

# しりとりゲームの数理的解析

伊藤 隆† 田中 哲朗††  
胡 振江† 武市 正人†

‘しりとり’を完全情報ゲームとして数学的に定義した‘しりとりゲーム’を考えると、グラフ上のゲームとしてモデル化することができる。これは完全情報ゲームであるため理論上は解けることになるが、問題のサイズが大きくなるにつれ全探索は困難となる。本論文では、しりとりゲームに関する解析を行い、ゲームを効率的に探索する手法を提案する。この手法は数理的解析、探索の効率化の二つの部分から成っており、数理的解析としてグラフのより簡単な形への変形を行っている。加えて、しりとりゲームにおける先手の勝率に関して実験、考察を行う。

## An Analysis of Word Chain Games

TAKASHI ITO,<sup>†</sup> TETSURO TANAKA,<sup>††</sup> ZHENJIANG HU<sup>†</sup>  
and MASATO TAKEICHI<sup>†</sup>

The word-chain game (SHIRITORI in Japanese) in which two players are assumed to know all the words can be modeled as a game on graph. When given a set of words with a word to start, it is theoretically possible to decide whether the first player can win the game or not because it is a game with perfect information, but it is practically difficult to find the solution because of the huge searching space. In this paper, we propose a mathematical approach to finding a solution to the word-chain game. We show how to simplify the game by means of mathematical analysis, and give a more efficient searching algorithm. In addition, we examine the possibility for the first player to win the game. Our experimental results show that our approach is quite promising.

### 1. はじめに

日本の子供になじみの深い‘しりとり’は、語彙、記憶力と注意力（‘ん’で終わる単語を選択しない）で勝敗が決まる多人数による遊びである。この‘しりとり’をあらかじめ使用可能な単語を制限して、それを単語帳として公開し、各プレイヤーはゲームのどの時点においても使用可能な単語を確認できるようにすると、戦略性を持つ完全情報ゲームとなる。本論文では、特に2人でプレイする場合を扱い、このゲームを‘しりとりゲーム’と呼ぶことにする。

しりとりゲームの局面は、各文字を頂点、各単語を辺とする（多重辺、自己ループを許す）有向グラフ、及び開始文字を表す1つの頂点で表現できる。各プレイヤーは自分の手番に、現在の文字を始点とする有向辺

を1つ選び、有向辺の終点となる頂点に移動し、移動に用いた有向辺を削除する。これを交互に繰り返し、合法手がなくなったプレイヤーが負けとなる。以上のように、しりとりゲームはグラフ上のゲームとしてモデル化される。このゲームは二人完全情報ゲームであるため理論上は局面のみから勝敗が決定できるが、決して自明なゲームではない。

ゲーム木を構成するという通常的手法による勝敗の判定は可能ではあるが、問題のサイズ（単語帳に含まれる単語の先頭と末尾に現れる文字の種類数  $n$ 、多重辺の最大重複度  $m$ ）が大きくなると、ゲーム木の分岐数が  $O(n)$ 、深さが  $O(mn^2)$  となり、全探索によって勝敗を決定することは不可能に近い。

本論文は、このしりとりゲームについて数理的な解析を行い、全探索をすることなく効率的に勝敗を決定する方法を提案する。

問題を解くためのアプローチとして、グラフにおける辺の数の減少、頂点数の減少、の2つの手法を主とした。前者に関してまず、一般に逆向きの有向辺の組の存在は勝敗に全く影響しないことを証明した。これ

† 東京大学 大学院 工学系研究科 計数工学専攻  
Department of Mathematical Engineering, School of Engineering, University of Tokyo  
†† 東京大学 情報基盤センター  
Information Technology Center, University of Tokyo

らの有向辺を相殺させることにより、任意の2頂点間の有向辺は全て同じ向きであるようにできる。同様に自己ループに関しても、その個数の偶奇性のみを考えればよいことになる。よって、対象とする局面のクラスが制限され、局面が大幅に簡略化される。後者に関しては、グラフが強連結成分分解可能な場合の分割統治法の利用や、入力元、出力先の頂点が共に決まっているような連続する2頂点の存在により、問題のサイズ  $n$  を小さくすることができる。これらの性質を用いて、 $n \leq 3$  のときには多重辺の最大重複度  $m$  にかかわらずゲームを一定時間で解くことに成功した。

