Vol.2014-SLDM-166 No.12
2014/5/29

圏論を用いた同期回路 - ステートマシン対応の一般化

西村 俊二[1,a)]　尼崎 太樹[1,b)]　末吉 敏則[1,c)]

概要：本稿では，圏論を用いて回路の表現及びその振るまい評価を可能とする新たなモデルを構築する．このモデルの下に，同期素子のクラス *GLatch* を新たに定義し，任意の *GLatch* 同期回路に対して同じ振るまいを持つステートマシンを対応付られることを示す．この対応付けは，任意の D-FF 同期回路に対して同等の振るまいを持つステートマシンを自然に対応付けられる事実の一般化となっている．特に，*GLatch* は D-ラッチも含んでいるため，D-ラッチ同期回路とステートマシンの同一視といった新たな知見も明らかにしている．

Generalized Correspondence of Synchronous Circuit and State Machine using Category Theory

Shunji Nishimura[1,a)]　Motoki Amagasaki[1,b)]　Toshinori Sueyoshi[1,c)]

Abstract: In this paper, we propose a new model that describes circuit and its behavior with adopting category theory. On the model, we define a new class of synchronous elements *GLatch*, and show that for any *GLatch* synchrounous circuit, there is a state machine that behaves similarly to the circuit. This novel correspondence is generalized one that for any D-FF synchrounous circuit, there is a state machine that behaves similarly to the circuit. The correspondence provides one can see a D-Latch synchronous circuit as a state machine in particular.

1. はじめに

圏論 [1] は，抽象度の高い数学的構造を表せることから，計算機科学のいくつかの分野で導入され，成功を収めている．圏論の導入により得られる利点がソフトウェアの分野に限定される必然性は存在せず，ハードウェアの分野でも活用できる可能性が十分にある．本稿では，圏論を用いて回路の表現及びその振るまい評価を可能とする新たなモデルを構築する．このモデルの振るまい評価は遅延ゼロの論理レベル・シミュレーション（ただし，特定の遅延モデルを仮定した場合のシミュレーション）に相当する．また，このモデルではステートマシンの表現及びその振るまい評価も可能である．本稿ではさらに，このモデルの下で新たな知見が定理として得られることを示す．

ステートマシンを圏論を用いて表現することは古くから行われてきた [2]．また，最近ではソフトウェア分野で同期プログラミング言語について抽象マシンで論じた文献 [3] があるが，同期回路に特化した結果は無かった．

本稿の構成は以下の通りである．まず，第 2 節でモデルの構築として，時間や信号などの関連概念の抽象化と，その上での動作を計算する評価オペレータの定義を行う．第 3 節で D-ラッチと D-FF を一般化した *GLatch* というクラスと時間構造の加工について定義し，それらを用いて主定理である *GLatch* 同期回路とステートマシンの対応を示す．最後に，第 4 節で結論として本稿のまとめと今後の課題を述べる．

2. 圏論を用いた回路モデル

2.1 圏による関連概念の表現

まず，本稿で用いる圏論の基本概念の定義を行う．

[1] 熊本大学大学院自然科学研究科
〒 860–8555 熊本県熊本市中央区黒髪 2–39–1
Graduate School of Science and Technology, Kumamoto University,
2–39–1, Kurokami, Chuo-ku Kumamoto 860–8555 Japan
[a)] nishimura@arch.cs.kumamoto-u.ac.jp
[b)] amagasaki@cs.kumamoto-u.ac.jp
[c)] sueyoshi@cs.kumamoto-u.ac.jp

定義 1　（圏）

対象の集合と射の集合 *1 があり，射の集合から対象の集合への二つの写像 $dom,\ cod$ があるとする．射 f に対して対象 $dom\ f$ を f のドメイン，対象 $cod\ f$ を f のコドメインと呼ぶ．$dom\ f = a,\ cod\ f = b$ のとき，

$$f : a \to b \quad \text{もしくは} \quad a \xrightarrow{f} b$$

と表す．さらに，各対象 a に恒等射と呼ばれる $id_a : a \to a$ と，$cod\ f = dom\ g$ のとき合成射と呼ばれる射 $g \circ f : dom\ f \to cod\ g$ が定まり，以下を満たすとする．

$$id_a \circ f = f, \quad f \circ id_a = f$$
$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

