

数学図形問題を対象とした 作問学習支援システムの提案

大和 卓人

三浦 元喜

國藤 進

北陸先端科学技術大学院大学 知識科学研究科

〒923-1292 石川県能美市旭台 1-1

{t-oowa, miuramo, kuni}@jaist.ac.jp

概要

作問演習は、学習者が能動的に取り組むことによる高い学習効果が期待できる。しかし、学習者にとって問題を作る経験は少ないため、良質な問題を作成するのは困難である。そこで我々は、作問経験の少ない学習者に対して、良質な問題を作成できるような支援をする必要があると考えた。本稿では、図形作問演習に特化した、作問初学者に対する作問支援の方略を提案する。(1) 作成する問題に必須な条件を与える制約、(2) 求める対象まで導けないときの誘導、(3) 作成した問題の誤りの示唆、(4) 作成した問題の発展を行わせる追加、の4つの手法により支援する。また、上記方略を組み込んだ支援システムについても言及する。

1 はじめに

学習者が問題解決の解法を学ぶ際に、最もよく用いられるのは問題解決演習である。問題解決演習は、与えられた問題に対して、教授された適切な解法を用いることで問題を解く演習である。問題解決演習を通して解法の経験を積むことにより、学習者に解法を定着させることができる。しかし、問題解決学習における学習者の問題に対する態度は受動的な傾向がある。学習者が問題に対して受動的であるよりも、能動的である方が学習効果はある。学習者が能動的に問題に対して取り組むための方法として、学習者が問題を作成する学習法 [1] や問題を発展的に扱う学習法 [3][4] がある。いずれの学習法も学習者が問題に対して能動的な態度をとることは示されている。

本研究の目指すところは、学習者の能動的な問題解決への態度の養成と論理的思考力を向上させるところにある。図形作問学習の期待される効果については第2章で述べるが、図形作問学習は我々の目的に適していると考えられる。しかし、学習者が作問を経験する機会は少ない。作問の経験が少ない作問初学者が良質な問題を作

成し、作問学習の効果を挙げることは困難だと考えられる。本報告では、作問初学者に対する支援を行い、作問レベルを段階的に上昇させる方略を提案する。さらに、その方略のための計算機を用いたシステムを構築する。作問初学者が計算機とインタラクティブな作問活動により、作問初学者の作問レベルを上昇させ、作問学習のより効果的な状態への移行を目的とする。

本稿において、中学校3年生レベルの数学知識を用いた作問を対象として考えている。理由として、幾何の知識を一通り学んでおり、それを組み合わせることで問題を解くことが多い。そのため、作成される問題は多様であると期待できるからである。

以下、第2章で図形作問演習と方略について述べる。第3章にて開発中の支援システムの概要を述べる。第4章にて例を示す。最後に第5章で結論と今後の課題を述べる。

2 図形作問演習

2.1 図形作問演習の流れ

本報告における図形作問学習の大まかな流れを示す。学習者が図形を描き、描いた図形における求める対象を決定する。その後、必要な数値（例：長さや角度）と図形の条件（例：直角三角形，相似）を決め、問題を作成する。

2.2 図形作問学習の効果

学習者が問題を作成することで、問題に対して学習者が能動的な態度を取ることが示されている [1]。また、論理的な思考力向上の論拠は、作問演習は自ら立てた求める対象に対して、その過程を論理的に作る必要があることが理由である。以上のことから、我々の目標達成のために、図形作問学習は有効な手段であると考えている。

さらに、図形の学習において、図形の性質を組み合わせて問題を解く、という図形の性質の理解と数学的な思考が重要である。複雑な図形の問題を作る場合を考えると、性質の理解と数学的な思考の両方を要求される。そのため、図形問題を作ることは高い学習効果があると考えられる。

本報告における質の高い問題とは、解答を得るのに必要な数学的知識が多く必要な問題であると考えている。作成した問題の質が高いほうが、学習者にとっての問題の解法能力の向上、示唆に富んでいたりと、達成感が得られるので、学習者の能動的な態度に対してよい効果が得られると考えられる。

2.3 先行研究

本研究の先行研究を2つに分けた。図形問題学習支援に関する研究と作問支援に関する研究である。以下に、その2つの代表例を示す。

2.3.1 図形問題学習支援

松田らは、計算機が与えられた図形と条件から課題を証明する GRAMY を構築した [2]。このシステムは学習者への図形問題指導システム

のために構築されたもので、図形問題作成の支援を目標とした研究ではない。

2.3.2 文章問題の作問支援

中野らは、算数の和と差に関する文章問題を対象とした作問学習を行うことができる学習支援環境 POP-B を構築している [5][6]。POP-B では、学習者が問題を作成できる機能だけでなく、作成された問題を診断し、個別学習を可能にしている。作問への支援内容は本研究と似ているが、この研究は文章問題を対象としており、図形問題作成支援は行っていない。

