

# 測地レベルセット法を用いた高精度な3次元メッシュ構造の導出

筑波大学大学院システム情報工学研究科コンピュータサイエンス専攻  
 岡本 憲卓, 蔡 東生

平成 26 年度 6 月 28 日

## 1. はじめに

近年のスーパーコンピュータや並列処理機の大幅な発展に伴い、流体の物理シミュレーションのような大規模な数値シミュレーションが可能となった。しかしながら、人間がシミュレーションの結果得られた膨大な数値データのみからその正確な挙動を把握するのは困難であり、得られた数値データを可視化することが直感的に結果を把握するのに有用であると考えられる。

流体シミュレーションの可視化において、特異点とそれに関わる多様体をどれだけ高精度に導出出来るかがそのシミュレーション精度に大きく影響することが知られている。

本研究ではこれらの研究を受け、ベクトルデータセットからの多様体の導出方法に着目し、常微分方程式によって定義されるベクトル場における多様体をより高精度に導出するアルゴリズムを提案・考察する。

## 2. 背景理論

### 2.1 ベクトル場とは

ベクトル場とは「ある一点  $p$  を選んだ時、それに対応するベクトルがただ一つ決まる」様な空間を指す。

$$\vec{v}: I \times D \rightarrow R^n \quad I \subseteq R, D \subseteq R^n \quad (1)$$

また、ベクトル場は常微分方程式として表現出来る。

$$\dot{x} = \vec{v}(t, x) \quad (2)$$

$$x(t_0) = x_0 \quad (3)$$

以下に 2 次元の場合と 3 次元の場合のそれぞれについてベクトル場を図示した例を示す。

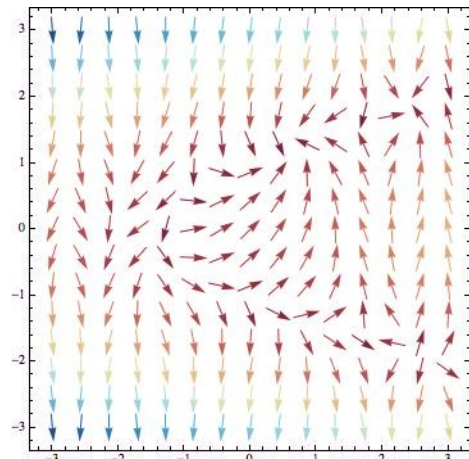


図 1: 二次元ベクトル場

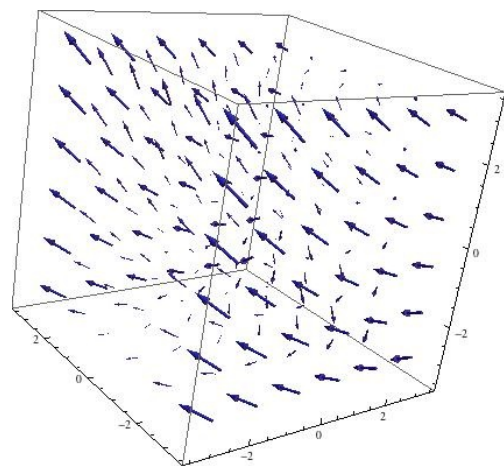


図 2: 三次元ベクトル場

### 2.2 流線とは

与えられた任意の初期条件  $x_0, t_0$  に対して求められる解は積分曲線、または軌道、軌跡、流線等と呼ぶ。ベクトル場の流線を可視化することで直感的にシミュレーションの結果を把握、考察する事が出来る。初期状態に従って、単位時間分だけ流線を描き、辿りついた先の座標が持つベクトルに従ってまた単位時間分だけ流線を描き…という作業を繰り返す事で流体における粒子の動きを描画する事が出来る。これは常微分方

