

単純セルオートマトンにおける $1/f$ ゆらぎ

蜷 川 繁[†]

単純 (1 次元 2 状態 3 近傍) セルオートマトンのうち, 独立な 88 種類のルールについてランダム初期様相から開始した場合のセルの時系列データに対してスペクトル解析を行ったところ, ルール 110 が, 最も長期にわたり $1/f$ ゆらぎという振舞いをしていることが分かった. いっぽう, ルール 110 は単純セルオートマトンの中で唯一, 計算万能性を持つことが証明されている. これらのことから, $1/f$ ゆらぎと計算万能性の間には何らかの関連があることが予想される.

1/f Noise in Elementary Cellular Automata

SHIGERU NINAGAWA[†]

The spectral analysis of 88 distinct elementary cellular automata has been done. The power spectra are calculated from the temporal evolution of the state of cells from a random initial configuration. The power spectrum of rule 110 which has been proved to be capable of universal computation shows $1/f$ noise. This result suggests that there is a relationship between $1/f$ noise and computational universality in cellular automata.

1. はじめに

セルオートマトン (Cellular Automaton, CA) は d 次元格子空間にセルとよばれる同一の有限オートマトンが配置された離散力学系である. セルがとりうる状態の集合を Q とすると, 近傍とよばれる n 個のセルの状態から状態遷移関数 $\delta: Q^n \rightarrow Q$ によって, 次のステップでのセルの状態が決まる. 状態遷移はすべてのセルにおいて同期して起こる. あるステップにおける全セルの状態の配列を様相とよぶ. $d = 1$, $|Q| = 2$, 隣接した 3 つのセルを近傍とする ($n = 3$) CA を単純 CA (Elementary CA, ECA) とよぶ. ここでは $Q = \{0, 1\}$ とする. CA は力学系の 1 種と考えられることから, 力学系の研究で用いられている手法を CA に対しても適用することができる. 本研究ではスペクトル解析を ECA に適用してそれらの振舞いを調べた. 類似の研究として, ECA が生成する様相にスペクトル解析を行うことによって, ECA が生成する様相が正規言語で記述されることを示した研究¹⁾があるが, 本研究では ECA が作る時系列データに対してスペクトル解析を行っている.

2. セルオートマトンのスペクトル解析

ECA は全部で $2^{2^3} = 256$ 種類あるが, 左右の置換, 0 と 1 の置換, およびそれらを組み合わせた置換に対して等価な CA を除くと, 独立なものは全部で 88 個ある²⁾. たとえば式 (1) の状態遷移関数を考える. 横線の上は近傍の状態を表し, 横線の下は中央のセルの次のステップでの状態を表す.

$$\frac{111 \ 110 \ 101 \ 100 \ 011 \ 010 \ 001 \ 000}{1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0} \quad (1)$$

この状態遷移関数を 8 けたの 2 進数と見なすことにより, この ECA を #182 とよぶ.

1 次元 CA の様相を図示するために, セルの状態を異なる色で表したマス目を横に並べ, さらに各ステップの様相を上から下へと縦に並べることにより, 様相の変化を 2 次元パターンとして表現したものを時空間パターンとよぶ. 典型的な ECA の時空間パターンを図 1 に示す. 白, 黒のマス目はそれぞれ状態 0, 1 のセルを表している. 本研究では, 初期様相として, 状態 0, 1 が等確率で出現するようにランダムに生成し, 周期境界条件 (periodic boundary conditions) を用いている.

N 個のセルからなる 1 次元 CA において, i 番目のセルの t ステップ目の状態を $x_i(t)$ とする. $t =$

[†] 金沢工業大学

Kanazawa Institute of Technology

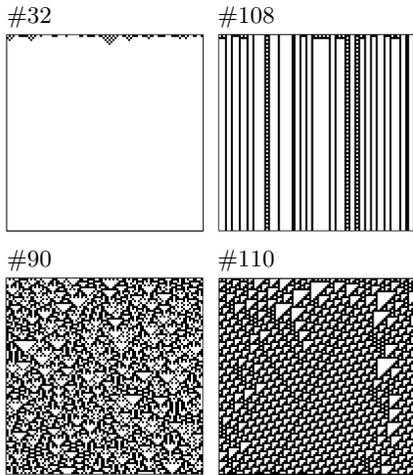


図 1 ランダム初期様相から開始した場合の単純セルオートマトンの時空間パターンの例．セル数は 100，ステップ数は 100
 Fig. 1 Examples of space-time patterns of elementary cellular automata of 100 cells for 100 time steps from a random initial configuration.

