

非線形システムの生成する多変量時系列に対する 共分散構造分析に基づく近似表現と粒子フィルタを用いた 効率的状態推定

時永 祥三¹ 池田 欽一²

概要：本報告ではまず、大規模な非線形システムにおいて観測変数の相関に注目しながら、共分散構造分析における潜在変数に相当する代表的な時系列（潜在時系列と呼んでおく）を用いることにより、近似的に時系列を表現する方法を提案する。この場合、多変量解析における因子分析に相当する動的因子分析の方法論を用いて、潜在時系列による時系列記述を推定する。PFを用いた状態推定においては、すべての非線形システムにおける状態推定を回避する目的で、潜在時系列についてのみPFによる状態推定を行い、これ以外の非線形システムが生成する時系列からの状態推定は、これらの推定された状態変数の集合により近似する。

1. はじめに

近年、内部状態推定のほかに多数の目標を追跡する問題などにおいて、非線形システムにおける状態推定の方法である粒子フィルタ (Particle Filter:PF) が用いられている [1]-[3]。規模が大きくなる場合には、同時並行的に状態変数を推定する方法が適用されているが、部分システムへの分解と接合などの方法論が中心であり、計算量の削減は議論されていない [4][5]。システムが大規模となる場合には、分解原理などが適用されるが、手順は簡単でない。一方、多変量時系列の研究分野においては、多数の時系列変動 (多変量時系列) をいくつかの独立した時系列の挙動に帰着させることで、計算を簡素化する方法が提案されている [6]-[8]。しかしながらこれらの2つの問題は別々に議論されており、これまで総合して適用する方法は示されていない。本報告では、多変量時系列に対する共分散構造分析とPFを用いた大規模非線形システムにおける状態推定について述べる。

本報告ではまず最初に、多変量解析における変数の集約化の方法論 (共分散構造分析) を拡張し、大規模な非線形システムで生成される多変量時系列を、少数の代表的な時系列で近似的に表現する方法を提案する [6]-[8]。具体的には、システムの観測変数の相関に注目しながら、共分散構造分析における潜在変数に相当する代表的な時系列 (簡単のため潜在時系列と呼んでおく) を用いることにより、近似的に

時系列を表現する方法を提案する。この場合、多変量解析における因子分析に相当する多変量時系列に対する動的因子分析の方法論を用いて、潜在時系列を推定する。すなわち時系列変動の集約を行うための動的因子 $z_i(t)$ およびこの時間遅れ変数 (ラグ付変数) である $z_i(t-k)$ により観測時系列 $y_i(t)$ を表現する。この場合潜在時系列は観測時系列のなかから1つに特定されることが望ましいので、 $z_i(t)$ を表現する1つの $y_i(t)$ を特定することを行う。これにより、すべての時系列を、潜在時系列 $z_i(t)$ を用いて近似的に表現する。次にそれぞれの非線形システムにおけるPFを用いた状態推定においては、システム全体における状態推定を回避する目的で、潜在時系列 $z_i(t)$ についてのみPFによる状態推定を行い、これ以外の非線形システムが生成する時系列 $y_i(t)$ を生成するダイナミクスに対する状態推定は、これらの潜在時系列から推定された状態変数の集合により近似する。応用例として、人工的に生成した大規模な非線形システムから生成される時系列からの状態推定を行い、性能を評価するとともに、現実のデータへの適用可能性を議論する。

2. 大規模非線形システムにおける共分散構造分析

2.1 多変量時系列における動的因子分析

本報告で提案する大規模な多変量時系列に対する共分散構造分析について述べる前に、これまで提案されている多変量時系列における動的因子分析の概要を説明しておく。動的因子分析にさきだち、クロスセクションデータに対する

¹ 九州大学大学院
Kyushu Univ.