程式の近似解である。

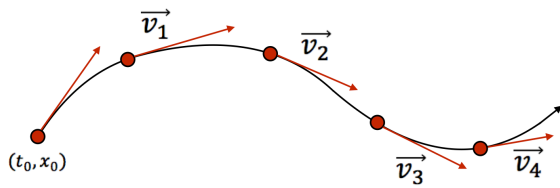


図3：流線の模式図

本研究では近似解の導出に関して、4次のルンゲクッタ法を用いた。

### 2.3 単位時間の設定について

近似解として流線を描く際、そのベクトル場に適した単位時間を設定する必要がある。不適切な単位時間で近似解を求めた場合、図4のように正しく流線を近似できていない危険性が考えられる。(実際の流線が実線の様であっても、単位時間を長く取ってしまうと破線のような流線として導出されてしまう)

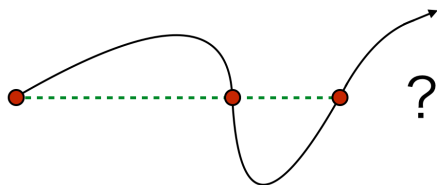


図4：正しく流線が描けない例

### 2.4 流線面とは

流線の群によって張られる曲面を流線面と呼ぶ。

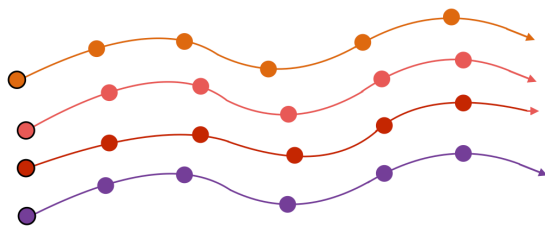


図5：流線の群

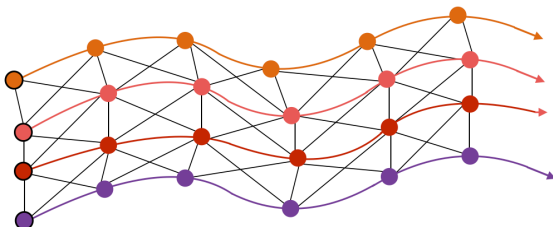


図6：面として捉えた流線群

図6からわかる様に流線面は流体を構成する各粒子の流れによって構成されているため、流線面上のどの点から粒子を流した

としても、粒子は流線面上を外れる事なく流れる事がわかっている。

### 2.5 特異点とは

ベクトル場における特異点とは、速度成分

$$v(u, v, w) = (0, 0, 0) \quad (4)$$

となる点である。[2]例えば、図7の左図の様な形の山に雨が降ったとすると、高い位置からp点に向かって流れた雨は、p点でぶつかり左右に流れ落ちていく。この時、p点部分では速度成分が瞬間的に0となっており、p点はベクトル場での特異点とみなすことができる。また、特異点に到達する前と後では流れが大きく変化している。図7の右図は左図を真上から見て流線の動きだけを二次元平面上に落とし込んだものである。

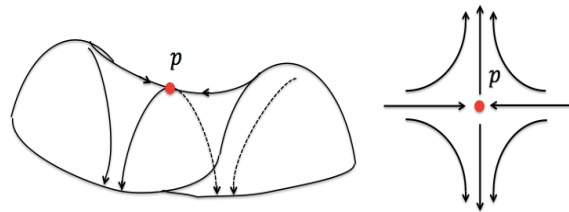


図7：特異点の例

図7からもわかるように、特異点では流線同士が交差する。また、特異点の種類によって、その特異点周辺での流れのおおよそのパターンが決まる事がわかっている。

### 2.6 安定多様体と不安定多様体

安定多様体とは3次元ベクトル場 $R^3$ においてある固定点に収束する点全体の集合を指す。元の微分関数 $\dot{x} = f(x)$ の流動を表す関数を $\phi^t(x)$ と表すとすると、特異点 $x_0$ における安定多様体 $W^s(x_0)$ 、不安定多様体 $W^u(x_0)$ は、

$$W^s(x_0) = \left\{ x \in R^3 \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \phi^t(x) = x_0 \right\} \quad (5)$$

$$W^u(x_0) = \left\{ x \in R^3 \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi^t(x) = x_0 \right\} \quad (6)$$

で表される。[3][4]

