

2人対称ゲームにおけるジレンマ性と弱支配戦略の存在可否性との関連について

谷 本 潤[†] 相 良 博 喜^{††}

ジレンマゲームにおけるジレンマ性を「パレート公平戦略が戦略分布上、つねに増加するダイナミクスを持ちえない」と定義すると、この条件はゲーム動力学とは無関係にゲーム構造だけから決まる静的影響部分と動力学により決まる動的影響部分との積和の正負性と等価であることがレプリケータダイナミクスから示される。2x2 ゲームでは、このジレンマ性の有無は静的影響だけで決まり、ジレンマ性の存在有無はゲーム動力学上の戦略分布とは無関係である。このことは、2x2 ゲームではパレート公平戦略が他戦略を弱支配できないとジレンマが生起することを意味する。しかし、3 戦略以上のゲームについては、パレート公平戦略が他戦略を弱支配できないからといってつねにジレンマが発生するわけではない。

A Study on the Relation between Dilemma Occurrence and Existence of Weakly Dominant Strategy in a 2-Players Symmetric Game

JUN TANIMOTO[†] and HIROKI SAGARA^{††}

Defining the dilemma game by the proposition, a game cannot sustain the Pareto Equal strategy increasing in its strategy distribution, we deduced that the dilemma substance can be expressed by a productive summation of the static factor and the dynamic factor independently. The static factor means an influence of the game structure on a possible dilemma, which relates to a game structural discrepancy from the situation that the Pareto Equal strategy can be weakly dominant over other strategies. While, the dynamic factor implies an influence of the strategy distribution in the way of game dynamics on the dilemma. In 2x2 game, dilemma existence can be determined only by the static factor, which means if the dilemma occurs or not relates to only the game structural effect but the dynamics. Whereas, in the more-than-three-strategies game, both the static and dynamic factors determine the dilemma existence, but the static factor can not solely explain.

1. 緒 言

ジレンマゲームは、情報科学にとどまらず、経済学、社会科学など応用範囲の広い数理学上の問題である。ジレンマゲームにおけるジレンマ性は何に起因して発生するのだろうか？

本研究では、主として演繹的考察により、ジレンマゲームにおけるジレンマ性が、パレート公平戦略（後述）の弱支配戦略性と関係付けられるゲーム構造そのものに依拠して決まる影響と、ゲームの進行上そのときどきの戦略分布で決まるゲーム動力学の影響とによ

り、一般的に記述されることを示す（本論では、前者の影響を静的、後者を動的と呼ぶことにする）。すなわち、ジレンマの有無を含むジレンマの強弱を、ゲームの進行時点を特定することなく（ゲーム動力学を考えることなく）、ゲーム構造による静的影響だけから議論することはできないことを示す。ただし、2 戦略ゲーム、いわゆる、2x2 ゲームでは、前者の静的影響だけでジレンマ性の有無が決まることが導かれる。

本研究で取り扱うゲームは 2 人対称の構造を有し、離散的に与えられる戦略数が N_{st} である進化ゲームである。また、ゲームの動力学は単一集団に対するレプリケータダイナミクスによるものとする。

$N_{st} = 2$ は、いわゆる、2x2 ゲームであり、これについては囚人ジレンマ（Prisoners Dilemma, 以下、PD）やチキン（以下、Chicken）、鹿狩り（以下、Stag Hunt, SH）、リーダー（以下、Leader）、ヒーロー（以下、Hero）など、いくつかの典型的ジレンマゲームが

[†] 九州大学大学院総合理工学研究院

Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

^{††} 九州大学大学院総合理工学府環境エネルギー工学専攻

Department of Energy and Environmental Engineering, Interdisciplinary Graduate School of Engineering Sciences, Kyushu University

知られている。

単一集団のレプリケータダイナミクスに従う 2x2 ゲームについては、ゲーム構造が与えられればゲームの均衡が定まる（すなわち、① 裏切り（Defect, 以下 D）戦略支配（D-dominate）となる PD, ② 協調（Cooperation, 以下 C）戦略支配（C-dominate）となるジレンマのない（以下, Trivial）ゲーム, ③ 初期戦略分布により D 支配か C 支配かに分岐（Bi-stable）する SH, ④ 内部均衡点に吸引される（Polymorphic）Chicken のいずれかに類別される）ことが知られている^{1),2)}。加えて、ゲーム構造とゲームの進化ダイナミクスとの関連について、動力的な見地から詳細に検討した既往研究^{3),4)}をふまえるなら、2x2 ゲームのジレンマ性はゲームの静的影響だけで決まることは新規知見とはいえないとの批判があるかもしれない。しかし、どうして 2x2 ゲームではジレンマ性の有無が静的影響だけで決まるのか、についてこれまで系統的説明はなされておらず、3 戦略以上のゲームではどうなるのかについても詳しく検討されてこなかった。

Rapoport ら⁵⁾のジレンマゲームの分類以降、2x2 ゲームに関しては、様々な角度からのジレンマゲーム研究があるが、たとえば PD と Chicken のジレンマ性を定量的に比較するなど、異種ゲームのジレンマ性を一括して俯瞰しようとの試みはいまだなされていない。蜷川⁶⁾は、PD, Chicken, SH を取り上げ、戦略進化と絶滅の動力学を検討しているが、その中でゲームのジレンマの度合いを定量的に測る指標の必要性を指摘している。

ジレンマゲーム研究の最大の関心は、ゲームにどのような付加的枠組みを導入すれば、ジレンマから脱し、協調的な状態に達しうるか、にあると思われる。“付加的枠組み”には、大別すると、対戦相手を限定すること、裏切り戦略をとるプレーヤを罰するルールの導入⁷⁾が考えられてきた。特に前者に関しては、ネットワークを含む空間構造⁸⁾、繰返しゲーム⁹⁾、対戦拒否（ペアとなった対戦相手に対して第 3 の戦略“ゲームしない”（Lonely, Walk-away, Exit などと呼称される）を許容する）¹⁰⁾、タグによる識別¹¹⁾、これらと組み合わせたプレーヤのメモリ機能などについて、これまで多くの検討が試みられてきた。ジレンマゲームのベンチマークとしては 2x2 ゲームでは PD が（多人数ゲームでも PD を拡張した Public Goods Game が）よく用いられてきたが、Chicken ゲームを取り上げて検討している例¹²⁾もあり、同じ PD であっても具体的なゲーム構造が異なれば、提示されてきた協調を創発させるための付加的枠組みの優劣を相互に比較する