² 北九州市立大学
The Univ. of Kitakyushu

多変量解析における因子分析について整理する。観測データを $y_i^{(k)}$ としておく。 i は変数の番号であり、 k はサンプルの順番である。この変数 $y_i^{(k)}$ の相関行列を用いて、相互に相関のない変数 (因子) $z_i^{(k)}$ へと変換がなされる。行列で表現すると、次のようになる。

$$Z = AY, Z = [z_i^{(k)}], A = [a_{ij}], Y = [y_i^{(k)}]. \quad (1)$$

ここで行列 A は変換行列である。因子の個数が観測変数と同じであればデータの集約化はなされないの、近似的にいくつかの因子を代表的な集約化された変数として選択するかの基準として、それぞれの因子の持っている情報の比率 (寄与率) とその累積 (累積寄与率) が用いられる。累積寄与率が 70% となる時点まで因子を採用し、これ以下は無視しても構わないことが、経験的に知られている。

多変量時系列 ($y_i(t)$ を i 番目の時系列としておく) にこの因子分析を適用する方法が動的因子分析であり、ほぼ同様な枠組みで行われる。ただし、開始する式は式 (1) とは異なり、観測時系列を潜在時系列 (これを $z_i(t)$ としておく) で表現する式を、直接的に用いている。次のような式により、 $y_i(t)$ を $z_i(t)$ により表現する。

$$y_i(t) = \sum_{d=0}^D \sum_{j=1}^N a_{ij}^{(d)} z_j(t-d) + \varepsilon_i(t), i = 1, 2, \dots, M. \quad (2)$$

ここで定数 $a_{ij}^{(d)}$ は、潜在時系列により観測時系列を近似するための係数であり、 N は潜在時系列の総数、 D は潜在時系列の時間遅れ (ラグ) の最大値、 M は近似対象である観測時系列の総数である。未知である係数を推定する方法として、観測時系列である $z_i(t), y_i(t)$ の間における共分散構造が計算された数値と、方程式から得られるものと等しいとする関係式を用いる。なお潜在時系列は特別な時系列ではなく、観測時系列のなかから、これ以外の時系列の近似表現を与えるに適している時系列として選択された時系列である (この選択方法については、後述する)。

文献 [6][7] などにおいて式における未知の係数 $a_{ij}^{(d)}$ からなる行列 A を推定する方法が示されており、これをまとめると以下ようになる。なお、文献 [6][7] では、時系列のラグ成分も近似に使用する一般形が示されているので、ここでも同様の定式化を用いている。

式 (2) において、ラグ d を最大である $d = D$ の範囲まで仮定した場合の、観測時系列と潜在時系列の間における関係式を行列でまとめると、次のようになる。

$$Y = A\xi + E \quad (3)$$

$$Y = [[y_1(t), \dots, y_M(t)]^T, [y_1(t-1), \dots, y_M(t-1)]^T, \dots, [y_1(t-D), \dots, y_M(t-D)]^T]. \quad (4)$$

$$\xi = [Z(t)^T, Z(t-1)^T, \dots, Z(t-D)^T] \quad (5)$$

$$Z = (z_1(t), \dots, z_N(t), z_1(t-1), \dots, z_M(t-1), \dots, z_1(t-D), \dots, z_M(t-D)) \quad (6)$$

$$E = [e(t)^T, e(t-1)^T, \dots, e(t-D)^T] \quad (7)$$

$$e(t) = [e_1(t), e_2(t), \dots, e_M(t)] \quad (8)$$

係数行列 A は、以下のように与えられる。

$$A = \begin{pmatrix} A^{(0)} & A^{(1)} & \dots & A^{(D)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & A^{(0)} & \dots & A^{(D-1)} & A^{(D)} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A^{(0)} & \dots & A^{(s-1)} & A^{(s)} & \dots \end{pmatrix}$$

$$A^{(d)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(d)} & a_{12}^{(d)} & \dots & a_{1N}^{(d)} \\ a_{21}^{(d)} & a_{22}^{(d)} & \dots & a_{2N}^{(d)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{M1}^{(d)} & a_{M2}^{(d)} & \dots & a_{MN}^{(d)} \end{pmatrix}$$

この関係式によって、観測時系列における共分散関数と潜在時系列の共分散関数とが、未知である係数の行列 A を介して関係づけられることを用いて、係数の推定を行う。

一般的な動的因子分析の手法では、潜在時系列 $z_i(t)$ それ自身が未知であり、推定の対象となる。この場合には、潜在時系列の間の共分散を特定の値に設定することにより、未知である係数 $A^{(d)}, d = 0, 1, \dots, D$ を、式 (3) における左辺と右辺において共分散を求め、これらの間における誤差を最小化する最小 2 乗法などにより決定することができる。このように、未知である係数 $A^{(d)}$ が決定されると、潜在変数 $z_i(t)$ は観測変数 $y_i(t)$ に対しては、線形ダイナミックにおける内部状態変数と同じような変数になる。この関係を用いて、観測時系列 $z_i(t)$ に対してカルマンフィルタ (Kalman Filter:KF) を適用して、潜在変数 $z_i(t)$ の推定がなされる。しかし本報告で述べるように潜在変数に対して、更に内部状態変数の推定を適用する場合には、潜在変数のダイナミクスが未知である問題が解決されない。したがって本報告では、潜在変数を既知である観測時系列のなかから選択する方法を用いている。