例として先述した図7の右図に関して言えば、左右から特異点に向かって流れている流線が安定多様体、特異点から離れる様に上下に流れている流線が不安定多様体である。

### 2.7 ヤコビアンによる流れの分類

ベクトル場において、特異点近傍のヤコビアン固有値が、特異点周辺での流れのパターンを決定する事がわかっている。それはベクトル場における以下の定理によるものである。

**定理:**特異点近傍の固有値の縮退がなく、かつハイパボリックの時、その近傍での解の暫定的な振る舞いは、線形化により一意に決定される。

ここで、線形化によって原点近傍のヤコビアンを求める手順を述べる。[1][2][3][4]

速度ベクトル場を

$$v = \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix} \quad (7)$$

で表現し、これを特異点 $(x_0, y_0, z_0)$ 近傍でテラー展開する。すると式(7)は

$$v = \frac{dX}{dt} = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} + O(2) \quad (8)$$

と表せる。特異点の定義から

$$v = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0, z_0) \\ v(x_0, y_0, z_0) \\ w(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

であり、また、特異点(=速度 0)近傍の2次以上の項は非常に小さな値になると考えて良い。よって

$$O(2) \approx 0 \quad (10)$$

とみなすことが出来る。以上より(8)式は

$$\approx \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

と近似できる。このとき

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (12)$$

をヤコビアン行列と呼び、ヤコビアンがどのような固有値を持つかを調べる事でその特異点近傍での流れのパターンを知る事が出来る。

以下に、ヤコビアンの固有値の組み合わせと、その組み合わせに対応した特異点付近での流れのパターンの模式図を示す。

流れのパターン	固有値の実部の符号			虚部	分類番号
Spiral saddle(鞍点)	正	負	負	有り	1
	負	正	正	有り	2
Saddle point(鞍点)	負	正	正	無し	3
	正	負	負	無し	4
Repelling node(不安定結節点)	正	正	正	無し	5
Attracting node(安定結節点)	負	負	負	無し	6
Attracting focus(安定渦状点)	負	負	負	有り	7
Repelling focus(不安定渦状点)	正	正	正	有り	8

図 8:対応表

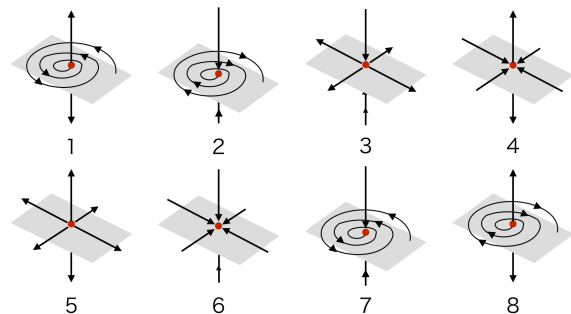


図 9:流れのパターン

## 2.8 特性曲面とは

先述したように、三次元の場合、ヤコビアンの固有値の値は3種類存在する。固有値の実部が同符号であるような固有ベクトル同士で構成される特異点を含む流線面を特性曲面と呼ぶ。

## 2.9 特異点とベクトル場

ベクトル場において、ある特異点からの流出が、別の特異点に流入していくような現象をサドルコネクション(特異点結合)と呼ぶ。特異点同士の結合を正しく知る事で、そのベクトル場のおおよその外形を知る事が出来る。多様体以外の流線は多様体によって構成された枠に従って流れる事がわか