ことができない。このような背景とジレンマゲームの応用面での広範な裾野を考えると、ゲームのジレンマ性を量的に比較する基盤を検討することは重要な視点であろうと考えられる。

本論の構成は、まず 2 章では本研究におけるゲームのジレンマ性の定義を明確にし、ジレンマ性はゲーム構造のみで決まる静的影響とダイナミクスに依存して決まる動的影響とにより決まることを示す。3 章では、2 戦略である 2x2 ゲームは 3 戦略以上の一般ゲームからすると特殊であって、ジレンマ性の有無は上記の静的影響だけで決まることを導く。4 章では、3 戦略以上のゲームでは 2x2 ゲームと異なり、ジレンマ性の有無は静的影響だけから評価できないことを 3 戦略ゲームの実例を示しながら説明する。

2. ゲームのジレンマ性の構造

本論で取り扱うのは、離散的な戦略が N_{st} 与えられる（以下、 N_{st} 戦略ゲーム）2 人対称純粋戦略の進化ゲームであり、プレーヤ集団は等質な単一集団²⁾により構成されるとする。また、ゲーム進化のメカニズムにはレプリケータダイナミクスが適用されることを前提とする。

2.1 ゲーム構造

対称 2 人 N_{st} 戦略ゲームのゲーム構造を決める利得表を以下で表す。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1N_{st}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{N_{st}1} & \cdots & m_{N_{st}N_{st}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

あるプレーヤが戦略 i ($= 1, \dots, N_{st}$)（戦略ベクトルを陽に書くと $\mathbf{s}_i \in S = \{(1 \ 0 \cdots 0), \dots, (0 \cdots 0 \ 1)\}$ ）であり、彼と対戦するプレーヤの戦略が戦略 j ($= 1, \dots, N_{st}$) であるとき、彼の得る利得 π_{ij} は以下となる。ただし、 ${}^T \mathbf{s}_i$ は縦ベクトル $\mathbf{s}_i$ の行と列を転置したベクトルを表す。

$$\pi_{ij} = {}^T \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{M} \mathbf{s}_j \quad (2)$$

2.2 パレート公平戦略

本論では、「パレート最適な中で、特に一方に偏ることなく公平な状況を達成する戦略」という意味で“パレート公平戦略”を以下で定義する。

定義 1 戦略 i ($= 1, \dots, N_{st}$) がパレート公平戦略であるとは、 $\text{Max}(m_{11}, m_{22}, \dots, m_{N_{st}-1N_{st}-1}, m_{N_{st}N_{st}}) = m_{ii}$ であること。 ■

パレート公平戦略とは、両プレーヤが同戦略を出すとき最も高利得となる戦略を意味する。

2.3 パレート公平戦略の弱支配性

以下では、戦略 i ($= 1, \dots, N_{st}$) がパレート公平戦略であるゲームを考える。任意の戦略 j ($= 1, \dots, N_{st}$) について、 $\text{Max}(m_{1j} - m_{ij}, m_{2j} - m_{ij}, \dots, m_{N_{st}j} - m_{ij}) = 0$ ならば、戦略 i は他戦略を弱支配する。したがって、ある j ($= 1, \dots, N_{st}$)、 k ($= 1, \dots, N_{st}$) について、 $m_{kj} - m_{ij} > 0$ が成り立つならば、このゲームではパレート公平戦略は他戦略を弱支配できないことになる。ここで、パレート公平戦略がまさに他戦略を弱支配する状態からどれだけ「ずれ」たゲーム構造を有しているかを

$$DL_j^k = m_{kj} - m_{ij} \quad (3)$$

で計量する。これをパレート公平戦略 i について、ゲーム構造行列 $\mathbf{M}$ の k 行 j 列が寄与するジレンマ・ポテンシャルということにする。少なくとも 1 つの j ($= 1, \dots, N_{st}$)、 k ($= 1, \dots, N_{st}$) について、 $DL_j^k > 0$ であれば、そのゲームではパレート公平戦略が他戦略を弱支配できないことになる。

2.4 ジレンマゲーム

ゲームの動力学上のある時点における戦略分布を $\mathbf{s} = (s_1 \cdots s_i \cdots s_{N_{st}})$ で表す。本論ではジレンマゲームを以下で定義する。

定義 2 パレート公平戦略が戦略 i ($= 1, \dots, N_{st}$) なるゲームにおいて、ある戦略分布で $\dot{s}_i < 0$ となるゲームをジレンマゲームという。■

すなわち、ジレンマゲームとは、パレート公平戦略がつねに増加する動力学を持ちえないゲームをいう。定義より、つねに $\dot{s}_i \geq 0$ となるゲームをジレンマのないゲームということができる。すなわち、パレート公平戦略がつねに増加する動力学を持つゲームはジレンマのないゲームである。

2.5 ゲームのジレンマ性

前節の定義により、パレート公平戦略が戦略 i なるゲームのジレンマ性とはダイナミクスにおける $\dot{s}_i$ の正負特性ということができる。また、 $\dot{s}_i$ の正負は $\dot{s}_i/s_i$ のそれと一致する。ここで、レプリケータダイナミクスを考えると、定義より、

$$\dot{s}_i/s_i = [{}^T \mathbf{s}_i \cdot \mathbf{M} \mathbf{s} - {}^T \mathbf{s} \cdot \mathbf{M} \mathbf{s}_i]. \quad (4)$$

行列要素を陽に書き出すと以下を得る。

$$\begin{aligned} \dot{s}_i/s_i &= \sum_j m_{ij} s_j - \sum_k \sum_j m_{kj} s_j s_k \\ &= - \left(\sum_k \sum_j m_{kj} s_j s_k - \sum_j m_{ij} s_j \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= - \left(\sum_k \sum_j m_{kj} s_j s_k - \sum_k \sum_j m_{ij} s_j s_k \right) \\ &= - \sum_k \sum_j DL_j^k s_j s_k \quad (5) \end{aligned}$$