2.2 共分散構造分析によるパラメータ推定

以下では、これまで述べてきた多変量時系列に対する動的因子分析を拡張して、共分散構造分析による係数パラメータ推定手法を適用する。この手法の適用により、少数の潜在時系列を用いて、すべての時系列を近似的に表現することができる。ここで仮定する事項は、次の 2 つである

(仮定 1) 潜在時系列は観測時系列のなかから選択する

(仮定 2) 係数パラメータ推定には最小 2 乗法を用い、残差を式 (8) の右辺とみなす

まず仮定 1 については、後で述べるように、観測データを用いてこれを生成するダイナミックの内部状態変数の値を推定するが、そのためには、ダイナミクスが既知であることが必要である。すでに述べたように、一般的な動的因子分析により得られる潜在時系列を用いる場合には、ダイナミクスが未知であるので、内部状態の推定をすることは

できない。同時に、観測時系列の中においても、この内部状態推定の個数をできるだけ制限したいことがある。

仮定 2 はパラメータ推定の手法そのものに関係することであり、式 (8) における左辺 $Y(t)$ に関する共分散を $\Sigma(D)$ とした場合に、これは既知である数値であるので、この数値と式の右辺の関係式から求めた共分散の項である $A\Pi(D)A^T$ が、できるだけ近くなるようにパラメータを変化させる方法を用いる。

$$Q = E[\Sigma(D) - A\Pi(D)A^T]^2 \rightarrow \min. \quad (9)$$

このため、式 (8) の左辺と右辺の差の 2 乗誤差 Q を最小にするアルゴリズム (具体的には、係数 $a_{ij}^{(d)}$ に対する微分係数を用いる最急降下法) を用いる。

$y_4(t), y_5(t)$ に対する状態変数の推定

PF を用いた状態推定の詳細は次の章で述べるが、ここに示す簡単な例題を用いて、その概要を説明しておく。いま、潜在変数を $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ (これらは観測変数 $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ に等しい) としておき、残りの観測時系列を $y_4(t), y_5(t)$ としておく。潜在時系列 $z_1(t), z_2(t), z_3(t)$ に対して PF を用いて、これらの内部状態 $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ が推定できていると仮定する。具体的には $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ に対応して複数の粒子 (j 番目の粒子) の対として、時刻 t における状態変数の推定値 $x_{1,t}^{(j)}, x_{2,t}^{(j)}, x_{3,t}^{(j)}$ が得られているとする (粒子の総数を N_P とする)。このとき、観測変数 $y_4(t), y_5(t)$ に対する状態変数の値 $x_{4,t}, x_{5,t}$ は、次のように逆関数を用いて推定する。まず粒子 j に対応する関数 $z_i(t)$ の値を求めて (これを関数粒子と呼んでおく)、これを $z_{i,t}^{(j)}$ としておく。

$$z_{i,t}^{(j)} = G(x_{i,t}^{(j)}), j = 1, 2, \dots, N_P. \quad (10)$$

次に、観測時系列の近似式にこの関数粒子の値を代入し、逆関数の関数値を r_i として求めておく。

$$r_i = \sum_{d=0}^D \sum_{k=1}^3 \sum_{j=1}^{N_P} (a_{ik}^{(d)} z_{k,t}(t-d)^{(j)}) / N_P, i = 4, 5. \quad (11)$$

観測時系列 $y_4(t), y_5(t)$ の生成関数に対する逆関数の値として、時系列に対する内部状態を推定する。

$$\hat{x}_i(t) = G_i^{-1}(r_i), i = 4, 5. \quad (12)$$

すなわち、状態変数の粒子 $x_{1,t}^{(j)}, x_{2,t}^{(j)}, x_{3,t}^{(j)}$ が与えられている場合には、観測変数 $y_i(t), i = 4, 5$ の値を実現するためには、状態変数がどの値となるかが関数 $y_i(t), i = 4, 5$ の逆関数を用いて求められることになる。したがって、状態変数に対する直接的な粒子 $x_{4,t}^{(j)}, x_{5,t}^{(j)}$ を生成する必要はない。