っているので、多様体をいかに高精度に導出するかがシミュレーション全体の精度を決める鍵になるのである。

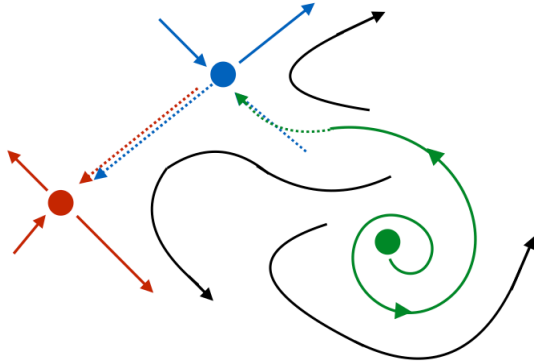


図 10:二次元の特異点の結合

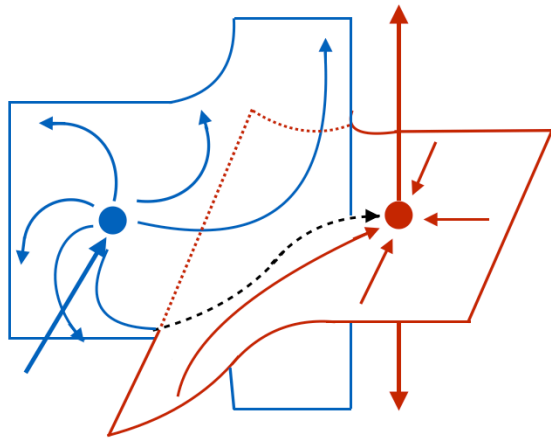


図 11:三次元の特異点の結合

### 2.10 流線間隔の平均化

先述した様に、流線面は複数の流線を面として捉える事で表現している。可視化する際は、流線を導出した後、各流線間にポリゴンを張る形になる。しかし、流線が描かれない部分では実際の流れがどのような振る舞いをしているかがわからないため、流線間の幅は均等になるようにする必要がある。例えば図 12 のように開領域が出来る場合には最終的に流線間が大きく開いてしまう。

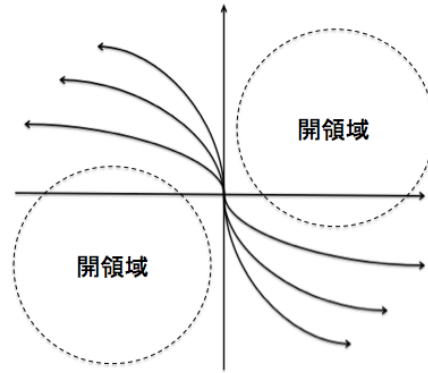


図 12:流線間に開領域が生じた例

これを防ぐために、流線間隔の平均化が重要になる。

### 2.11 平均化における問題点

先行研究では平均化の問題に対して初期点を追加することで解決しようと試みていた。初めは特異点近傍に平均的に初期点を配置し、流線を流してみる。その結果各流線間の角度が大きくなり開いてしまうような初期点の間により多くの初期点を配置するようにし、平均化を行う、というものである。

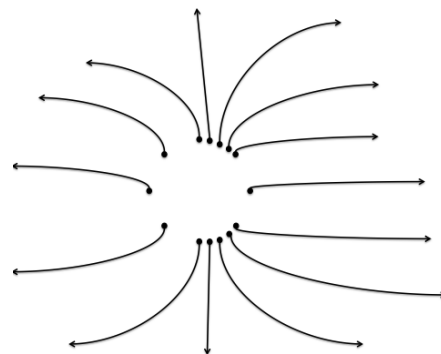


図 13:開領域が出来た場合初期点を追加

しかしこの方法では特異点近傍の流線の開きは防げても、連続で数値積分を繰り返した結果流線の末端部に開きが見られた場合に対応できない。よって本研究ではこの部分に焦点を当て、より精度が高いとされる流線面描画アルゴリズムの実装を考える。

## 3.Geodesic Level Set Method

### 3.1 新規円の決定

#### 3.1.1 葉層構造の定義

このアルゴリズムは安定多様体上に定義した離散円を特異点近傍から一定の距離ずつ同心円上に成長させていくことで流線面を可視化する。[5]ここで、確定された離散円の中で最も新しい円を構成する点の集合

を  $C_r$ 、 $C_r$  の隣り合った点を繋ぎあわせてできる擬似円を  $\widehat{C}_r$ 、現在見ている基準点を  $r$  ( $r \in C_r$ ) とする。更に、新規円として定義する離散円を構成する点の集合を  $C_b$  とする。