このとき，これらの集合・写像をあわせて圏という．

定義 2　（関手）

圏 A, B について，A の対象を B の対象に移す写像と，A の射を B の射に移す写像があり，そのどちらともを F と表したとき，以下を満たすとする．

$$F(id_a) = id_{F(a)}, \quad F(g \circ f) = Fg \circ Ff$$

（ただし，後者は合成が定義できるときのみの条件とする．）このとき，これらの写像をあわせて関手（[1] での表記は“函手”）という．

次に，回路モデルの構築に必要となる時間と信号の概念について，以下のように考える．圏 T について，対象を時刻とみなし，射を時間の遷移とみなすことにより T が時間を表すと考える．一般的な離散時間のモデルとされる整数や自然数は，この定義でもやはり時間として扱うことができる．また，圏 A について，対象を個々の信号値とみなし，射を信号値の遷移とみなすことにより A が信号を表すと考える．一般的な信号のモデルとされるブール代数は，この定義でもやはり信号として扱うことができる．

さらに，テストパターンやシミュレーションパターンに相当する定義が必要となるが，その準備として，時間 T における複数本の射の出入りについて解釈を明らかにしておく．図 1(a) のように，二本の射 u, v がドメイン t を共有し

(a)　(b)

図 1　ケースの分岐と合流

ている場合，u, v は非決定性の遷移を表す．つまり，t から t_0 へ移行する場合と t から t_1 へ移行する場合の両方の可能性があることを表す．より具体的な見方をすれば，評価において時刻 t の後に起こり得る二つのケースへの分岐を表すのである．これに対して，図 1(b) のように二本の射 u, v がコドメイン t を共有している場合，u, v は二つのケースが時刻 t で合流し，t 以降の時間の遷移を共にすることを表すものとする．これらの解釈の下では，時刻 t_0, t_1, t_2 の順に遷移することを，次の時刻と遷移：

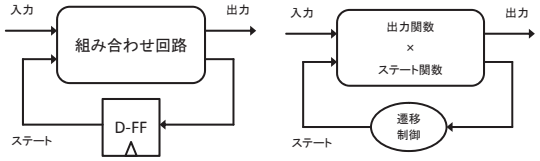
$$t_0 \xrightarrow{u_0} t_1 \xrightarrow{u_1} t_2$$

で表すことができなくなる．なぜなら，時間として圏を仮定する以上，上記で明記されている射の他に，必ず u_0, u_1 の合成射 $u_1 \circ u_0$（t_0 から t_2 への遷移）が存在するからある．u_1 と $u_1 \circ u_0$ はコドメイン t_2 を共有するため，時刻 t_2 においては u_1 と $u_1 \circ u_0$（t_1 を通らないケース）の二つのケースの合流を表すこととなるからである．この問題を踏まえて，次のように定義する．評価パターンは，時間 T から信号 A への関手 a と，T の射の部分集合 τ の組とする．以降，τ を“T の構造”あるいは“時間構造”と呼ぶ．時間構造により，評価パターンを用いて評価を行う際の時間遷移を定める．すなわち，評価において時間遷移 u が考慮されるのは，$u \in \tau$ の場合とするのである．圏論において，Quiver[4] から生成された圏を考えることができる（[1]，ただし Quiver は“有向グラフ”と表記されている）．τ を Quiver（の射の集合），T を τ から生成された圏とすると，τ は T に対する時間構造の例となっている．

最後に回路関手を定義する．本稿で扱う回路関手 f は，図 2(a) の組合わせ回路に相当するものであり，関手：

$$f : A \times S \to B \times S$$

と定義する．A は入力信号，B は出力信号，S はステート



(a)　(b)