なお、観測時系列 $y_i(t)$ は潜在時系列 $z_i(t)$ によって近似式により表現されていることを用いれば、サンプルパスをたどることによって、1 つの $y_i(t)$ の値が決定されるので、これを関数の値として、逆関数から観測時系列の内部状態

を推定することも可能である。しかしながらこの場合には、1 つのサンプルパスによってだけ内部状態が決定される危険性がある。そのため、確率的な広がり仮定して、ここに示すように潜在時系列に対応する粒子を用いて、推定する方法によりカバーすることが望ましい。

3. 大規模非線形システムにおける PF による状態推定

3.1 PF による状態推定の基本

以下では PF による状態推定の基本についてまとめておくが、本報告で適用する分野に限定して簡潔に述べことにする。非線形状態方程式により生成される時系列モデルを、次のように記述しておく [1]-[7]。いま n 個のダイナミクスがあり、それぞれの観測変数と状態変数の次元は 1 であると仮定しておく。

$$x_i(t+1) = F_i(x_i(t), u_i(t)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

$$y_i(t) = G_i(x_i(t), v_i(t)), i = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

ここで、変数 $y_i(t)$ は時刻 $t (t = 1, 2, \dots, T)$ における観測データを意味するスカラー (1 次元ベクトル) であり、変数 $x_i(t)$ は推定されるべき 1 次元の状態変数ベクトルである。また $u_i(t), v_i(t)$ は 1 次元のシステムノイズである。 $F_i(\cdot), G_i(\cdot)$ は、それぞれ、変数 $x_i(t), u_i(t)$ および変数 $x_i(t), v_i(t)$ についての関数である。ここで、 $F_i(\cdot), G_i(\cdot)$ は非線形関数であり、一般の PF の適用では、既知の関数であると仮定する。

いま、 $F_i(\cdot), H_i(\cdot)$ が行列を用いた線形表現の形式で与えられ $x_i(t+1) = A_i x_i(t) + u_i(t), y_i(t) = B_i x_i(t) + v_i(t)$ の形式、行列 A_i, B_i は時間 t のみの関数、 $u_i(t), v_i(t)$ が正規乱数に従う場合には、従来から手法である KF を適用して、状態を推定することができる。しかし、状態方程式が非線形の場合には、KF が適用できないため PF が援用され、有効性が示されている。PF 適用の概要は、以下のようにまとめられる。いま、観測データとして時系列 $y_i(t)$ が与えられた場合に、式 (1)(2) に示すモデルを仮定して、 $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ を推定する。記号として、 $x_i(t), i = 1, 2, \dots, n$ の j 番目の粒子を $x_{i,t}^{(j)}$ としておく。

(1) ステップ 1: 粒子の初期値の生成

時刻 0 における変数 $x_{i,t}^{(j)}$ の初期値 $x_{i,0}^{(j)}, i = 1, 2, \dots, n$ について、あらかじめ定めた確率分布に従う乱数により N_P セットの粒子の集合として生成する。

(2) ステップ 2: システムノイズの生成

それぞれの粒子について、システムノイズである $u_{i,t}^{(j)}$ および $v_{i,t}^{(j)}$ について、あらかじめ与えた確率分布に従った乱数によって N_P セットの粒子として生成する。

(3) ステップ 3: $x_{k,t}^{(j)}$ の 1 時刻先予測

$x_{i,t}^{(j)}$ の 1 時刻先予測が次によりられる。

$$x_{t+1}^{(j)} = F(x_t^{(j)}, v_t^{(j)}), v_t^{(j)} = (v_{1,t}(j), v_{2,t}^{(j)}, \dots, v_{n,t}^{(j)}). \quad (15)$$