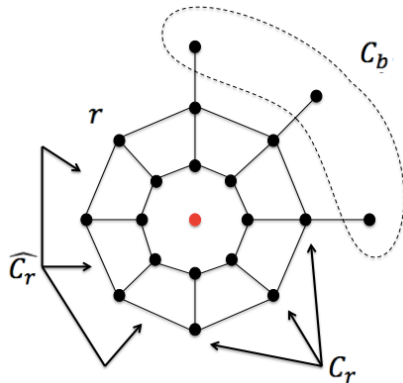


図 14:実装アルゴリズムの各定義の模式図

新規円を定義する上で重要なのは、できるだけ点同士が分散するように  $C_b$  を定義することである。そのために、 $\widehat{C}_r$  を垂直に横断し  $r$  を通るような部分平面  $F_r$  の群である葉層構造  $\{F_r\}_{r \in \widehat{C}_r}$  を定義する。3次元空間内の平面はその法線ベクトルによって一意に決定できることが知られている。そこで、 $r$  をその法線ベクトル

$$\begin{aligned} & (r_{right} - r) + (r - r_{left}) \\ & = r_{right} - r_{left} \quad (13) \end{aligned}$$

によって定義する。ここでの  $r_{left}, r_{right}$  はそれぞれ  $r$  の左右に隣接する点である。

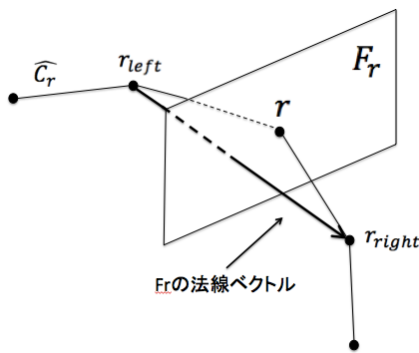


図 15:葉層構造の模式図

次に  $r$  から距離  $\Delta$  だけ離れた位置に、 $W^s(x_0)$  と  $F_r$  の両方に含まれるような点  $b_r \in C_b$  を探す。

### 3.1.2 シューティング法

新規円を定義するための点  $b_r$  は以下に示すような境界値問題を解くことで導き出すことができる。

$\widehat{C}_r$  上に初期点を持ち、 $F_r$  で終わるような軌跡  $\{\phi^t(q_r(\tau)) | t \in [0, \tau]\}$  (14)

を考える。  
 この軌跡のパラメータ値  $\tau$  が境界条件

$$\begin{cases} \phi^0(q_r(\tau)) \in C_r \\ \phi^\tau(q_r(\tau)) \in F_r \end{cases} \quad (15)$$

を満たすような  $\tau$  を探す。便宜上、 $\widehat{C}_r$  上に配置する軌跡の初期点を  $q_r(\tau)$ 、 $F_r$  上に位置する軌跡の終点を  $b_r(\tau) = \phi^\tau(q_r(\tau))$  と表す。最終的に  $\|b_r(\tau_0) - r\| = \Delta$  となるような  $\tau_0$  見つけることが目的となる。その方法として、

- (1)  $\widehat{C}_r$  上の点  $q_r(\tau)$  からベクトル場に沿ってルンゲクッタ法を用いて連続で数値積分を行い、軌跡を描く。
- (2) 軌跡上の各点に対して判定を行い、点が面  $F_r$  上にあるかどうかを調べる。
- (3)  $F_r$  上に点が乗っていた場合、その点を  $b_r(\tau)$  とし、 $\|b_r(\tau) - r\|$  の値を調べる。
- (4)  $\|b_r(\tau) - r\| = \Delta$  である場合  $\tau = \tau_0$  とし、 $b_r = b_r(\tau_0)$  と定めて走査を終了する。そうでなかった場合は点  $q_r(\tau)$  の位置を  $\widehat{C}_r$  上で少しだけ移動させ(1)の処理に戻る。

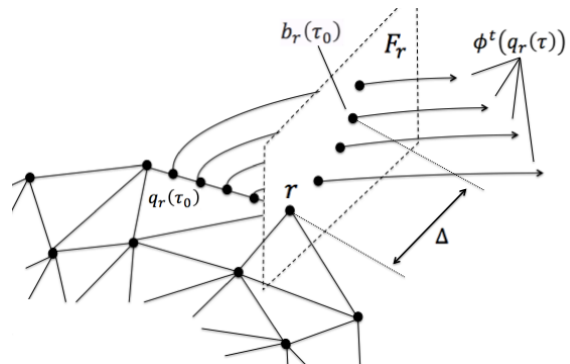


図 16:シューティング法

実際には、 $\|b_r(\tau) - r\|$  の値が厳密には  $\Delta$  でなくても次点  $b_r$  として設定してしまう。具体的には、予め指定しておいたごく小さな値  $\varepsilon$  を用いて、 $\|b_r(\tau) - r\| \in [(1 - \varepsilon)\Delta, (1 + \varepsilon)\Delta]$  である場合である。