2.4 図形作問学習支援方略

良質な問題の作成が困難な学習者に対する作問支援の方略として、学習者に対して「制約」と「誘導」、「追加」、「誤りの示唆」を与えることを提案する。簡単な問題しか作成できない学習者に対しては「制約」と「追加」を与える。問題作成が行き詰まった学習者に対しては、「誘導」を行う。誤った問題を作成した学習者に対しては「誤りの示唆」を与える。

2.4.1 制約

作成する問題に必ず使用する条件を提示することである。学習者が作成する問題が限定されることで問題作成への導入が容易になると考えられる。

2.4.2 誘導

求める対象までの過程を学習者が見出せないときに与えるものである。これにより、求める対象までの過程が求められない学習者に対して行う支援である。

2.4.3 誤りの示唆

学習者が作成した問題の誤りを示唆する。学習者が作成した問題に誤りがある場合には、学習者に誤りを気づかせる必要がある。ここで、誤りを直接誤りの内容を指摘するのではない事

を強調したい。客観的に誤りが存在する場合において、学習者にとって主観的に秩序だっているのであるのならば、誤りを指摘されたとしても学習には繋がりにくい。学習者の意見を肯定した上で、学習者の予測を再現する。その再現した結果を学習者が考察することが認知的葛藤を生み、誤りを学習するのに有効であるとされている [7]。

2.4.4 追加

問題作成が終了した学習者を対象とする。完成した問題が単純である場合、学習者は良質な問題が作成できていない、と判断する。そこで、学習者が作成した問題を発展させることで、学習者は良質な問題作成の経験をさせることができる。

3 システム概要

図形作問学習と提案した方略をシステムで実現するために、学習者が問題をつくるために学習者からの入力と入力した内容を計算機が処理する内部処理が必要になる。

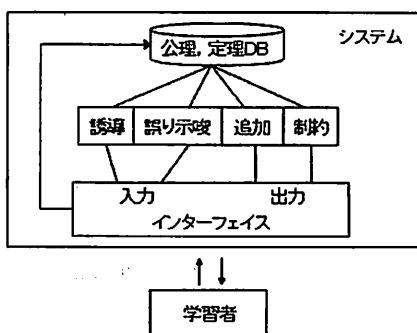


図 1: システム構成

3.1 学習者からの入力

学習者からの入力は「作図領域」、「数値入力領域」、「文型テンプレート領域」から成る。

学習者は作図領域に問題となる図形を作図する。作図領域における図形描画の基本は「点を置く」、「点の間を線で結ぶ」「点から円を描く」である。これ以外の機能として、「点を線上のみ

移動可能にする」や「線を内分する点を置く」といった問題を作るうえで有用だと思われる機能を持つ。

数値入力領域と文型テンプレートから、作図した図形の数値（長さ、角度など）や条件（平行、相似など）を入力する。この入力内容が問題と解答の過程になる。

これにより、数学図形問題が作成される。

3.2 内部処理

学習者が入力した図や数値、定理、公理をデータベースに問い合わせる。入力を基にそれぞれの機能を用いる。

3.2.1 制約機能

学習者が問題作成への導入としての機能である。制約として問題に含まれるべき図形や定理が与えられる。学習者が問題作成を開始することができない場合と問題を発展させる場合に用いる。前者の場合、学習者からの入力が無い状況において学習者に対してシステムから提示される。後者の場合は、「追加」が学習者に提示された状況において、入力が無い場合にシステムから学習者に提示される。

3.2.2 誘導機能

システムから提示された制約与えられているか、もしくは、学習者から図形が入力されており、かつ、学習者からの入力が一定時間無い場合に用いる。このような場合、制約や入力された図形を問題の中で使用する。図形の性質や図形から推測される定理をシステムから出力することで学習者の問題作成を促す。

3.2.3 誤り示唆機能

学習者からの入力を元にシステムが問題を解く。システムが問題を解けなかった場合にこの機能を用いる。問題が解けなかったことをシステムが学習者に伝える。学習者が問題を修正できた場合には、機能を終了する。誤りを修正できなかった場合には、システムが何を求められなかったかを学習者に提示する。

3.2.4 追加機能

学習者が問題作成を完了した後にこの機能を用いる。作成した問題に含まれる図形、定理を制約として学習者に提示する。学習者が問題を発展的に扱うことで、学習者に良質な問題の作成を経験させることができる。

4 図形作問支援の例

上記を実装したシステムを用いた想定ケースを例として以下に記す。

学習者が三平方の定理を使って問題を作ることを思いつく。まず、学習者は直角三角形を描いた。「三角形 ABC は直角三角形である。AC=3cm, BC=5cm として、三角形 ABC の面積を求めよ。」という問題を作成した(図 2)。