式 (5) が示すように、ゲームのジレンマ性は、パレート公平戦略の他戦略弱支配性からのずれを意味するジレンマ・ポテンシャル DL_j^k とそのときどきの戦略分布の積 $s_j s_k$ との積和で表記される。前者がゲームの構造だけで決まる因子、後者がゲーム途上の戦略分布により決まる因子であることから、ゲームのダイナミクスの観点から換言すると、前者を静的影響、後者を動的影響ということができる。

式 (5) 表記の重要な点は、ゲームのジレンマ性（その強弱を含めて）はゲーム構造だけに依拠する静的な影響とダイナミクスに関連する動的な影響とに切り分けることが可能だが、全体としてのジレンマ性は両者の積和を考慮しなくてはならないことにある。したがって、ジレンマ性はゲーム途上のある時点（すなわち戦略分布）を特定して初めて定まる概念であるといえる。

一般に、 $\sum_{k=1}^{N_{st}} s_k = 1$ かつ $s_k \geq 0$ の条件下で、 $\dot{s}_i/s_i$ がつねに正の値をとるか否かは、 DL_j^k の正負だけでは決めることができない。しかし、次節で証明するように 2 戦略ゲームの場合だけは、 $DL_j^k \leq 0$ であれば $\dot{s}_i/s_i$ の正値性が保証されるので、ジレンマ性の有無はゲーム構造だけから決めることができる。つまり、3 戦略以上のゲームでは $DL_j^k > 0$ なる項があっても、他の $DL_l^n < 0$ なる項があれば、つねに $\dot{s}_i/s_i \geq 0$ となる可能性がありうる（4 章参照のこと）。よって 3 戦略以上のゲームでは、ゲーム構造だけからジレンマ性の有無をいうことはできない。

2.6 2x2 ゲームにおけるジレンマ性とその強さ

2x2 ゲームでは、式 (3) で与えたジレンマ・ポテンシャルは以下の 2 要素に帰着される。ただし、 $m_{11} < m_{22}$ とする。

$$DL_1^1 = m_{11} - m_{21} \equiv DL_1 \quad (6)$$

$$DL_2^1 = m_{12} - m_{22} \equiv DL_2 \quad (7)$$

また、式 (5) は式 (8) となる。

$$\dot{s}_2/s_2 = -s_1 \cdot s_1 \cdot DL_1 - s_1 \cdot s_2 \cdot DL_2 \quad (8)$$

2x2 ゲームにおいてはパレート公平戦略（C 戦略）でない戦略は必然的に D 戦略であり、 $s_1 = 1 - s_2$ を用いると式 (8) は式 (9) となる。

$$\dot{s}_1/s_1 = s_1 \cdot s_2 \cdot DL_1 + s_2 \cdot s_2 \cdot DL_2 \quad (9)$$

命題 1 2x2 ゲームにおいてはジレンマ性の有無はゲー

ムの静的影響（ゲーム構造、ジレンマ・ポテンシャル）だけから決まる。 ■

[証明] 式 (8), 式 (9) より, $0 \leq s_1 \leq 1$, $0 \leq s_2 \leq 1$, $s_1 + s_2 = 1$ なる s_1, s_2 に対しては, $\dot{s}_1/s_1$ (もしくは $\dot{s}_2/s_2$) の符号は DL_1 および DL_2 により決まる. もし $DL_1 \leq 0$ かつ $DL_2 \leq 0$ ならば, 式 (8) より任意の s_1, s_2 に対して $\dot{s}_2/s_2 \geq 0$ であるから, 定義 2 によりこのゲームはジレンマのないゲームになる. 逆に, もしつねに $\dot{s}_2/s_2 \geq 0$ なるゲームがあれば (つねに $\dot{s}_1/s_1 \leq 0$ なるゲームであれば), 式 (8) で $s_1 \rightarrow 1$ の極限において $DL_1 \leq 0$ が要請され, 式 (9) で $s_2 \rightarrow 1$ の極限において $DL_2 \leq 0$ が要請される. したがって, $DL_1 \leq 0$ かつ $DL_2 \leq 0$ ならば, この 2x2 ゲームにはジレンマは存在しない. すなわち, 2x2 ゲームにおけるジレンマ性の有無は, DL_1 および DL_2 により決まる. ■

2x2 ゲームにおける D 戦略の増加率 $\dot{s}_1/s_1$ はダイナミクス上のその時点におけるジレンマ強さを意味していると考えることができる. そこで, 以下の議論において $\dot{s}_1/s_1$ をジレンマ強度 (Dilemma Intensity, 以下 DI) ということにする.

3. 2x2 ゲーム

前章において, 2x2 ゲームは 3 戦略以上のゲームと異なり, ジレンマ性の有無はゲーム構造だけから決まることが示された. 本章では, 2x2 ゲームについて, この静的影響とジレンマ性についてより詳細に検討する.

3.1 ゲーム構造の表記法

ゲーム構造行列 (1) のパラメータ表示法を考える. この記法 (多戦略ゲームにもそのまま拡張できる) は 2x2 ゲームの全容を俯瞰的に理解するうえで有効である. ゲーム構造の行列要素を解可能域上に描くと図 1 のようになる. ここで $x_o = (m_{11} + m_{22})/2$ とおけば, 各行列要素は x_o 以外に r_1 [ND], r_2 [ND] および θ [deg], 合計 4 パラメータで表すことができる. ただし, $m_{11} < m_{22}$ とする.

$$m_{11} = x_o - 0.5r_1 \cos(45) \quad (10a)$$

$$m_{12} = x_o + r_2 \sin(45 + \theta) \quad (10b)$$

$$m_{21} = x_o + r_2 \cos(45 + \theta) \quad (10c)$$

$$m_{22} = x_o + 0.5r_1 \cos(45) \quad (10d)$$

図 1 の解可能域において 45 deg 方向への平行移動は利得の相対関係には影響しないから, $x_o = (m_{11} + m_{22})/2 = 0$ とすれば, パラメータは r_1, r_2 および θ の 3 つでゲーム構造を表すことができる. さらに, 解可能域を拡大縮小したゲームを相対的利得関係が互

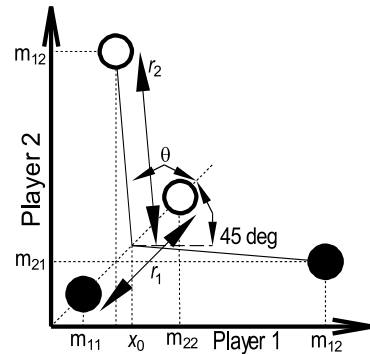


図 1 対称 2 人 2 戦略 (2x2) ゲームの一般表記

Fig. 1 General description for a 2x2 game. An explicit expression of m_{ij} by both θ and r can be drawn in Eq. (10).

