の定理 5 が成り立つことがわかっている．

定理 5　互いの排他的論理和に交互サイクルが存在しない任意の異なる PM M_1, M_2 に対して, $V(M_1) \cap V(M_2) \in \mathcal{V}$ が成り立つ．

定理 5 の証明は省略する．定理 5 と同様に，$V(M_1) \cup V(M_2) \in \mathcal{V}$ が成り立つかはわかっていない．

7. おわりに

$\mathcal{V}$ が $\cap$ や $\cup$ の操作に関して一般に閉じていないことを示した．$(\mathcal{V}, \subseteq)$ が束を成すかは未解決である．

参考文献

[1] D. Gale, M. Sotomayor: Some remarks on the stable matching problem, Discrete Appl. Math., **11** (1985), 223–232.

[2] P. Gärdenfors: Match making: assignments based on bilateral preferences, Behavioural Sciences, 20 (1975), 166–173.

[3] 平川瑞樹，山内由紀子，来嶋秀治，山下雅史 : 情報処理学会研究報告，AL, アルゴリズム研究会報告 2013-AL-144(19), 1–4.

[4] C.C. Huang, T. Kavitha: Popular matching in the stable marriage problem, Inf. Comput., 222 (2013), 180–194.