このような処理を繰り返し行うことで、 $C_r$  の各点についてそれぞれ点  $b_r$  を定義し、 $b_r$  の集合を  $C_b$  とする。このとき、新規の離散円  $C_b$  と  $C_r$  の間にポリゴンを張ることによってできる帯が安定多様体  $W^s(x_0)$  を正確に近似できているかどうか精度の確認が必要である。これについては次節で説明する。

### 3.2 メッシュの追加・削除

このアルゴリズムでは、 $C_b$  において極端な偏り方で点が定義された場合、その偏り

方に応じて自動的に点を補完、削除し、メッシュの精度を保つ機能を実装している。そのためには、離散円の隣接する2つの点に関して予め最大値と最小値( $\Delta_F, \delta_F$ )を定義しておき、その値に基づいて判定を行う必要がある。ここではメッシュの点の追加、削除アルゴリズムの具体的な処理内容について説明する。

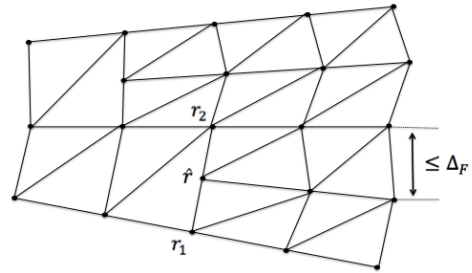


図 18:メッシュ点の追加

### 3.2.1 メッシュの削除

新規の離散円として定義された $C_b$ 上の点の中で、隣接する2つの点をそれぞれ $b_1, b_2$ とする。また、同様に $C_r$ 上の隣接する2つの点を $r_1, r_2$ とする。まず、 $b_1, b_2$ が互いに近づきすぎて配置されてしまった場合を考える。この場合、葉層構造 $\{F_r\}_{r \in C_r}$ 同士が、 $\Delta$ より短い位置で交差してしまうという現象が起り得る。

この状態で $C_b$ を確定させ、新たな離散円を定義しようとする、点の順序に矛盾が生じアルゴリズムが混乱してしまう。よってこの場合予め定義しておいた2点間の最小値 $\delta_F$ を用いて、 $\|b_2 - b_1\| < \delta_F$ であるかどうかを調べる。もし $\|b_2 - b_1\| < \delta_F$ であるようであれば片方の点を消去するようにしたい。したがって図 18 からわかるように、 $b_2 = b_1$ とし、 $b_2$ を削除する。

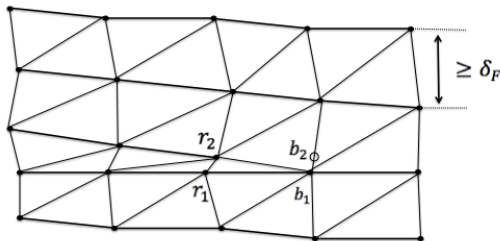


図 17:メッシュ点の削除

### 3.2.2 メッシュの追加

逆に $b_1, b_2$ が互いに離れすぎていた場合、流面の精度が十分であるとは言えなくなる。よってこの場合は予め定義しておいた2点間の最大値 $\Delta_F$ を用いて $\|b_2 - b_1\| > \Delta_F$ であるかどうかを調べる。 $\|b_2 - b_1\| > \Delta_F$ であった場合、メッシュの目を細かくするために $C_b$ に追加の点を打ちたい。そのためまず $C_r$ に

$$\hat{r} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) \quad (16)$$

となるような点 $\hat{r}$ を定義する。そこに新たに葉層構造 $F_{\hat{r}}$ を定義し、他の点と同様境界値問題を解くことで $C_b$ に追加の点 $b_{\hat{r}}$ を定義する。