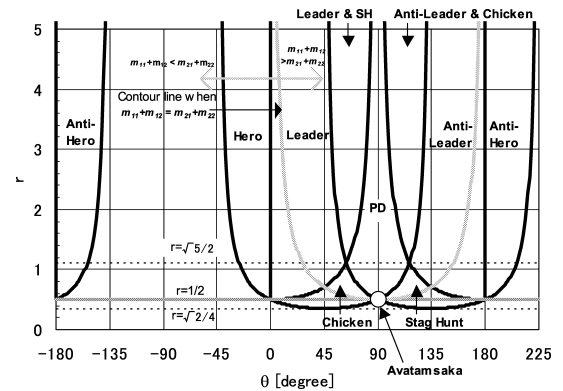


図 2 2x2 ゲームにおけるジレンマ生起領域

Fig. 2 Dilemma area in case of 2x2 game expressed by the proposed schematic description.

いに相似なゲームであると見なすと, $r_2/r_1 \equiv r$ なる正規化によって, 結局 r と θ の 2 パラメータだけですべてのゲーム構造を表すことができる.

3.2 種々の 2x2 ジレンマゲーム

C 戦略 (戦略 $i = 2$) の戦略ベクトルを $s_2 = (0 \ 1)$, 戦略分布を s_2 で, D 戦略 (戦略 $i = 1$) の戦略分布を $s_1 = (1 \ 0)$, 戦略分布を s_1 で表す. 自戦略と相手戦略の組合せを (D, D), (C, C), (C, D), (D, C) のように表し, それぞれの手組みを P_{DD} , P_{CC} , P_{CD} , P_{DC} のように表すことにする.

式 (10) に従い, θ [deg] と r [ND] とを様々に変化させて, 典型的ジレンマゲームの発生域を描くと図 2 が得られる. 図 2 では以下に詳述するように Trivial ゲームおよびすべてのジレンマゲームの発生域がパラメータ θ と r により俯瞰的に表現されている. 典型的ジレンマゲームとは以下の 5 つのゲームである. すなわち, PD とは, 相手を出し抜くこと (自手 D/相手 C, 自分の利得は m_{12}) が最高, 出し抜かれること (自手

表 1 各ゲームの生起条件
Table 1 Criteria for games.

General assumption: $m_{22} > m_{11}$	
PD	$m_{21} < m_{11}$ and $m_{12} > m_{22}$.
Chicken	$m_{12} > m_{22}$ and $m_{21} > m_{11}$. Particularly, $\square P_{DD}P_{DC}P_{CC}P_{CD}$ is convex.
Stag Hunt	$m_{21} < m_{11}$ and $m_{12} < m_{22}$. Particularly, $\square P_{DD}P_{DC}P_{CC}P_{CD}$ is convex.
Leader	$m_{12} > m_{22}$ and $m_{21} > m_{11}$. Particularly, $\square P_{DD}P_{DC}P_{CC}P_{CD}$ is not convex. And $m_{12} > m_{21}$.
Hero	$m_{12} > m_{22}$ and $m_{21} > m_{11}$. Particularly, $\square P_{DD}P_{DC}P_{CC}P_{CD}$ is not convex. And $m_{21} > m_{12}$.
Anti-Leader	$m_{21} < m_{11}$ and $m_{12} < m_{22}$. Particularly, $\square P_{DD}P_{DC}P_{CC}P_{CD}$ is not convex. And $m_{12} > m_{21}$.
Anti-Hero	$m_{21} < m_{11}$ and $m_{12} < m_{22}$. Particularly, $\square P_{DD}P_{DC}P_{CC}P_{CD}$ is not convex. And $m_{21} > m_{12}$.
Avatamsaka	$m_{21} = m_{11}$ and $m_{12} = m_{22}$.

$\square ABCD$ indicates a quadrangular $ABCD$.

C/相手 D, すなわち m_{21}) が最低利得となるジレンマゲームで、発生条件は $m_{12} > m_{22} > m_{11} > m_{12}$ である。Chicken とは、出し抜くことが最高であることは PD と同様だが、出し抜かれるより互いに裏切り合うこと (すなわち P_{DD}) の方が悪い結果を来すジレンマゲームであり、環境問題の比喩^{13),14)} として知られる。発生条件は $m_{12} > m_{22} > m_{21} > m_{11}$ (狭義の Chicken はこの条件に加え $m_{12} + m_{21} < 2m_{22}$) である。SH とは、互いに協力すれば鹿を仕留めることができる (P_{CC} が最高利得) のに、相手の協力を疑心暗鬼に思っ 1 人でできる兎狩りにはしてしまう (D 戦略をとってしまう) エピソードで語られるジレンマゲームであり、 $m_{22} > m_{12} > m_{11} > m_{21}$ である (狭義の SH はこの条件に加え $m_{12} + m_{21} > 2m_{11}$)。Leader と Hero は互いが異なる手を出せば利得が高くなるゲーム構造において、相手がどちらを出すか特定できないことから生じるジレンマゲームであり、 $m_{12} + m_{21} > 2m_{22}$ かつ $m_{12} > m_{21}$ を Leader、 $m_{12} + m_{21} > 2m_{22}$ かつ $m_{21} > m_{12}$ を Hero という。

