しりとりゲームのNP困難性

田 中 哲 朗†

「しりとりゲーム」[1] はしりとりを完全情報化して定義したゲームである。完全情報ゲームなので、使用可能な文字の種類、使用可能な単語の集合と開始文字を決めれば、勝敗は決定可能となる。
「しりとりゲーム」の勝敗に関してはグラフとして表現した時に勝敗が同じで辺の少ないグラフに簡約する方法、文字の種類を n としたとき、n=3 までは定数時間で勝敗を決定可能であることが分かっているが、n を増やしていったときに、効率的に勝敗を決定するアルゴリズムがあるかは分かっていなかった。
本論文では、しりとりゲームの勝敗の決定問題が文字の種類 n に対して NP 困難であることを示した。これにより、文字の種類によらずに、しりとりゲームの勝敗を効率的に求めるプログラムを書くのが困難であることが分かる。

NP-hardness of Word Chain Games

TETSURO TANAKA†

The word-chain game(SHIRITORI in Japanese) in which two players are assumed to know all the words can be modeled as a game on graph. When given a set of words with a word to start, it is theoretically possible to decide whther the first player can win the game or not because it is a game with perfect information.
As the alphabet size become bigger, problems become more difficult. I this paper, we show that problem is NP-hard.

1. しりとりゲーム

しりとりゲームは子供になじみの深いしりとりを完全情報ゲームとしたもので，以下のようにグラフ上のゲームとして定義される．

- 各文字を頂点，各単語を辺 (多重辺，自己ループを許す) 有向グラフ及び，開始文字を表す 1 つの頂点で局面を表現する．
- プレイヤー数は 2 名．
- 各プレイヤーは自分の手番に現在の文字を始点とする有向辺を 1 つ選び，有向辺の終点となる頂点に移動し，移動に用いた有向辺を削除する．
- 各プレイヤーが交互に繰り返し，合法手がなくなったプレイヤーが負けとなる．

2. 証明の流れ

始点固定の有向グラフのハミルトンパス問題は以下のように定義される．

- グラフ $G = (V, E)$ の指定した頂点からスタートして，すべての頂点を 1 度ずつ訪れるパスが存在する．

任意の有向グラフに対して，始点固定のハミルトンパスが存在するかどうかを決定する問題は，NP 完全問題に属する．これを元に、

- 任意の始点固定の有向グラフのハミルトンパス問題が
- 変換に要する時間が多項式時間で
- 変換された結果が多項式サイズであるような
- しりとりゲームの問題に変換され、
- その問題が先手必勝なら、元の有向グラフに指定された始点からのハミルトンパスが存在し，後手必勝なら元の有向グラフに指定された始点からのハミルトンパスが存在ない．

ことを示せば，しりとりゲームが NP 困難な問題であることが証明できる．

3. 変 換

3.1 ノードの変換

元のグラフ (以下では G=(V,E)) におけるノード (vi) は，変換されたしりとりゲームのグラフ (以下では G'=(V',E')) では図 1 のような部分グラフ (Vi) に

† 東京大学情報基盤センター
Information Technology Center, University of Tokyo
ktanaka@ecc.u-tokyo.ac.jp

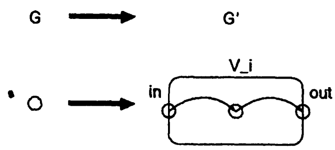

図 1 ノードの変換

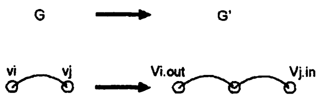

図 2 エッジの変換

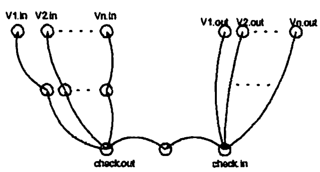

図 3 チェックのための構造

変換する．

3.2 エッジの変換

元のグラフで，vi から vj にエッジがあった時，変換されたしりとりゲームのグラフでは，図 2 のように，Vi.out から Vj.in への間に 1 つノードをはさんだエッジになる．

3.3 ハミルトンパスのチェック

上記の変換だけでは，ハミルトンパスとの対応が取れないので，チェック用に図 3 で表される構造を作成する． check.in はすべての i に関して，Vi.out から直接エッジが来ている．check.out からはすべての i に関して，Vi.in に 1 つノードを介して繋がっている．