### 3.3 アルゴリズムの利点

従来のアルゴリズムは完全に初期点に依存した流れ方をしていたため、仮に末端で2線間の距離が大きく離れてしまっても、修正することができなかった。しかし、このアルゴリズムでは、幅が広がりすぎてしまった流線間にその都度補完流線を加えるため、流線間の距離はある程度一定に保たれ、極端な開領域ができることはない。よってより精度の高い流線面の描画が可能になると考えられる。

### 4.実行結果

#### 4.1 ローレンツ方程式について

今回は可視化対象としてローレンツ方程式を用いた。ローレンツ方程式は大気の流れをモデル化した式であり、 $C, -C$ と呼ばれる特異点付近に渦状の流れが存在する事が知られている。自然界の流体の渦もこのローレンツのモデルで考える事ができ、ローレンツ方程式の渦部の多様体を正しく可視化できることで、CGによる渦の表現をよりリアルなものに出来ると考えられる。

#### 4.2 可視化結果

実際にローレンツ方程式における多様体を Geodesic Level Set Method を用いて可視化した例を示す。不安定多様体を青色の曲面、安定多様体を赤色の曲線で可視化している。 $y$ 軸に沿って見た視点を0度として、 $z$ 軸を中心に0度、30度、45度、90度回転させた図と、 $z$ 軸に沿って見た図を掲載する。

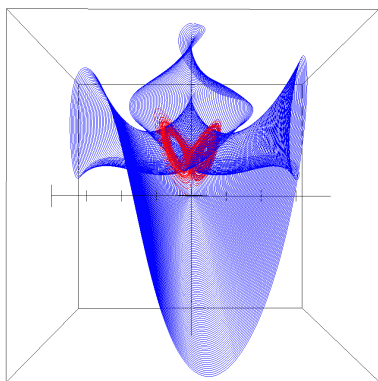


図 19:0 度

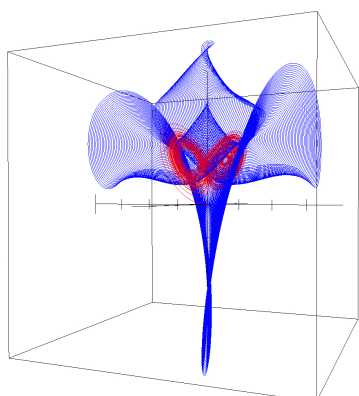


図 20:30 度

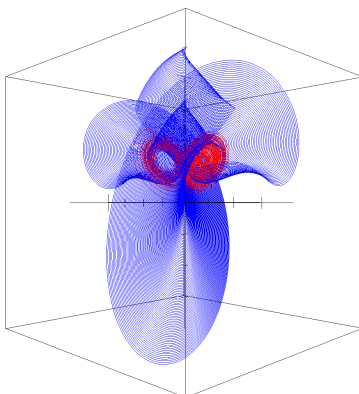


図 21:45 度

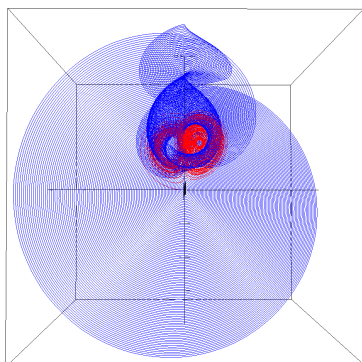


図 22:90 度

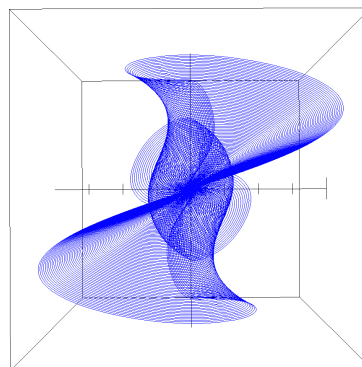


図 23:z軸方向

### 4.3 渦の難しさについて

流体における渦部分の多様体の可視化は非常に困難である事が知られている。それは渦部分では非常に複雑かつ繊細に対流同士が行き交っており、多様体の導出においてわずかな誤差も許されないからである。