図 2　D-FF 同期回路とステートマシンのモデル

信号である．以降，f の出力関手を f^*，ステート関手を f_* で表す．すなわち，

$$f^* \ : \ A \times S \to B$$
$$f_* \ : \ A \times S \to S$$

である．

2.2　評価オペレータの定義

本項では回路関手に対して評価パターンを与えた結果を返す評価オペレータを定義する．まず準備として，前項の図 1(b) で挙げたような，二つのケースが合流する時間遷移があった場合に回路が持つべきステート信号について考える．図 1(b) の t_0 でステート s_0 を持ち，t_1 でステート s_1 を持つとする．その場合，t でのステートは s_0 から u の

*1　本稿で定義する圏は [1] における“小さい圏”に相当する

遷移を経た後のステート，及び，s_1 から v の遷移を経た後のステートの両方を反映したものでなければならない．本稿では与えられたステート信号 S の代わりにその冪集合 $P(S)$ を使うことでこの要請に応える．すなわち，$P(S)$ の要素である S の部分集合は，回路が取り得るステート信号のすべてを表すと考える．圏 S の構造を継承して $P(S)$ に圏の構造を導入することができる．以降，S に対してこのような拡張を行った圏を S^+ と表す．ステートを入力とする関手についても同様の拡張を行う必要がある．次の関手

$$g : X \times S \to Y$$

に対して，拡張した関手 g^+ を

$$g^+ : X \times S^+ \to Y^+$$
$$g^+(x, ss) :=$$
$$\begin{cases} ss \neq \phi \Rightarrow \{\, g(x,s) \mid s \in ss \,\} \\ ss = \phi \Rightarrow \\ \quad \begin{cases} \forall s_0, s_1 \in S \,.\, g(x,s_0) = g(x,s_1) \\ \qquad\qquad \Rightarrow \{\, g(x,s_0) \,\} \\ \text{others} \qquad\qquad \Rightarrow \phi \end{cases} \end{cases}$$

と定める．特に，入力のステートが ϕ であっても $\forall s_0, s_1 \in S \,.\, g(x,s_0) = g(x,s_1)$ の場合には値を与える点に注意されたい．以降，ステート S と拡張された S^+，ステートを入力に持つ関手 g と拡張された g^+ をそれぞれ同一視する．

また，後で述べる主定理のために，我々が対象とする回路を関手に限らず，より広いものに拡張しておく．圏 A, S, B について，A, S, B を対象の集合とみなしたときの次の形の写像

$$f : A \times S \to B \times S$$

を回路写像と呼ぶこととする．

定義 3　（評価オペレータ $\triangleright$）
以下の信号 a と回路写像 f

$$a \;:\; T \to A$$
$$f \;:\; A \times S \to B \times S$$

及び T の構造 τ が与えられたとき，

$$\Gamma \;:\; (T \to S) \to (T \to S)$$
$$\Gamma(\sigma)(t) :=$$
$$\begin{cases} \exists\, t \to t \in \tau \\ \quad \Rightarrow \lim_{i\to\infty} (\lambda s.f_*(a(t),\, s))^i \quad \left(\bigcup_{\substack{t' \to t \in \tau \\ t' \neq t}} f_*(a(t'),\, \sigma(t')) \right) \\ \neg\exists\, t \to t \in \tau \\ \quad \Rightarrow \bigcup_{\substack{t' \to t \in \tau \\ t' \neq t}} f_*(a(t'),\, \sigma(t')) \end{cases}$$
$$\Delta\phi \;:\; T \to S$$
$$\Delta\phi(t) := \phi$$

として（ただし，lim が存在しない場合は Γ が定義できないものとする），

$$f^\tau_{a*} := \lim_{j\to\infty} \Gamma^j(\Delta\phi)$$

が存在する場合，評価オペレータを次の通りに定義する．

$$a \overset{\tau}{\triangleright} f \;:\; T \to B$$
$$(a \overset{\tau}{\triangleright} f)(t) := f^*(a(t),\, f^\tau_{a*}(t))$$

上の定義中の極限 (lim) は対象の集合について離散距離構造を考えた場合の極限を表し，

$$\lim_{i\to\infty} x_i = x \;\Leftrightarrow\; \exists j \,.\, \forall k \,.\, (\, j < k \Rightarrow x_k = x \,)$$