上記した PD, 狭義の Chicken, 狭義の SH, Leader, Hero の利得行列要素で表した発生条件をまとめると表 1 のようになる (表 1 中の $\square$ は図 3 の解可能域を示す四角形を意味する)。また、図 3 (c) から (g) に 5 種のジレンマゲームの解可能域の例を示す。

ところで、Leader に対する Hero は式 (1) の利得構造が転置行列となった状況である。本論では以下、“Reverse (裏)” という。つまり、Hero は Leader の

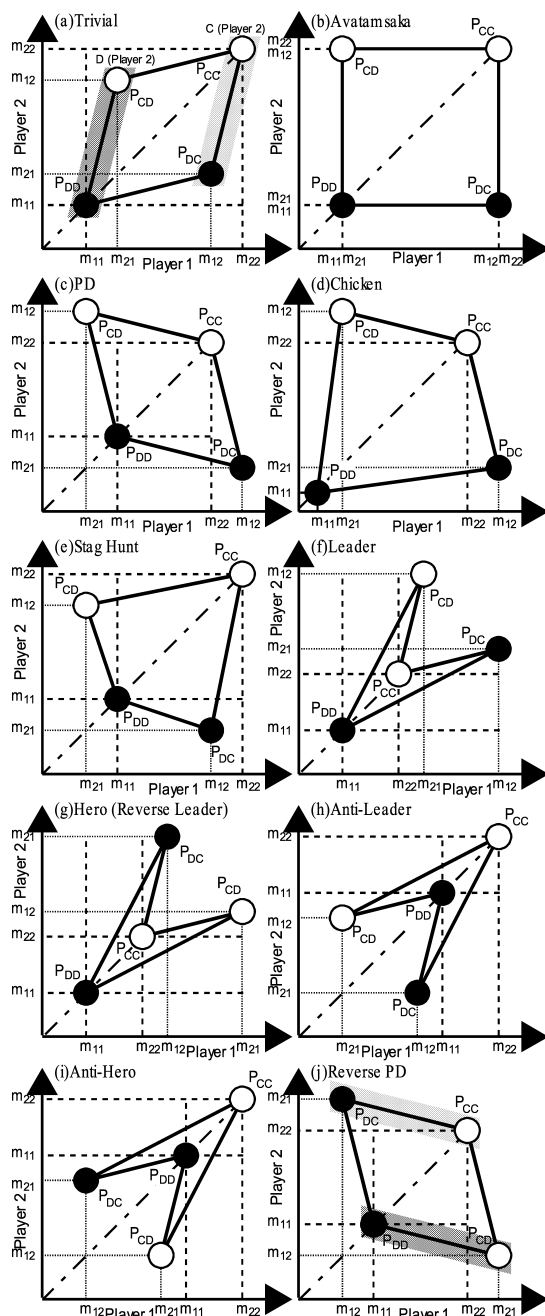


図 3 対称 2x2 ゲームにおける代表的ゲーム (○は player1 の戦略が C, ●は D であることを表し、薄グレーハッチは player2 の戦略が C, 濃グレーハッチは D であることを表す)

Fig. 3 Well-recognized games in 2x2 game (An open circle indicates that Player 1 adopts a cooperation strategy (C), whereas a closed circle is that Player 1 defects (D). Light gray and dark gray areas designate Player 2's strategies, C and D, respectively. Hence, it is easy to understand that D is the dominant strategy in a PD game, while C is dominant in a Reverse PD game).

裏である。Reverse は図 2 において $\theta = 0$ および $\theta = 180$ [deg] で折り返した幾何関係を意味する (Hero の $\theta = 0$ 対称な Reverse ゲームは Leader だが, Leader の $\theta = 0$ 対称な Reverse ゲームの一部は Hero, 一部は Trivial になる)。PD の裏である Reverse PD は利得行列および前章の議論から自明のようにジレンマのない Trivial ゲームになる (図 3(j))。

また, 後述するように Chicken はパレート最適に関わるジレンマ性に起因するゲームであり, SH はパレート最悪 (付録参照) に関わるジレンマ性に起因するゲームである。この, Chicken に対する SH の関係を本論では以下, “Anti-” という。すなわち, SH は Anti-Chicken ともいえる。このことから Leader, Hero にもそれぞれ Anti- が存在すると予想される。図 2 から幾何的に分かる Anti-Leader および Anti-Hero の発生条件を表 1 に示す。また, 図 3(h), (i) に解可能域の例を示す。実際, 後述するようにこの発生条件のうち $m_{21} < m_{11}$ は, パレート最悪に関わるジレンマ性の条件と一致するから, (Leader と Hero が広義の Chicken であるのと同様に) Anti-Leader と Anti-Hero は広義の SH といえることが分かる。

PD, Chicken, SH, Leader, Hero, Anti-Leader, Anti-Hero 以外の図 2 中の領域は, ジレンマのない Trivial ゲームである (なぜなら, Trivial ゲームではパレート公平戦略が他戦略を弱支配する。すでに式 (6), (7) で議論したとおり, 2x2 ゲームではパレート公平戦略が他戦略を弱支配するゲームでは, ジレンマは生じえない)。Akiyama らの提示した Avatamsaka¹⁵⁾ はジレンマゲームと Trivial とのちょうど境界に位置するゲームであることが分かる (解可能域の例は図 3(b))。

3.3 ギャンブル成分ジレンマとリスク回避成分

2x2 ゲームのジレンマ・ポテンシャルについて考えると, Nash 均衡の定義によれば,

$$\begin{aligned} DL_1 > 0 &\Leftrightarrow m_{11} - m_{21} > 0 \\ &\Leftrightarrow (D, D) \text{ が均衡である} \\ DL_2 > 0 &\Leftrightarrow m_{12} - m_{22} > 0 \\ &\Leftrightarrow (C, C) \text{ が均衡でない} \end{aligned}$$

ことは自明である。このことと表 1 の各ジレンマゲームの発生条件, さらに図 3(c) から (i) の解可能域をあわせて見ると, 2x2 の各種ジレンマゲームについて, 以下のことが了解される。

すなわち, $DL_2 > 0 \Leftrightarrow m_{12} - m_{22} > 0$ となると, Chicken, あるいは Leader, Hero になる。Chicken (図 3(d)) では P_{CC} , P_{CD} , P_{DC} がパレート最適となって, 優劣比較が困難となる。Leader, Hero (図 3(f), (g)) では, P_{CD} , P_{DC} がパレート最適と

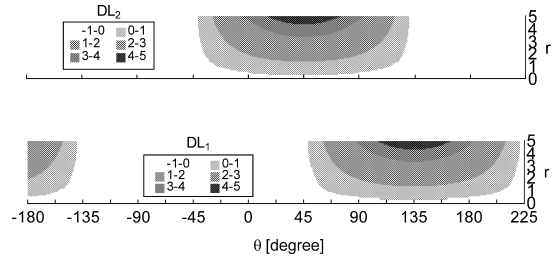


図 4 DL_1 および DL_2 の正值の領域およびその値
Fig. 4 Positive areas of DL_1 and DL_2 in 2x2 game.