0, 1, ..., T - 1 の T 個の時系列データに対して次の式 (2) で定義されるフーリエ変換を施す．

$$\hat{x}_i(f) = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} x_i(t) \exp\left(-i \frac{2\pi t f}{T}\right), \quad (f = 0, 1, \dots, T - 1). \quad (2)$$

これを次の式 (3) のように全セルにわたって和をとったものを，パワー S(f) とする³⁾．

$$S(f) = \sum_i |\hat{x}_i(f)|^2. \quad (3)$$

図 1 で取り上げた 4 つの ECA について，セル数が 500，T = 1024 の場合のパワースペクトルを図 2 に示す．#32 は数ステップ目で全セルが 0 になるため，全周波数にわたってパワー S(f) はゼロに近い値をとる．#108 は数ステップ目から周期 2 の周期的な変化をするようになるため，f = 512 で鋭いピークを持つ．これはステップ数では周期 T/f = 1024/512 = 2 に相当する．また，#90 はカオス的な変動をするため，全周波数にわたってほぼ等しいパワーを持つ白色雑音とよばれるスペクトルを示している．いっぽう，#110 は複雑な振舞いをしており，周期的背景 (periodic background) とよばれる周期 7 のパターンが存在することから，f = 146 にピークを持ち，f = 292 と f = 440 のピークはそれぞれ第 2 次，第 3 次高調波である．

Wolfram は時空間パターンを観測することにより，1 次元 CA を 4 つのクラスに分類することを提案した⁴⁾．クラス 1 は図 1 の #32 のように空間的に均一

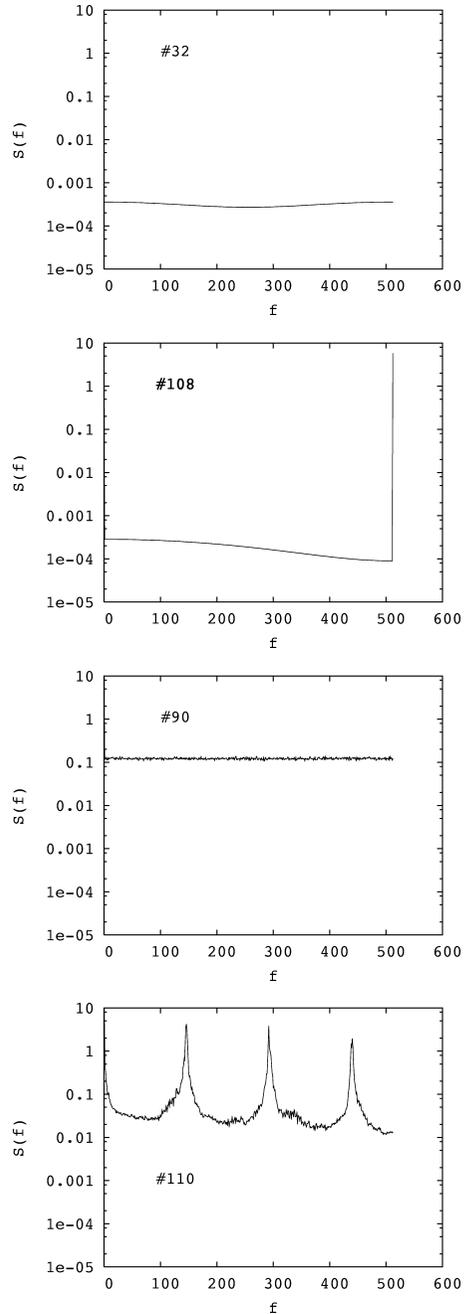


図 2 単純セルオートマトンのパワースペクトルの例．セル数は 500，ステップ数は 1024
 Fig. 2 Examples of the power spectra of elementary cellular automata. Array size is 500 and the observed time step is 1024.

な様相になり，クラス 2 は #108 のように周期的な様相になり，クラス 3 は #90 のようにカオス的な振舞いを示す．そしてクラス 4 は #110 のように複雑な振舞いを示す．それぞれ，クラス 1, 2, 3 に属すると考え