学習者は三平方の定理を使用することしか考えていないので、システムはこの問題に「追加」させるようにする。しかし、学習者は他に思いつかず、「三角形 ABC は直角三角形である。AC=12cm, BC=13cm として、三角形 ABC の面積を求める問題を作った。

作成された問題は数値を変えただけの問題なので、システムは発展させるために「三平方の定理と円、相似を使った問題を作りなさい」という「制約」を提示する。そこで、学習者は同一の円周角を持つ図 3 のような状況で三角形 AEC と三角形 DEB が相似の関係にあることを思い出す。

学習者は三平方の定理を使いたいが、「直径に対する円周角の大きさは 90° である」という性質に気づいていないので、三平方の定理を組み込むことができない。そこで、システムは直径に対する円周角の大きさが 90° であることを A に提示する。そこで、学習者は CB が中心 O を通るような図 4 を描く。

学習者は三角形 ABC の面積を求める問題が作れると考える。学習者は AC=3cm, DB=2cm とする。BC=5cm となり、三平方の定理を使えば三角形 ABC の面積が求められると考える。図 4 を問題の図として、「A, B, C, D は同一円上にあり、AC=3cm, DB=2cm, CB は直径である。このとき、三角形 ABC の面積を求めよ。」という問題にすることを決めた。

学習者は CE=3cm, BE = 2cm を求められると考えているが、実際には求められない。システムは CE=?, BC=? と表示することで、学習者に CE と BC が求められないことを提示する。学習者は AE=3cm, DE=2cm という数値を入力し、CE と BC の長さを求めることができるようにする。「A, B, C, D は同一円上にあり、AD と BC の交点を E とする。三角形 ABC の面積を求めよ。ただし、AC, AE=3cm, DB, ED=2cm で、CB は円の直径である。」という問題を作る。

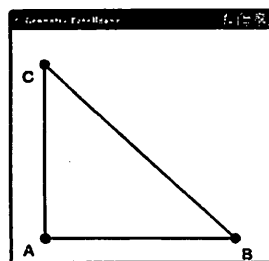


図 2: 初期状態：学習者が作成した図

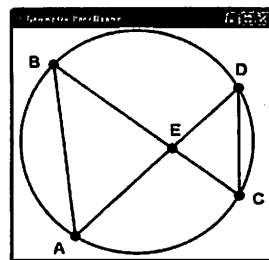


図 3: 制約「円」「相似」を参考に学習者が作成した図

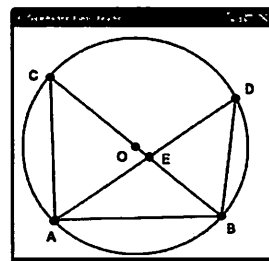


図 4: 誘導「直径に対する円周角は 90° 」を参考に学習者が作成した図

5 おわりに

本報告では、我々の目標、能動的な学習、支援の必要性を述べ、その上で、作問初学者がシステムと対話しながら徐々に問題作成に慣れていくための方略の提案、提案方略を計算機を用いて行うためのシステムの構成と実装について報告した。

今後の課題として、(1) 提案した支援内容の有効性の確認 (2) 本システムを開発し、評価実験により有効性を検証を行う。また、支援内容が妥当である場合、支援を行うタイミングについても考える必要がある。

参考文献

- [1] Silver E.A. On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 14, No. 1, pp. 19–28, 1994.
- [2] Noboru Matsuda and Kurt Vanlehn. Gramy: A geometry theorem prover capable of construction. *Journal of Automated Reasoning*, Vol. 32, pp. 3–33, 2004.
- [3] S.I. ブラウン, M.I. ワルター. いかにして問題をつくるか: 問題設定の技術. 東洋館出版社, 1990.
- [4] 竹内芳男, 沢田利夫 (編). 問題から問題へ. 東洋館出版社, 1984.
- [5] 中野明, 平嶋宗, 竹内章. 「問題を作ることによる学習」の知的支援環境. 電子情報通信学会論文誌, Vol. J83-D-I, No. 10, pp. 539–549, 2000.
- [6] 中野明, 柳原健志, 平嶋宗, 岡本真彦, 竹内章. 和と差の二項演算に関する作問学習支援環境利用による算数能力への影響調査. 日本教育工学会論文誌, Vol. 28, No. 3, pp. 205–215, 2004.
- [7] 平嶋宗, 堀口知也. Error awareness: 誤りへの気づきを支援する学習環境. 人工知能学会人工知能基礎論研究会, Vol. SIG-FAI-A003, pp. 59–64, 2000.