なって, 優劣比較が困難になる。パレート最適な状態は存在するが, 最適解を一意に決定できないことから生じる利害相反をギャンブル成分と呼び, DL_2 の大きさを評価する。これはプレーヤーが相手を出し抜いて高い利得を上げる (D を選択する) 誘因が存在することを意味する。ただし, ダイナミクスの帰結として均衡が D 支配になることを表しているわけではない。

$DL_1 > 0 \Leftrightarrow m_{11} - m_{21} > 0$ となると, SH, あるいは Anti-Leader, Anti-Hero になる。SH (図 3(e)) では, P_{DD} , P_{CD} , P_{DC} がパレート最悪となって優劣比較が困難となる。Anti-Leader, Anti-Hero (図 3(h), (i)) では, P_{CD} , P_{DC} がパレート最悪となって優劣比較が困難になる。パレート最悪な状態は存在するが, 最適解を一意に決定できないことから生じる利害相反をリスク回避成分と呼び, DL_1 の大きさを評価する。これはプレーヤーが相手に出し抜かれて低い利得になるリスクを回避する (D を選択する) 誘因が存在することを意味する。ただし, ダイナミクスの帰結として均衡が D 支配になることを表しているわけではない。

PD は $DL_1 > 0 \Leftrightarrow m_{11} - m_{21} > 0$ かつ $DL_2 > 0 \Leftrightarrow m_{12} - m_{22} > 0$ なるゲームであり, ギャンブル成分とリスク回避成分をあわせ持つ場合である (換言すると PD は Chicken と SH が併存する, すなわち広い意味で Chicken であり SH であるゲーム)。

ギャンブル成分もリスク回避成分も存在しないゲームとは, $m_{11} - m_{21} \leq 0$ かつ $m_{12} - m_{22} \leq 0$, すなわち, $DL_1 \leq 0$ かつ $DL_2 \leq 0$ なるゲームであり, これはパレート公平戦略が他戦略を弱支配する条件に一致し, すなわち Trivial ゲームである。

図 4 にギャンブル成分 $DL_2 > 0$, リスク回避成分 $DL_1 > 0$ の領域を示した。図 2 と比較すると, 前者は広い意味での Chicken (すなわち狭義の Chicken, Hero, Leader, PD) の, 後者は広い意味での SH (すなわち狭義の SH, Anti-Hero, Anti-Leader, PD) の領域に一致することが確認できる。また, 図中の等値線はゲーム構造, すなわち, $DL_2 = m_{12} - m_{22}$,

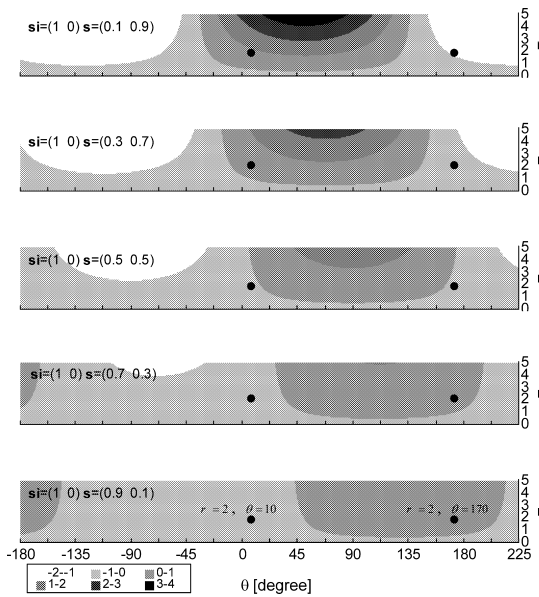


図 5 Replicator Dynamics における DI ($\dot{s}_1/s_1$). $\mathbf{s}_i$ は focal プレーヤの戦略, $\mathbf{s}$ は母集団の戦略分布

Fig. 5 DI, $\dot{s}_1/s_1$ in Replicator Dynamics. $\mathbf{s}_i$ and $\mathbf{s}$ indicate a focal player's strategy and a strategy distribution of the mother population, respectively.

$DL_1 = m_{11} - m_{21}$ だけから描かれている点に留意する. ゲームパラメータのうち r が大きくなれば, ギャンブル成分, リスク回避成分のジレンマ・ポテンシャルは大きくなる.

ダイナミクス上のある時点における戦略分布 $\mathbf{s} = (s_1 \ s_2)$ を $\mathbf{s} = (0.1 \ 0.9)$ から 0.2 刻みで $\mathbf{s} = (0.9 \ 0.1)$ まで変化させたときのジレンマ強度 (DI, $\dot{s}_1/s_1$) を図 5 に示した. 既述したように, DI は戦略分布が協調的な状況 ($\mathbf{s} = (0.1 \ 0.9)$) から裏切りの状況 ($\mathbf{s} = (0.9 \ 0.1)$) まで様々な環境下にあるとき, D 戦略がその時点で増加するのか (正值), 減少に向かうのか (負値), その強さを示している.