3.4 スタート局面

元の問題で，スタートノードが vi だったとすると，しりとり問題では，Vi.in からスタートすることにする．G に vi をスタートノードとするハミルトンパスが存在するなら，G' で Vi.in からスタートする場合，先手必勝となり，G に vi をスタートノードとするハミルトンパスが存在しないなら，G' で Vi.in からスタートする場合，後手必勝となる．

4. 証　　明

G に vi をスタートノードとするハミルトンパスが存在する場合，G におけるハミルトンパスにしたがって，Vi を通過していく．パスの通過の際に複数の選択肢があるのは，Vi.out に来たときに，check.in にいくか，他の Vj へのエッジを選択するかだが，check.in にいかない限り，Vi.out に来るのは先手だけなので，後手はまったく選択権がない．

G の最後のノードに対応する Vi まできたら，Vi.out から check.in に行く．check.out に来て，初めて後手は V1.in から Vn.in までのパスのどれかを選択できるが，どれを選んでも Vi.in からのエッジは存在しないので，先手が最後にプレイして終わり，すなわち先手勝ちになる．

次に，G に vi をスタートノードとするハミルトンパスが存在しない場合を考える．この場合も，先手が選択権を保持してゲームを進める．Vi.out に来たときに，一度行ったことのある Vj へのエッジを選択すると，相手が最後にプレイして Vj.in にたどり着き，そこで手がないので後手勝ちになるので，そのような手は生成しないことにする．いつかは，check.in にいく手を生成することになるが，vi をスタートノードとするハミルトンパスが存在しないことから，この時点で，まだ通っていない Vj が存在する．

後手は，check.out から Vj への辺を選択する．後手は，Vj.in でまだ手があるので選択し，Vj.out で，check.in へのエッジを選択する．すると，ここで先手は手がなくなっているので，先手は負けとなる．

例として，図 4 のハミルトンパス問題を考える．開始ノードは v1 であり，ハミルトンパス $(v1 \rightarrow v2 \rightarrow v3 \rightarrow v4)$ が存在する．これを変換してできたしりとりゲーム問題は図 4 のようになる． これは，先手必勝局面になっている．一方，始点を v3 にしたハミルトンパス問題 (図 6) は，ハミルトンパスが存在しない．これを変換してできたしりとりゲーム問題 (図 7) は後手必勝局面になっている．

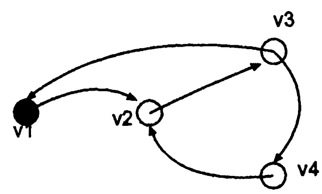

図 4 ハミルトンパス問題の例 (1)

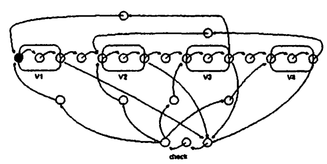

図 5 変換後のしりとりゲームの例 (1)

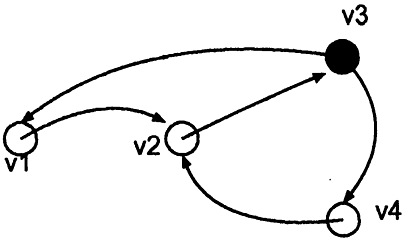

図 6　ハミルトンパス問題の例 (2)

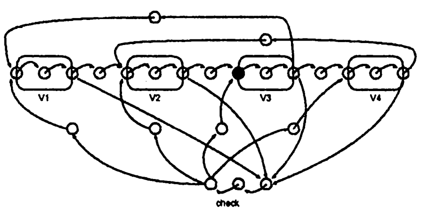

図 7　変換後のしりとりゲームの例 (2)

5. 結　　論

以上の議論により、しりとりゲームの勝敗の決定問題が文字の種類 n に対して NP 困難であることを示した。これにより、文字の種類によらずに、しりとりゲームの勝敗を効率的に求めるプログラムを書くのが困難であることが分かる。

なお、しりとりゲームに関する計算量的な議論としては、更に難しいクラス (PSPACE-完全) に属しているかどうか、また文字の種類 n を固定したときに、単語の種類に対する計算量などが残っている。

参 考 文 献

1) 伊藤隆, 田中哲朗, 胡振江, 武市正人: しりとりゲームの数理的解析, 情報処理学会論文誌, Vol.43, No. 10, pp. 3012–3020 (2002).