の意味で使っている．以降，定義 3 による極限が存在し計算結果が定まることを“評価結果が収束する”，また，計算結果のことを“評価結果”と表す．我々が特に興味を持つのは，評価結果 $a \overset{\tau}{\triangleright} f$ が関手となっている場合である．定義 3 の f を回路関手と仮定すると，収束すれば評価結果は関手となる．

2.3　評価オペレータの性質

本項では，前項で定義した評価オペレータについて，まず妥当性の議論を行い，その後重要な性質を定理として示す．

- $t_0 \to t_1$
  単純な $t_0 \to t_1$ という時間構造を τ とした場合，
  $$f^\tau_{a*}(t_1) = f_*(a(t_1),\, f^\tau_{a*}(t_0))$$
  が成り立ち，f^τ_{a*} が一般的なステートの遷移を表していることが分かる．よって，定義 3 の評価結果は，整数や自然数を離散時間とみなした場合のステートマシンの振るまいと合致する．
- ステートマシンの初期状態
  一般のステートマシンでは与えられた初期状態から遷移が始まるが，定義 3 の評価オペレータに初期状態の概念は無い．ただし，回路写像にリセット信号を一本追加し，これがアクティブとなったときに次のステートが定めた状態とする変更が考えられる．このことから，本稿では初期状態を持つか否かを本質的な問題と考えない．
- ケースの合流
  図 1(b) のようにケースの合流がある場合，
  $$f^\tau_{a*}(t) = f_*(a(t),\, f^\tau_{a*}(t_0)) \cup f_*(a(t),\, f^\tau_{a*}(t_1))$$
  が成り立ち，合流前の両方のステートを包含している点で“ケースの合流”という考え方に合致している．
- シミュレーションとの関係
  遅延を考慮しない論理レベル・シミュレーションは，各時刻において，信号値が収束するまで計算を行う手続きと言える．これを踏まえ，与えられた時間構造 τ に対して，τ に現れるすべての対象に id を追加したも

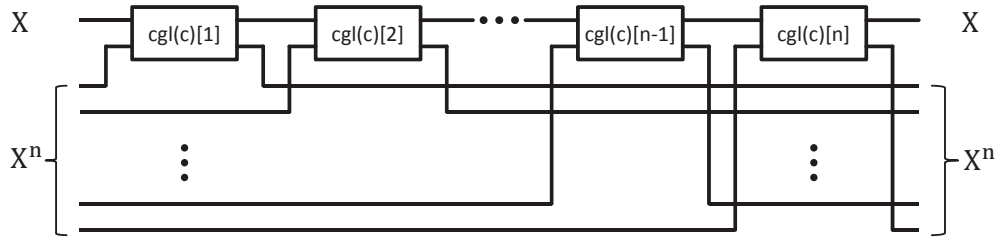


図 3　$\rho(c)$ の定義

のを新たに $\dot{\tau}$ と定める．ユーザ（環境側）にとっての時間構造が τ であるのに対して，回路が従う時間構造は加工後の $\dot{\tau}$ の方だという見方をする．この $\overset{\dot{\tau}}{\triangleright}$ による評価は，ある遅延モデルを仮定して振るまいの評価を行った結果と等しくなる．該当する遅延モデルは，イデアル遅延（[5] の用語で Ideal Delay）のフィードバック遅延モデル（同じく，Feedback-Delay Model）である．

まとめると，定義 3 の評価オペレータは，ステートマシンの振るまい評価と（特定の遅延モデルの）論理レベル・シミュレーションの両方を包括する性質を持つものと言える．

この後の定理のために，時間 T の時刻 t への経路 $Path(t)$ を次で定義する．

$$Path(t) := \{\, p : \mathbf{n} \to T \mid p(0) = t, \forall i.\, p(i+1) \neq p(i), n \in \mathbb{N} \,\}$$

（$\mathbb{N}$ は自然数，$\mathbf{n}$ は $\{0 \leftarrow \cdots \leftarrow n\}$ なる圏）

定理 1

評価結果 $a \overset{\tau}{\triangleright} f$ が収束するとき，次が成り立つ．

$$(a \overset{\tau}{\triangleright} f)(t) \quad = \bigcup_{p \in Path(t)} (a \overset{p}{\triangleright} f)(t) \qquad (1)$$