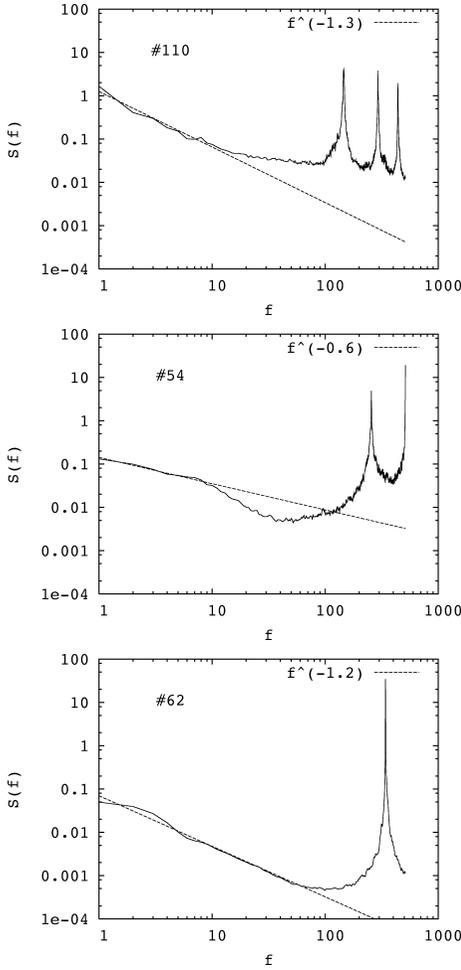


図3 #110(上), #54(中), #62(下)のパワースペクトル(両対数). セル数は500, ステップ数は1024. 点線は $f = 1 \sim 10$ で最小2乗法で $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$ と近似した場合の直線. $\beta = -1.3$ (#110), -0.6 (#54), -1.2 (#62)

Fig. 3 Power spectra of #110 (top), #54 (middle) and #62 (bottom). Array size is 500 and the observed time step is 1024. The dashed line represents the least square fitting of the spectrum in the range of $f = 1 \sim 10$ by $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$, $\beta = -1.3$ (#110), -0.6 (#54) and -1.2 (#62).

られている#32, #108, #90が図2のようなパワースペクトルを示すことはWolframのクラス分類とよく一致するといえる.

3. 単純セルオートマトンにおける $1/f$ ゆらぎ

いっぽう, クラス4であると考えられている#110のパワースペクトル(図2)を両対数で表示したものを図3(上)に示す. 図中の点線はこのパワースペクトルの $f = 1 \sim 10$ の周波数域において, 最小2乗法を用いて $\ln S(f) = \alpha + \beta \ln f$ と近似したときの直線

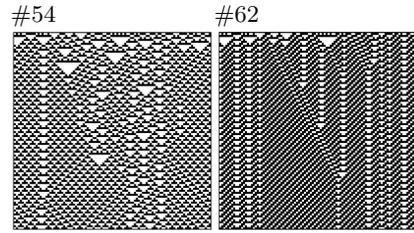


図4 ランダム初期様相から開始した場合の#54(左)と#62(右)の時空間パターン. セル数は100, ステップ数は100

Fig. 4 Space-time patterns of elementary cellular automata #54 (left) and #62 (right) of 100 cells for 100 time steps from a random initial configuration.

を表している. このパワースペクトルでは $\beta = -1.3$ となり, 低周波域ではパワー $S(f)$ が周波数 f に反比例していることが分かる. このようなパワースペクトルを示すゆらぎを $1/f$ ゆらぎとよぶ. $1/f$ ゆらぎは真空管電圧や宇宙線強度など幅広い分野において観測されているが, いまだにその発生のメカニズムは明らかにされていない⁵⁾. $1/f$ ゆらぎにおいては, 低周波域になるほど高いパワーを持つことから, 時間的変動において, きわめて長期にわたる相関があることを示している. 独立な88種類のECAについて調べたところ, #110以外に $1/f$ ゆらぎに近いパワースペクトルを示すものとして#54と#62が見つかった. その時空間パターンを図4に, パワースペクトルを図3(中)(下)にそれぞれ示す.

$1/f$ ゆらぎにおいて最も重要な問題は, どのくらいの時間にわたってパワーがべき乗則に従うのかという点である. そこで, これら3つのルールについてセル数 N を100ごとに100~1200, ステップ数 T を1000ごとに1000~6000と変化させ, それぞれの場合に400通りのランダム初期様相を用いて, 周波数 $f = 1 \sim 10$ におけるパワースペクトルの傾き β の平均値 $\langle \beta \rangle$ を求めた(図5). 図5(上)から, $N = 100$, $T = 5000$ および $N = 100$, $T = 6000$ と $N = 300$, $T = 6000$ の場合を除けば, #110の $\langle \beta \rangle$ は#54のそれよりも小さな値となっており, 特にセル数が大きくなるとその差は顕著になる. セル数が少ない場合は初期様相に強く依存した特異な状態遷移をする可能性が高いため, このような結果になったと考えられる. さらに図5(下)では, すべての場合において#110の $\langle \beta \rangle$ は#62のそれよりも小さな値となっている. 以上のことからセル数が少ない場合 ($N \leq 300$) を除けば, セル数を固定した場合, #110が最も長期にわたり $1/f$ ゆらぎとすることが分かる.