図からわかる通り、ローレンツ方程式も渦状の流れを持っており、渦部分では安定多様体と不安定多様体が非常に近い位置ですれ違っているのがわかる。

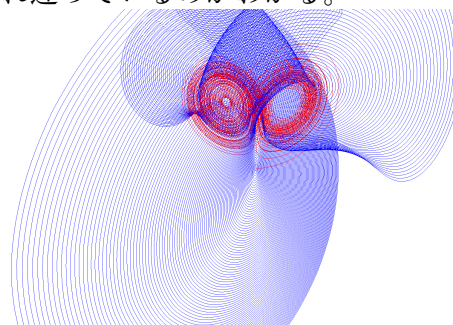


図 24:渦部の拡大図 1

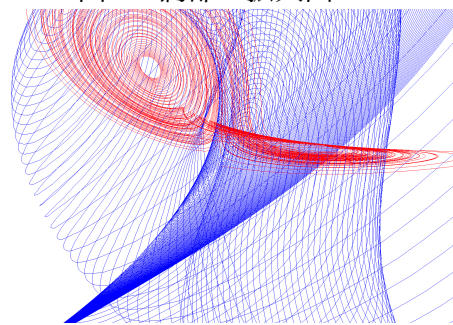


図 25:渦部の拡大図 2

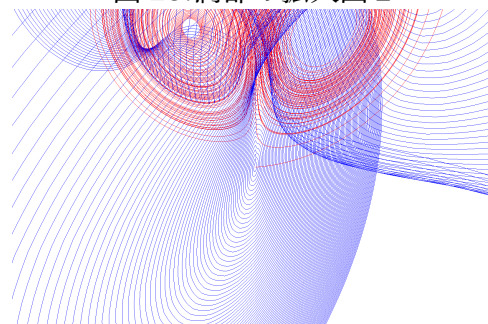


図 26:渦部の拡大図 3

## 5.まとめと今後の課題点

今回 Geodesic Level Set Method を用いてローレンツ方程式の多様体の可視化を行ったが、安定多様体、不安定多様体それぞれが交差せず、かつ正しく特異点に対して収束しているのが観察できた。Geodesic Level Set Method を用いての多様体の導出は渦部の多様体を正しく導出出来る程度には高精度であると考えられる。

一方課題点として、精度を得た代わりに実行時間がかかりかかってしまう事があげられる。シューティング法を繰り返す処理の部分が最も時間を食うので、より効率的に走査を行う方法( $C_r$ より内側に流線が流れた時点で走査を次のステップに切り替える等)の考案、実装を行って行きたい。

## 6.参考文献

- [1]市川 泰士, 蔡 東生  
「地球磁気テールの臨界状態における 3 次元トポロジーの可視化」筑波大学大学院 博士課程 工学研究科 修士論文 2001
- [2]V.I.Arnold 著, 足立 正久, 今西 英器 訳「常微分方程式」現代数学社, 1981
- [3]V.I.Arnold 著, 蟹江 幸博 訳  
「カタストロフ理論」現代数学社, 1985
- [4]エイブラハム, ショー 著, 東保 光彦 訳「ダイナミクス-力学系 振る舞いの幾何学 上 周期的なふるまい」現代数学社, 1989
- [5]エイブラハム, ショー 著, 東保 光彦 訳「ダイナミクス-力学系 振る舞いの幾何学 下 カオス的なふるまい」現代数学社, 1989
- [6]E.Atle Jackson 著, 田中 茂, 丹波 俊雄, 水谷 正大, 森 真 訳  
「非線形力学の展望 I カオスとゆらぎ」共立出版株式会社, 1994
- [7]E.Atle Jackson 著, 田中 茂, 丹波 俊雄, 水谷 正大, 森 真 訳  
「非線形力学の展望 II 複雑さと構造」共立出版株式会社, 1995
- [8]Hinke Osinga, Bernd Krauskopf  
「Two-dimensional global manifolds of vector fields」 Caltech 107-81, Control&Dyn. Systems, Pasadena, CA 91125, 1998
- [9]Steven H. Strogatz 著  
「Nonlinear Dynamics and Chaos:With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering」, Westview Press, 2001
- [10]J.L.Helman, L.Hesselink 著  
「Visual Vector Field Topology in Fluid Flows」, IEEE Computer Graphics & Applications, May 1991