ただし上の式はベクトル $x_{t+1}^{(j)}$ のそれぞれの要素 $x_{i,t+1}^{(j)}$ について計算することを意味する。

(4) ステップ 4:重みの計算

次に、それぞれ粒子 i の重み $w_t^{(j)}$ を計算する。

$$w_t^{(j)} = R_t(y_i(t+1)|x_{i,t+1}^{(j)}). \quad (16)$$

ここで $R_t(\cdot)$ は $x_{i,t+1}^{(j)}$ が与えられた場合の $y_i(t)$ の条件付分布である。これらの重みを、集計しておく。

$$W_t = \sum_{j=1}^N w_t^{(j)}. \quad (17)$$

(5) ステップ 5:粒子のリサンプリング

それぞれの粒子を、重みに従って、リサンプリングする。すなわち粒子の集合 $X_{t+1} = (x_{i,t+1}^{(1)}, x_{i,t+1}^{(2)}, \dots, x_{i,t+1}^{(N_P)})$ から粒子を $w_t^{(j)}/W_t$ の確率に従って復元抽出して、生成する。この結果として、変数 $x_i(t)$ の確率分布を推定することができる。時刻 t における状態の推定値は、集合 X_t の平均として与えられる。

3.2 共分散構造分析の結果を用いた状態推定の簡略化

多変量時系列の共分散構造分析の結果を用いた状態推定の簡略化の概要については、すでに述べているが、以下では乱数や尤度の関連も含めて述べておく。この問題に対する処理手順は、次のようになる

ステップ (1) 潜在時系列に対する粒子生成

潜在時系列 $z_i(t)$ を入力データとして、この生成ダイナミクスを用いながら、その生成のもとになる内部状態を推定し、この j 番目の粒子を $x_{i,t}^{(j)}, j = 1, 2, \dots, N_P$ としておく。

ステップ (2) 潜在時系列の関数値 (関数粒子) を中間変数として生成

潜在時系列を生成する関数 $G(\cdot)$ にこの粒子の値を代入して、中間変数である関数粒子 $z_{i,t}^{(j)}$ を生成する。ここで、式 $z_{i,t}^{(j)} = G(x_{i,t}^{(j)}), j = 1, 2, \dots, N_P$ を用いる。粒子 $x_{i,t}^{(j)}$ には尤度に比例する重みが反映されており、より頻繁に出現する粒子ほど、時系列を生成する場合の有力な内部状態となっている。実際には、時刻 t において観測される時系列の値は $z_i(t)$ であるが、これは多くの時系列のサンプル値の実現値の 1 つにすぎないと考えられる。したがって、粒子の重みを考慮して、関数の対応する粒子を生成することにより、このような不確実性を、部分的ではあるが解決することができる。

ステップ (3) 観測時系列に対する逆関数から内部状態の推定

潜在時系列に対応する関数粒子が生成されたので、これを観測時系列の生成関数の実現値であると仮定して、逆関数の方法により、観測時系列の内部状態を推定する。すなわち、次のようになる関数の値 r_i を $r_i = \sum_{d=0}^D \sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^{N_P} (a_{ik}^{(d)} z_{i,t}(t-d)^{(j)})/N_P$ により求

めておき、観測時系列の生成関数の逆関数値として状態 $x_i(t) = G^{-1}(r_i)$ を推定する。

4. 応用例

4.1 共分散構造分析に基づく潜在時系列による近似特性

人工データに対して本報告の多変量時系列からの状態推定手法を適用する前に、まず共分散構造分析に基づく潜在時系列による時系列近似について性能を評価しておく。相関のある時系列を生成する必要があるため、その基本となる方法は、ある程度限定されており、具体的には、相関のある正規乱数を用いた時系列生成が基本となる。ここで用いる多変量時系列の生成方法を、Case I ~ Case III と呼んでおく。

Case I:相関のあるブラウン運動を単調増加関数で変換した観測時系列

Case II:1 次の自己回帰モデルを需要関数とした受注数量の時系列 [9]

Case III:非線形システムの構造変化推定の例題 [10]

Case I においては次のような、比較的簡単な多変量時系列を仮定する。この事例は人工的な株価の生成と、その市場での変形に相当する。状態変数 $x_i(t)$ は、ブラウン運動の生成モデルにしたがって生成される。

$$x_i(t+1) = x_i(t) \exp[0.001u_i(t)]. \quad (18)$$

ここで $u_i(t)$ は相互に相関のある (相関係数 $R = [r_{ij}]$ が存在する) 平均がゼロで分散が 1 の正規乱数である。また、観測時系列を生成するための変換関数 $G_i(t)$ は、次のような単調増加関数からランダムに選択され、状態変数から観測時系列が生成される。 $0 \leq x \leq 1$ の変数の範囲について

$$(1) G_i = (x/1.2)^{1.2} + v_i$$

$$(2) G_i = x + v_i (0 \leq x \leq 0.5), G_i = 1 + x + v_i (0.5 \leq x \leq 1)$$

$$(3) G_i = 3 \log(1 + 3x) + v_i$$

これらの関数は、株価の収益率が株価が高いほうにあるときや、低いときに、通常値よりは協調される傾向を反映している。観測された時系列から、このような変形を受ける前のブラウン運動を推定する問題となっている。