証明　まず，記号の省略のために次を定義する．

$$acc(t) := \begin{cases} \exists\ t \to t \in \tau \ \Rightarrow \lim_{i \to \infty} (\lambda s.f_*(a(t),\ s))^i \\ \neg\exists\, t \to t \in \tau \ \Rightarrow id \quad \text{（恒等写像）} \end{cases}$$

定義 3 の Γ について，

$$\Gamma^1(\Delta\phi)(t_0) = acc(t_0)\left(\bigcup_{\substack{t_1 \to t_0 \\ t_1 \neq t_0}} f_*(a(t_1), \phi)\right)$$

$$\vdots$$

$$\Gamma^k(\Delta\phi)(t_0) = acc(t_0)\left(\bigcup_{\substack{t_1 \to t_0 \\ t_1 \neq t_0}} f_*(a(t_1), \cdots acc(t_k)\left(\bigcup_{\substack{t_k \to t_{k-1} \\ t_k \neq t_{k-1}}} f_*(a(t_k), \phi)\right)\cdots\right)$$

であるので，Γ が k で収束するならば，

$$\begin{aligned} & f^{\tau}_{a*}(t_0) \\ &= \Gamma^k(\Delta\phi)(t_0) \\ &= \bigcup_{\substack{t_k \to \cdots \to t_0 \\ t_k \neq \cdots \neq t_0}} (acc(t_0) \circ f_*(a(t_1)) \circ \cdots \circ acc(t_k) \circ f_*(a(t_k)))\ \cdot\ \phi \end{aligned}$$

一方，(1) の左辺について $p \in Path(t)$ を取ると，

$$\begin{aligned} & f^{p}_{a*}(p(0)) \\ &= (acc(p(0)) \circ f_*(a(p(1)))) \cdot f^{p}_{a*}(p(1)) \\ &= (acc(p(0)) \circ f_*(a(p(1))) \circ \cdots \circ acc(p(k)) \circ f_*(a(p(k))))\ \cdot\ \phi \end{aligned}$$

であり，(1) が成り立つ．□

3. 回路-ステートマシン対応の一般化

3.1 GLatch の定義

本項では D-ラッチと D-FF を一般化した $GLatch$ というクラスを定義する．その準備として，まず関手 $TAKE$ と $KEEP$ を次のように定義する．任意の圏 X に対し，

$$\begin{aligned} TAKE, KEEP \quad &: \quad X \times X \to X \times X \\ TAKE\ (a,b) \quad &:= \quad (a,a) \\ KEEP\ (a,b) \quad &:= \quad (b,b) \end{aligned}$$

とする．さらに，新たな圏 GL を次の通りに定義する．GL の対象は上で定めた二つの関手

$$\{\, TAKE\ ,\ KEEP \,\}$$

とし，射の集合は恒等射 id に加えてそれぞれの対象から互いに向けたものがある ($TAKE \rightleftarrows KEEP$) とする．

定義 4　(GLatch)

n を自然数，C を信号，cgl を関手

$$cgl : C \to GL^n$$

とするとき，$\rho \in GLatch(C,n)$ は次の型

$$\rho : C \times X \times X^n \to X \times X^n$$

を持つ写像であり，その実体を図 3 で定義する．（$ck(c)_{[i]}$ は GL^n の要素 $ck(c)$ の第 i 要素 $\in GL$ を表す．）かつ，このように構成されるもののみが $GLatch$ の要素とする．

3.2 GLatch の性質

前項で定義した $GLatch$ について詳しく見ていく．

定理 2

$\rho \in GLatch(C,n)$，時間構造 τ から生成された時間 T，関手 $ck : T \to C$，関手 $x : T \to X$（任意の圏）について，評価結果 $ck \times x \overset{\tau}{\triangleright} \rho$ が収束すれば関手となる．

証明　$(t_0 \to t_1) \in \tau$ で，

$$xs_0 := (ck \times x \overset{\tau}{\triangleright} \rho)(t_0)$$
$$xs_1 := (ck \times x \overset{\tau}{\triangleright} \rho)(t_1)$$