ここで図 5 を図 4 と比べると, $\mathbf{s} = (0.1 \ 0.9)$ における正值の領域が DL_2 のそれとほぼ等しいこと, 同様に $\mathbf{s} = (0.9 \ 0.1)$ における正值の領域が DL_1 のそれとほぼ一致することが分かる. すなわち, ギャンブル成分に起因するジレンマはダイナミクス上, 集団の多くが C 戦略をとる際に現れるジレンマであり, リスク回避成分に起因するジレンマは集団の多くが D 戦略をとる際に現れるジレンマであることが分かる (前者が“相手を出し抜こう”, 後者が“相手に出し抜かれまい”とのインセンティブに起因すると解釈されることに整合的). 逆に, 集団の多くが C 戦略をとるような場合はリスク回避成分に起因するジレンマは顕在化しにくく, 同様に多くが D 戦略をとるような場合は

ギャンブル成分に起因するジレンマは顕在化しにくい.

例として, $r = 2$ および $\theta = 10$ [deg] のゲームを考えてみる. これは図 2 から Leader に類別されるゲーム構造を有する. Leader は Chicken 的ジレンマ, すなわちギャンブル成分に起因するジレンマゲームである. 図 5 のダイナミクスを見ると, 集団の多くが C 戦略のとき ($\mathbf{s} = (0.1 \ 0.9)$) には, $\dot{s}_1/s_1$ は正值だから進化は裏切りが増える向きにゲームは進むが, 多くが裏切り戦略をとる状況下 ($\mathbf{s} = (0.9 \ 0.1)$) では, $\dot{s}_1/s_1$ は負値だから進化は逆に協調が増える向きに進む. この帰結としては, ダイナミクスは $[0, 1]$ の内部均衡点に向かうことが推量される. 一般に Chicken ゲームのダイナミクスでは戦略分布は内部均衡点 ($\frac{-m_{12}+m_{22}}{m_{11}-m_{12}-m_{21}+m_{22}}, \frac{m_{11}-m_{21}}{m_{11}-m_{12}-m_{21}+m_{22}}$) に向かう^{1),2)}.

同様に $r = 2$ および $\theta = 170$ [deg] の Anti-Leader では, 進化の向きはダイナミクスの基点, すなわちプレーヤ集団の初期分布により, $\mathbf{s} = (0 \ 1)$ (全員協調) か, $\mathbf{s} = (1 \ 0)$ (全員裏切り) かに分岐することが理解される. いい換えると, 図 5 の上段から下段図どこからゲームを始めたかで, 進化は当該図の正負が規定する向きに一意に進む. これはまさに SH のダイナミクスの特徴である^{1),2)}. 実際, 図から読み取れるように, $\mathbf{s} = (0.1 \ 0.9)$, $\mathbf{s} = (0.3 \ 0.7)$ のとき $\dot{s}_1/s_1$ は負値であるから初期分布が $(0.4 \ 0.6)$ であれば全員が協調に, $\mathbf{s} = (0.9 \ 0.1)$, $\mathbf{s} = (0.7 \ 0.3)$ のとき $\dot{s}_1/s_1$ は正值だから初期分布が $(0.6 \ 0.4)$ であれば全員が裏切りとなるようにゲームは進む.

4. 3 戦略以上のゲームについて

3 戦略以上のゲームでは, $\sum_{k=1}^{N_{st}} s_k = 1$ かつ $s_k \geq 0$ の条件下で, パレート公平戦略の変化率 $\dot{s}_i/s_i$ がつねに正の値をとるか否かを DL_j^k の正負だけで決めることができない. すなわち, ゲーム構造からジレンマ性の有無を決めることはできない.

例として 2 人 3 戦略ゲーム,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

を考える. パレート公平戦略は $i = 3$ であるが, この戦略は利得構造からして, いわゆる, Lonely (Walk-away) 戦略^{10),16)} であることが分かる. Lonely 戦略とは, ゲーム対戦を拒否する戦略で, 自他の一方がこの Lonely 戦略をとると両者の利得はゼロになる (式 (11))

参照). たとえば, 対戦相手に関するメモリ機能とこの Lonely 戦略とをジレンマゲームの枠組みに付加すると, 望ましい相手 (協調的な相手) とだけ対戦することが可能となり, 協調が創発することが知られている.

このゲームにおけるジレンマ・ポテンシャルは,

$$DL_1^1 = m_{11} - m_{31} \equiv -2 \quad (12a)$$

$$DL_2^1 = m_{12} - m_{32} \equiv 1 \quad (12b)$$

$$DL_1^2 = m_{21} - m_{31} \equiv 1 \quad (12c)$$

$$DL_2^2 = m_{22} - m_{32} \equiv -2 \quad (12d)$$

だから, このゲームではパレート公平戦略は他戦略を弱支配できない. しかし, 式 (5) より,

$$\dot{s}_3/s_3 = 2s_1^2 + 2s_2^2 - 2s_1s_2 \geq 0 \quad (13)$$

となって, このゲームにはジレンマは存在しないことが陽に導かれる.

5. 結 論

ジレンマゲームにおけるジレンマ性を, パレート公平戦略が戦略分布のうえでつねに増加するダイナミクスを持ちえない, ことと定義し, この条件はゲーム動力学とは無関係にゲーム構造だけから決まる静的影響 (ジレンマ・ポテンシャル) と動力学により決まる動的影響との積和で表されることを示した.

2x2 ゲームでは, このジレンマ性の有無は動的影響とは無関係にジレンマ・ポテンシャルの正負だけで決まる. すなわち, 2x2 ゲームではパレート公平戦略が他戦略を弱支配できないとジレンマが生起する. 2つのジレンマ・ポテンシャルは, それぞれ, ギャンブル成分とリスク回避成分を意味し, 各々はパレート最適性, パレート最悪性に起因してゲームに利害相反を発生させるものである.

また, 3 戦略以上のゲームについては, ジレンマ・ポテンシャルが正值を持ってもジレンマが存在しない場合がありえ, このことはパレート公平が他戦略を弱支配できないからといってつねにジレンマが発生するわけではないことを意味している.

このように, ジレンマ性の有無と協調戦略の他戦略弱支配性との関係は, 戦略数が 2 の場合とそれより大きい場合とで様相が異なることが示された.

参 考 文 献

- 1) Weibull, J.W.: *Evolutionary Game Theory*, MIT Press (1995).
- 2) 生天目章: ゲーム理論と進化ダイナミクス, 森北出版 (2004).
- 3) 秋山英三: 5 つのジレンマゲームにおける進化的現象, エージェント合同シンポジウム (JAWS2003), pp.103–112 (2003).