Case II においては、時系列 $y_i(t)$ が i 番目の小売業者から製造業者へと伝達される製品製造の数量を表現する場合に、小売業者が用いている需要予測を推定する問題である [9]。小売業者は市場の需要をにしたがって予測し、これをもとに製造業者に対して製造数量を伝える。しかしながら小売業者は、そのままの最適な数量ではなく、自身が修正を加えた数量を、製造業者に伝達する。この詳細をここで述べるのは適切ではないので、付録にまとめておく。変数の意味は、以下のようになる。

$x_i(t)$: i 番目の小売業者の推定する需要

$y_i(t)$: i 番目の小売業者が製造業者に出す注文、関数

$G_i(x_i(t))$ で変形される

変数のプロセス $x_i(t)$ は 1 次の自己回帰モデルにしたがって次のように生成される。

$$x_i(t+1) = d + \rho x_i(t) + u_i(t) \quad (19)$$

ここで $u_i(t)$ は Case I における場合と同じである。パラメータ d, ρ はある範囲で自由に選ぶことはできるがシミュレーションの結果には大きな影響を与えないので、以下では $d = 2, \rho = 0.5$ としておく。時間遅れの導入のための変数を $s_i(t) = x_i(t-1)$ としておく。小売業者が注文すべき最適な製品数量は決定されるが、これが小売業者の意思により関数を介して変形され、数量 $y_i(t)$ として製造業者に注文される (l は小売業者があらかじめ販売を予測する期間であり、リードタイムと呼ばれる)。

$$y_i(t) = G_i[x_i(t) + c_R(x_i(t) - s_i(t))], c_R = \frac{\rho(1 - \rho^{l+1})}{1 - \rho}. \quad (20)$$

最適な製造数量を修正する変換関数 $G_i(x_i(t))$ は、次のような単調増加関数からランダムに選択され、状態変数から観測時系列が生成される。 $0 \leq x_i$ の変数の範囲について

- (1) $G_i = (x/1.2)^{1.2} + v_i$
- (2) $G_i = r(x-0.5) + v_i, r(y) = v_i(y \leq 0), r(y) = y + v_i(y > 0)$
- (3) $G_i = 3 \log(1 + 3x) + v_i$

Case III は、次のような非線形ダイナミクスにおける状態推定を取り扱う問題である [10]。

$$x_i(t+1) = 0.5x_i(t-1) + 25 \frac{x_i(t-1)}{1 + x_i(t-1)^2} + 8 \cos[0.5(t-1)] + u_i(t). \quad (21)$$

$$y_i(t) = 0.5x_i(t)^2 + v_i(t). \quad (22)$$

ここで $u_i(t)$ は Case I, Case II と同様に定義され、 $v_i(t)$ は平均がゼロで分散が $\sigma_v^2 = 0.01^2$ である正規乱数とする

シミュレーション結果

シミュレーションの条件を、以下のようしておく。

潜在時系列の個数: M は $N = 3 \sim 20$

多変量時系列の個数: $N = 3M$ とする

相関係数の範囲: $r_{ij} = 0.1 \sim 0.5$

なお、潜在時系列は観測時系列を近似する時系列であるので、すべての時系列との間に、ある程度の大きさの相関が存在するように設定しておく。一方では、潜在時系列の間の相関はゼロであるように設定をしておく。

このような条件のもとで、シミュレーションによって、多変量時系列の共分散構造分析に基づく潜在時系列による時系列近似の特性を分析する。すなわち、多変量時系列の間における共分散構造を仮定した場合に、潜在変数により近似的に記述される観測時系列の近似値 $\hat{y}_i(t)$ と、実際に生成された時系列 $y_i(t)$ との間の差異を求める。この近似誤差が、シミュレーションの条件によってどのように変化するかを検証する。