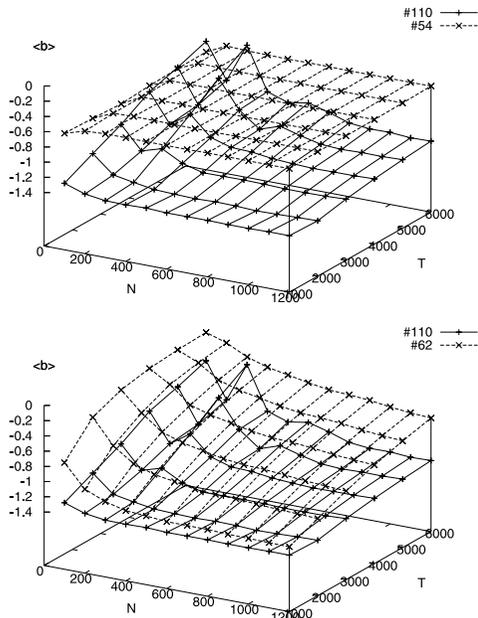


図5 セル数 N とステップ数 T を変化させた場合の、周波数 $f = 1 \sim 10$ におけるパワースペクトルの傾き β の 400 通りの初期様相にわたる平均値 $\langle \beta \rangle$. 上: #110 (実線) と #54 (点線) の比較, 下: #110 (実線) と #62 (点線) の比較

Fig. 5 Average of β in power spectra from 400 random initial configurations as a function of array size N and the observed time step T . Top: #110 (solid line) and #54 (dotted line). Bottom: #110 (solid line) and #62 (dotted line).

4. 考 察

従来から, ECA において #110 と #54 は計算万能性を持つと予想されており⁴⁾, #110 については計算万能性が証明された⁶⁾. また, ライフゲームとよばれる 2次元の CA が $1/f$ ゆらぎを示すことが知られている⁷⁾. ライフゲームでは, グライダーとよばれる伝播するパターンを用いてセル平面上に計算機を構成することができる⁸⁾と予想されている. すなわちライフゲームは計算万能性を備えた CA であるといえる. 以上の結果から CA において $1/f$ ゆらぎと計算万能性との間には何らかの関連性があるのではないかと予想される. このことは, CA において, $1/f$ ゆらぎをもたらすようなダイナミクスと計算万能性に必要なそれは等価であることを示唆している.

5. おわりに

本研究ではランダム初期様相から出発した ECA の

セルの時系列データに対してスペクトル解析を行うことにより, #110 が最も長期にわたって $1/f$ ゆらぎを示すことを明らかにした. いっぽう, #110 は計算万能性を有することから, CA における $1/f$ ゆらぎと計算万能性との間には何らかの関連が存在する可能性がある. 今後はより広い種類の CA について, この仮説を検証する必要がある.

参 考 文 献

- 1) Li, W.: Power spectra of regular languages and cellular automata, *Complex Systems*, Vol.1, pp.107-130 (1987).
- 2) Li, W. and Packard, N.: The structure of the elementary cellular automata rule space, *Complex Systems*, Vol.4, pp.281-297 (1990).
- 3) 蛭川 繁, 広瀬貞樹, 長谷博行, 米田政明: スペクトル解析による 1次元セルオートマトンの分類, 電子情報通信学会論文誌 D-1, Vol.80, No.11, pp.856-865 (1997).
- 4) Wolfram, S.: Universality and complexity in cellular automata, *Physica D*, Vol.10, pp.1-35 (1984).
- 5) 武者利光: $1/f$ ゆらぎ, 応用物理, Vol.46, No.12, pp.1144-1155 (1977).
- 6) Cook, M.: Universality in elementary cellular automata, *Complex Systems*, Vol.15, pp.1-40 (2004).
- 7) Ninagawa, S., Yoneda, M. and Hirose, S.: $1/f$ fluctuation in the game of life, *Physica D*, Vol.118, pp.49-52 (1998).
- 8) Berlekamp, E.R., Conway, J.H. and Guy, R.K.: *Winning ways for your mathematical plays*, 2nd ed., A.K. Peters (2001).

(平成 18 年 4 月 18 日受付)

(平成 18 年 7 月 4 日採録)



蛭川 繁 (正会員)

昭和 39 年生. 昭和 63 年富山大学大学院理学研究科修士課程修了. 民間企業を経て, 平成 10 年富山大学大学院工学研究科博士後期課程を修了. 博士 (工学). 同年明星大学情報学部助手. 平成 11 年より金沢工業大学講師. 平成 14 年より同助教授. 複雑系, 人工生命の研究に従事. 電子情報通信学会, 人工知能学会, 計測自動制御学会各会員.