- 4) Oechssler, J. and Riedel, F: Evolutionary dynamics on infinite strategy space, *Economic Theory*, Vol.17, pp.141–162 (2001).
- 5) Rapoport, A. and Guyer, M.: A Taxonomy of 2×2 games, *General Systems*, Vol.11, pp.203–214 (1966).
- 6) 蛭川 繁: 繰り返し囚人のジレンマゲームにおける 1/f ゆらぎ, 情報処理学会論文誌, Vol.44, No.10, pp.2514–2517 (2003).
- 7) Boyd, R. and Richerson, P.: Punishment Allows the Evolution of Cooperation (or Anything else) in Sizable Groups, *Ethology and Sociobiology*, Vol.13, No.3, pp.171–195 (1992).
- 8) Nowak, M., Bonhoeffer, S. and May, R.M.: Spatial games and the maintenance of cooperation, *Proc. National Academy Sciences USA*, Vol.91, pp.4877–4881 (1994).
- 9) Axelrod, R.: *The Evolution of Cooperation*, Basic Books, New York (1984).
- 10) Schuessler, R.: Exit threats and cooperation under anonymity, *Journal of Conflict Resolution*, Vol.33, No.4, pp.728–749 (1989).
- 11) Riolo, R.L., Cohen, M.D. and Axelrod, R.: Evolution of cooperation without reciprocity, *Nature*, Vol.414, pp.441–443 (2001).
- 12) Hauert, C. and Doebeli, M.: Spatial structure often inhibits the evolution of cooperation in the snowdrift game, *Nature*, Vol.428, pp.643–646 (2004).
- 13) 木村邦博: 大集団のジレンマ, ミネルヴァ書房 (2002).
- 14) Schelling, T.: *Micromotives and Macrobehavior*, W.W. Norton & Company (1978).
- 15) Akiyama, E. and Aruka, Y.: The Effect of Agents Memory on Evolutionary Phenomena — the Avatamsaka Game and Four Types 2×2 Dilemma Games, *Proc. 9th Workshop on Economics and Heterogeneous Interacting Agents*, CD-ROM (2004).
- 16) Hauert, C., De Monte, S., Hofbauer, J. and Sigmund, K.: Volunteering as Red Queen Mechanism for Cooperation in Public Goods Games, *SCIENCE*, Vol.296, pp.1129–1132 (2002).

付 録

A.1 パレート最悪

いわゆる, パレート最適 (Pareto Optimal) に対し てパレート最悪 (Pareto Least) が以下で定義される.

定義 A1 戦略型 n 人プレーヤ, N 戦略ゲーム ($j \in N$ なるプレーヤの戦略集合を S_j , ある戦略の組に対するプレーヤ i ($= 1, \dots, n$) の利得を f_i で表

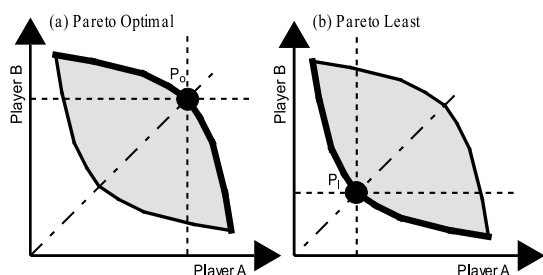


図 6 パレート最適とパレート最悪

Fig. 6 A concept of Pareto Optimal and Pareto Least.
A Gray area indicates a possible solution set.

す) $G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$ において戦略の組 $s = (s_1, \dots, s_n)$ が戦略集合 $S = S_1 \times \dots \times S_n$ に関してパレート最悪であるとは、すべてのプレーヤ i ($= 1, \dots, n$) に対して、

$$f_i(t_1, \dots, t_n) < f_i(s_1, \dots, s_n)$$

となる戦略の組 $(t_1, \dots, t_n) \in S$ が存在しないこと。 ■

ある戦略の組がパレート最悪であるとは、すべてのプレーヤにとって、もうそれ以上避けたい実行可能戦略の組が存在しないことを意味する。

図 6 に 2 戦略ゲームの例を示した。太線がそれぞれ、パレート最適とパレート最悪の解集合の例である。例示したように解可能域が凸集合 (convex) の場合、プレーヤ A と B の利得が等しくなり、かつ、それぞれの利得が最大となる解 P。(原点から引いた傾き 45 deg の直線とパレート最適との交点) を基点に図中点線の軸をとり、そこから見て第 2 象限および第 4 象限にあるパレート解は、P。に対して優劣を決め難い (第 2 象限にあればプレーヤ B に、第 4 象限にあればプ

レーヤ A に偏して有利な解になる)。すなわち、太線上の解集合は優劣を決められないことになる。同様にパレート最悪の太線では、線上の解集合の優劣を決められず、たとえば、P₁ から見て第 2 象限にある解はプレーヤ A に偏って不利な場合を意味することになる。

(平成 18 年 2 月 17 日受付)

(平成 18 年 9 月 14 日採録)



谷本 潤

1965 年生。早稲田大学理工学部卒業，同大学院理工学研究科修了。工学博士。東京都立大学工学部助手，早稲田大学理工学総合研究センター講師，九州大学大学院総合理工学研究科講師，助教授を経て，2003 年より教授。専門は都市建築環境工学，人間・環境・社会システム工学。空気調和衛生工学会賞，日本建築学会奨励賞，日本建築学会賞（論文）。『ハンディブック建築』（オーム社，2005 年）等。小説家，水彩画家。第 76 回コスモス文学新人賞，第 19 回国民文化祭美術展入選，第 37～40 回福岡市美術展入選等。



相良 博喜

1981 年生。九州大学工学部エネルギー科学科卒業，同大学院総合理工学府環境エネルギー工学専攻修士課程修了。2006 年より日本学術振興会特別研究員。2005 年度日本建築学会九州支部支部長賞，株式会社構造計画研究所主催第 4 回 KKMAS コンペティション，第 5 回 KKMAS コンペティションにて佳作受賞等。