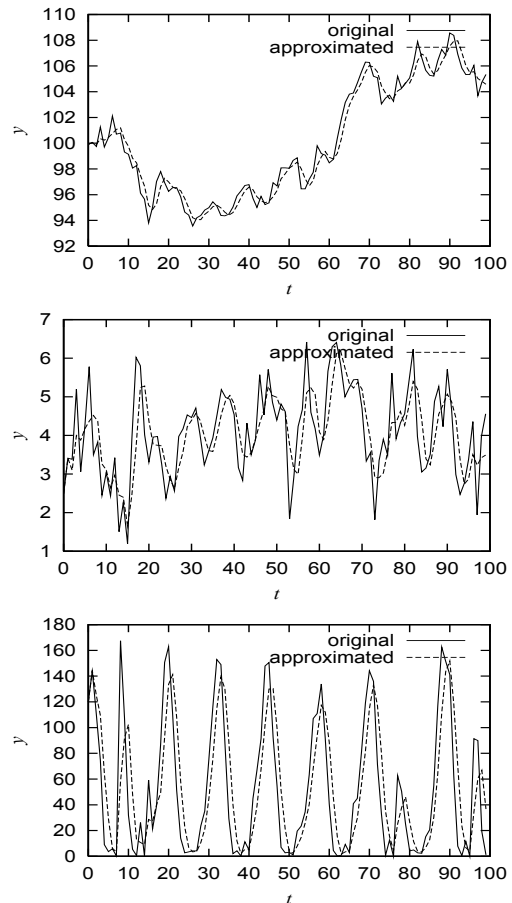


図 1 生成された観測時系列と時系列近似の例 (Case I~Case III)
 Fig. 1 An example of generated observation time series and its approximation (Case I~Case III)

図 1 には、Case I, Case II, Case III について、生成された観測時系列 $y_i(t)$ と共分散構造分析により潜在時系列で近似した時系列 $\hat{y}_i(t)$ の例を示す。表 1 には、シミュレーションの条件の組み合わせを変化させた場合の、多変量時系列の相対誤差である $e_y = |\hat{y}_i(t) - y_i(t)|/y_i(t)$ (Case III については絶対誤差 $E_y = |\hat{y}_i(t) - y_i(t)|$) の平均値を示している。この近似誤差の大きさを比較分析するために、式 (3)~(8) において、時系列を生成する正規乱数がすべて独立である場合の近似誤差を求めてみる。この場合を、ランダム生成時系列の近似と呼んでおく。すなわち、この場合には、時系列生成における発生源である乱数が独立であるので、生成される潜在時系列および観測時系列の間においては、相関が極めて小さくなることが予想され、潜在時系列による観測時系列の近似における共分散構造には特性が失われている可能性がある。これにより、時系列近似の特性は悪化するであろう。このようなランダム時系列近似の場合の近似の相対誤差 (絶対誤差) は、Case I ~ Case III についてそれぞれ $0.04 \sim 0.08, 0.26 \sim 0.31, 34.7 \sim 48.1$ となる。したがって、この相対誤差と表 1 の近似誤差を比較することにより、本報告の手法による共分散構造分析に基づく時系列近似の特性が、良好であることが判断できる。

表 1 観測時系列近似の誤差の平均値

Table 1 Average approximation error of time series

cases	$M = 3$	$M = 5$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 20$
Case I	0.005	0.005	0.005	0.006	0.006
Case II	0.08	0.08	0.08	0.09	0.09
Case III	6.0	6.0	6.1	7.1	7.2

表 2 状態推定の誤差の平均値

Table 2 Average estimation error

cases	$M = 3$	$M = 5$	$M = 10$	$M = 15$	$M = 20$
Case I	0.001	0.001	0.001	0.002	0.002
Case II	0.19	0.19	0.20	0.21	0.22
Case III	1.45	1.46	1.46	1.48	1.49

4.2 人工データを用いた多変量時系列の状態推定

次に、人工データを用いたシミュレーションに基づいて、本報告で示す時系列の共分散構造分析と潜在時系列に基づく多変量時系列の状態推定の性能について考察する。用いているデータは、前節において示した時系列 (Case I ~ Case III) であり、これらに対して内部状態を推定した結果についてシミュレーションをもとにしてまとめておく。

いま、潜在時系列 $z_i(t)$ に対しては、そのダイナミクスが既知であり、式 (13)(14) に基づいて、内部状態変数と観測時系列であるが生成される。特に潜在変数についてはその生成に基本となる乱数は独立した正規乱数としているので、単独の式にしたがって時系列が生成される。したがって、PF 手法により $z_i(t)$ から推定された内部状態 $x_i(t)$ の値が、既知であるに近いかどうかを直接的に検証することができる。図 2. には観測時系列から推定された状態変数の例を、Case I, Case II, Case III について示している。表 2 には状態推定の相対誤差の平均値を示している。