とすると，定理 1 より次を満たす $p \in Path(t_1)$ が存在する．

$$(ck \times x \overset{p}{\triangleright} \rho)(t_1) \in xs_1$$

左辺を y_1 とおく．次に，p の下での時刻 t_0 の評価結果

$$(ck \times x \overset{p}{\triangleright} \rho)(t_0)$$

を考えると，再び定理 1 よりこれは τ の下での時刻 t_0 の評価結果に含まれる．すなわち，

$$(ck \times x \overset{p}{\triangleright} \rho)(t_0) \in xs_0$$

であり，この左辺を y_0 とおく．$GLatch$ の定義から，評価結果として出力された値は，必ず過去のある時刻で $TAKE$ により取り込まれたものである．よって，y_0, y_1 に対して，$t_0, t_1 \in p$ で，

$$x(t_0) = y_0\ ,\ x(t_1) = y_1$$

となる時刻 t_1, t_0 が存在する．一方，$GLatch$ のステート信号 $X_1 \times \cdots \times X_n$ の内部では，取り込まれた時刻の逆転は起こり得ない．よって，p の一部として $t_0 \to \cdots \to t_1$ なる経路が存在する．この経路に対応する評価結果 $y_0 \to \cdots \to y_1$ の射をすべて合成したものが求める射である．□

次に，定義 4 で使われた GL の要素が $TAKE, KEEP$ の二つであることの妥当性を考える．$TAKE, KEEP$ と同じ

$$X \times X \to X \times X$$

という型を持つ一般的な写像は，これらの他に以下の二つが挙げられる．

$$IDEN\,(a,b) := (a,b)$$
$$SWAP\,(a,b) := (b,a)$$

$IDEN$ はステート信号（以前に取り込まれた信号）は保持し，入力信号（現在の信号）はそのまま次へ出力する．このため，評価においてステート信号 $X_1 \times \cdots \times X_n$ 内部で取り込まれた時刻の逆転が起こり得る．よって，GL に $IDEN$ を含んだ場合，定理 2 は成り立たない．もう一方の $SWAP$ は，フィードバック・ループをあわせて考えると $TAKE$ と似ている．ただし，出力信号が変化するタイミングに注目すると，$TAKE$ に対して $SWAP$ が一遷移分遅れるという差異がある．ここで，$GLatch$ は D-ラッチや D-FF を一般化した概念であったことから，評価する際の時間構造はドット付き ($\dot{\tau}$) のものを想定している．ドット付きの時間構造と共に評価されるとすれば，$TAKE$ と $SWAP$ に差異は無い．これらの理由から，本稿では $IDEN$ 及び $SWAP$ を GL に含めていない．

次で定めた cgl に対応する $\rho \in GLatch(Bool, 1)$ は 0 イネーブルの D-ラッチとなる．

$$cgl : Bool \to GL$$
$$cgl(0) := TAKE$$
$$cgl(1) := KEEP$$

同様に 1 イネーブルの D-ラッチも構成することができる．0 イネーブルの D-ラッチと 1 イネーブルの D-ラッチを直列接続すると D-FF となる．複数の D-FF を直列接続したものも $GLatch$ に含まれる．

3.3 時間構造の加工

定義 5 ($\tau_{\rho_{ck}}$)
時間構造 τ から生成された時間 T, クロック $ck : T \to C$, $n \in \mathbb{N}$, $\rho \in GLatch(C, n)$ に対して，T の新たな構造 $\tau_{\rho_{ck}}$ を次で定義する．

$$\tau_{\rho_{ck}} := \{\, (ck \times id_T \overset{\tau}{\triangleright} \rho)(t) \to t \mid t \in T \,\}$$

$\tau_{\rho_{ck}}$ は $ck \times id_T \overset{\tau}{\triangleright} \rho$ が収束するときのみ定義可能である．また，$(ck \times id_T \overset{\tau}{\triangleright} \rho)(t) \to t$ が T の射になることが，次のように示される．定理 2 の証明と同様に，

$$(ck \times id_T \overset{p}{\triangleright} \rho)(t) \in (ck \times id_T \overset{\tau}{\triangleright} \rho)(t)$$

となる $p \in Path(t)$ が存在する．その経路 p が時刻 $(ck \times id_T \overset{p}{\triangleright} \rho)(t)$ を通るべきことから，T の射となることがいえる．

単純な τ といくつかの ρ について，τ から $\tau_{\rho_{ck}}$ を生成した例を図 4 に示す．

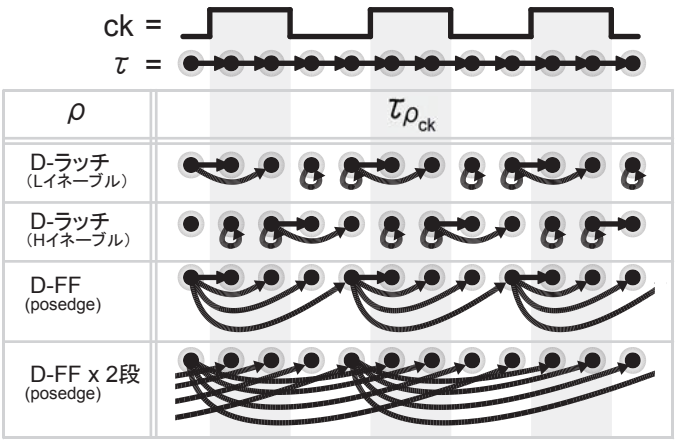


図 4 さまざまな $\tau_{\rho_{ck}}$ の例

3.4 真の GLatch 同期回路

本項では，後に述べる主定理で必要とする“真の同期動作”の定義を行う．我々は純粋に ρ のみで同期される回路に興味があり，ρ 以外による隠れた順序回路の存在を避けなければならない．例えば図 5 のように ρ が $TAKE$ の状態で他の信号に同期して動作するような回路は排除しなければならない．

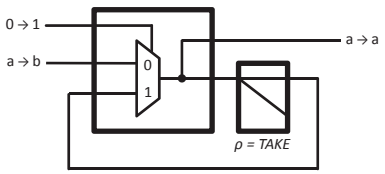


図 5 ρ 以外による順序回路動作の例

これ以降，

$$f \ggg g := g \circ f$$

で定める $\ggg$ という記号を使う．記号については Arrow[6] を参考にしている．

定義 6　（真の $GLatch$ 同期動作）

回路写像 $f : A \times S \to B \times S$，$\rho \in GLatch(C, n)$，クロック $ck : T \to C$，評価パターン $a : T \to A$ について，$\rho^*(c(t)\,, x\,, x_1, \cdots, x_n) = x$ （すなわち，ρ を構成するすべての GL 要素が $TAKE$）となる t について，

$$\forall s_0, s_1 \in S\,.\, f(a(t), s_0) = f(a(t), s_1)$$

であるとき，f を ρ で同期化した回路写像

$$f_\rho := f \times id_{S^n} \ggg id_B \times \rho$$

は ck, a の下で真の $GLatch$ 同期動作をする，という．

ρ を D-FF とすると，与えるクロックに係わらず ρ がすべて $TAKE$ で構成されることがないため，常に真の ρ 同期動作をするといえる．次の定理は，真の同期動作を仮定すれば，我々の定義した評価結果が論理レベル・シミュレーションの結果に相当することを示している．

定理 3

定義 6 と同じ記号を用いて，f_ρ が真の $GLatch$ 同期動作をすると仮定する．このとき，評価結果 $ck \times a \overset{\dot{\tau}}{\triangleright} f_\rho$ は，イデアル遅延を仮定しないフィードバック遅延モデルの振るまい評価結果に等しい．

証明　ρ を構成するすべての GL が $TAKE$ の場合は，仮定から f の値はステート信号に依存しない．よって，フィードバック・ループが持つ遅延値は評価結果に影響を与えない．ρ の構成要素中に $KEEP$ が存在するならば，ある時刻での f_* の変化は $f_{\rho*}$ に伝搬しない．よって，

$$\lim_{i \to \infty} (\lambda s.f_{\rho*}(a(t),\, s))^i \cdot \sigma = f_{\rho*}(a(t),\, \sigma)$$