すでに述べたような時系列生成における乱数がすべて独立であるようなランダム時系列近似の場合の状態推定の相対誤差 (Case III については絶対誤差) は、Case I ~ Case III についてそれぞれ 0.07 ~ 0.12, 0.35 ~ 0.42, 2.56 ~ 3.70 となる。したがって、この相対誤差と表 2 の状態推定の誤差を比較することにより、本報告の手法による共分散構造分析に基づく状態推定の特性が、良好であることが判断できる。

参考文献

[1] A.Doucet, N.J.Gordon and V.Krishnamurthy, "Particle filters for state estimation of jump Markov linear systems," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.49, no.3, pp.613-624, 2001.
 [2] F.Gustafsson, F.Gunnarsson, N.Bergman, U.Forssell, J.Jansson, R.Karlsson and P.Nordlund, "Particle filters for positioning, navigation, and tracking," IEEE Trans. Signal Processing, vol.50, no.2, pp.425-437, 2002.

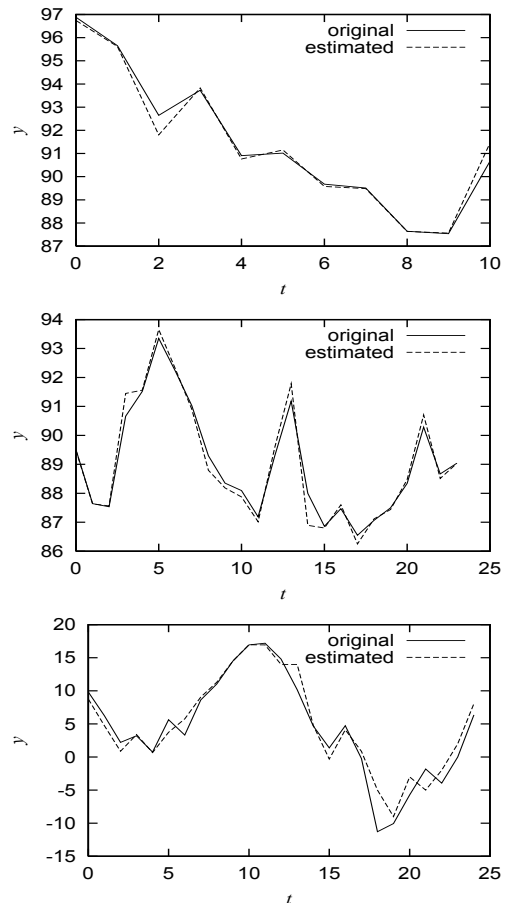


図 2 推定された状態変数の例 (Case I~Case III)

Fig. 2 An example of estimated states (Case I~Case III)

[3] J.H.Kotecha and P.M.Djuric, "Gaussian sum particle filtering," IEEE Trans. Signal Processing, vol.51, no.10, pp.2602-2612, 2003.
 [4] C.Tianshi, T.B.Schon, H.Ohlssohn and L.Ljung, "Decentralized particle filter with arbitrary state decomposition," IEEE Trans. Signal Processing, vol.59, no.2, pp.465-478, 2011.
 [5] W.Yi, M.R.Morelande, L.Kong and J.Yang, "A computationally efficient particle filter for multitarget tracking using an independent approximation," IEEE Transactions on Signal Processing, vol.61, no.4, pp.843-856, 2013.
 [6] T.W.Anderson, "The use of factor analysis in the statistical analysis of multiple time series," Psychometrika, vol.28, no.1, pp.1-25, 1963.
 [7] K.G.Joreskog, "Structural analysis of covariance and correlation matrices," Psychometrika, vol.43, no.4, pp.443-477, 1978.
 [8] P.C.M.Molenaar, "A dynamical factor model for the analysis of multivariate time series," Psychometrika, vol.50, no.2, pp.181-202, 1985.
 [9] H.L.Lee, K.C.So and C.S.Tang, "The value of information sharing in a two-level supply chain," Management Science, vol.46, no.5, pp.626-643, 2000.
 [10] N.J.Gordon, D.J.Salmond, A.F.M. Smith, "Novel approach to nonlinear/non-gaussian Bayesian state estimation," Proc IEE, vol.140, pp.107-113, 1993.