となり，フィードバック・ループを通った後に信号値の競合が発生するか否かは評価結果に影響を与えない．□

3.5　主定理

図 2 の (a) で表される任意の D-FF 同期回路に対して，あるステートマシン (b) が存在して，これらが同等の振るまいを持つ．この良く知られた事実の一般化である次の定理が成り立つ．

定理 4　（主定理）

時間 T とその構造 τ，回路関手 $f : A \times S \to B \times S$，$\rho \in GLatch(C, n)$，クロック $ck : T \to C$，評価パターン $a : T \to A$ が与えられたとする．

このとき，$ck \times id_T \overset{\tau}{\triangleright} \rho$，$a \overset{\tau_{\rho_{ck}}}{\triangleright} f$ がともに収束し，かつ，f を ρ で同期化した回路写像

$$f_\rho := f \times id_{S^n} \ggg id_B \times \rho$$

が ck, a の下で真の同期動作をするならば，次の等式が成り立ち，両辺とも関手となる．

$$ck \times a \overset{\dot{\tau}}{\triangleright} f_\rho \;=\; a \overset{\tau_{\rho_{ck}}}{\triangleright} f \qquad (2)$$

証明の概要　$\dot{\tau}$ に属し，t へ向かう経路の集合に対して，その要素 p, p' に，

$$f_{\rho\, \dot{ck \times a*}}^{\dot{p}}(t) = f_{\rho\, \dot{ck \times a*}}^{\dot{p'}}(t) \;\Rightarrow\; p \sim p'$$

なる同値関係で構成した商集合を $PATH_{f_\rho}(t)$ とする．同様に，$\tau_{\rho_{ck}}$ に属し，t へ向かう経路の集合に対して，その要素 q, q' に，

$$f_{a*}^{q}(t) = f_{a*}^{q'}(t) \;\Rightarrow\; q \sim q'$$

なる同値関係で構成した商集合を $Path_f(t)$ とする．これら $PATH_{f_\rho}$ と $Path_f$ の間には一対一の関係があることが示せる．そのこと及び定理 1 より (2) が証明できる．□

定理 3 から，(2) の左辺は論理レベル・シミュレーション結果に相当する．一方，(2) の右辺は f をステートマシンとみなした場合の振るまいを表している．すなわち，定理 4 は $GLatch$ 同期回路 f_ρ に対して f が同じ振るまいを持つステートマシンであることを示している．

4.　まとめと今後の課題

本稿では，圏論を用いて回路の表現及びその振るまい評価を可能とする新たなモデルを提示した．さらに，このモデルの下で得られる事実として定理 4（主定理）を示した．特に，ρ を D-ラッチとすると，D-ラッチ同期回路と同じ振るまいを持つステートマシンの存在を示しており，これは新たな知見である．すなわち，圏論を導入したモデルを使うことにより，新たな知見を得ることができた．

今後の課題として以下が挙げられる．本稿では主定理の工学的な利点を示していない．その可能性としては，$GLatch$ 同期回路（例えば D-ラッチ同期回路）のサイクルベース・シミュレーションへの応用が考えられる．一方，本稿で構築したモデルにはプログラム意味論の分野における操作的意味論との相似が見られる．この点を追究して“論理回路の意味論”を展開できれば，ハードウェア基礎理論の分野に貢献できる可能性がある．

参考文献

[1] マックレーン S：圏論の基礎，シュプリンガーフェアラーク東京 (2005).
[2] Ehrig, H.: *Universal theory of automata*, Adler's Foreign Books, Incorporated (1976).
[3] Bagnol, M., Adrien, G. et al.: Synchronous Machines: a Traced Category (2012).
[4] Derksen, H. and Weyman, J.: Quiver representations, *Notices of the AMS*, Vol. 52, No. 2, pp. 200–206 (2005).
[5] Brzozowski, J. A. and Seger, C.-J. H.: *Asynchronous circuits*, Springer (1995).
[6] Hughes, J.: Programming with arrows, *Advanced Functional Programming*, Springer, pp. 73–129 (2005).