探索問題として見た場合、一般には評価関数を用いて効率的に枝刈りをする手法などがある<sup>1)</sup>。しりとりゲームでは全局的に通用する良い評価関数を作ることは困難であるが、終盤に関しては終了までの予想手数をベースにした評価関数を用いることにより、効率的に探索できることを確認した。

また、石取りゲーム(ニム)<sup>2)</sup>に代表されるような‘着手ごとに局面が終局に近づき、着手できなくなると負け’という種類のゲームでは、局面を適当に与えると先手有利<sup>\*</sup>であることが多い。そこで、最初の文字を固定したランダムな局面におけるしりとりゲームの先手の勝率の評価を、簡単なモデル化のもとでの予想と、数値実験の双方の面から行った。この結果、モデルの妥当性を示す結果を得ることができた。

本論文の構成は次のようになっている。まず第2節でしりとりゲームをグラフ上のゲームとして数学的に定義し、第3節ではゲームを解きやすくするためのグラフの簡略化を行う。また第4節では探索の手法について触れている。第5節では先手の優位性について考察し、第6節にて全体のまとめを行う。

## 2. しりとりゲームのモデル化

一般に、しりとりというゲームのイメージは‘子供の遊び’‘語彙の多い方が勝つ’といったところではないだろうか。実際、ゲームは誰かが(まだあるはずの)言葉を思い付けずに終了することが大半である。もちろん語彙の多いほうが圧倒的に有利であり、また明確な戦略はそれほど存在しない。

一方、見方を変え、しりとりを完全情報ゲームと見るとどうだろうか。すなわち、単語の集合が予め与えられており、その中の単語のみを用いてしりとりを行う、とするのである。このゲームを二人<sup>\*\*</sup>で行えば完

全情報確定的有限二人ゼロ和ゲームとなるので、理論的には局面が与えられると必ず‘先手必勝’‘後手必勝’のいずれかが決まっていることになる。もちろん、探索空間の大きな他のゲームと同様、問題のサイズが大きくなるとゲームは容易には解けなくなる。本論文では、このゲームを解くための効果的な手法についての考察を与える。

ゲームについての議論に入る前に、まずはここでの‘しりとりゲーム’のルールを与えておく必要がある。

- 二人でプレイする。
- 用いることのできる単語の有限集合が与えられており、各プレイヤーに公開されている。
- 最初に使うべき文字  $X$  が決定されている<sup>\*\*\*</sup>。
- 先手のプレイヤーは、使用可能な単語の集合の中から、 $X$  で始まる単語を一つ選択する。以後、この単語は使用不可能となる。
- 次のプレイヤーは、‘前のプレイヤーが選択した単語の最後の文字’で始まる単語を一つ選択する。以後、この単語は使用不可能となる。
- これを繰り返し、単語が選択できなくなった方が負け。すなわち最後の単語を選択した者が勝者となる。

さて、このしりとりゲームは以下のような有向グラフ上でのゲームと考えることができる。

- 一つの頂点が一つの文字を表す。
- 一つの有向辺が、始点を最初の文字とし終点を最後の文字とする一つの単語を表す。
- プレイヤーは、現在の頂点を始点とする有向辺を一つ選び、その終点である頂点へ移動し、辺を削除する。
- 動けなくなった方が負け。

この有向グラフは、自己ループ、多重辺を許すという特徴を持つ。また、ゲームの性質より多重辺のそれぞれは区別されない。

例1 使用可能な単語の集合が {eat, egg, get, gift, see, song, take, text} であるとする。このとき、これに対応する有向グラフは図1のようになる。 □

このゲームにおける局面は(その時点での)単語の集合、次の先頭文字、次のプレイヤーによって表現されるが、このうち単語の集合については上で述べたことにより‘ある頂点から頂点への有向辺の数’のみが必要な情報となる。ここでは、局面を以下のように表現

<sup>\*</sup> ‘組む’ことにより強力なグループを作ることができるため、ゲームとして複雑な部類に属する。

<sup>\*\*</sup> 通常先手のプレイヤーが自由に決定できることが多いが、本質的な違いはない。

<sup>\*</sup> ランダムに与えた局面が先手必勝である確率が、後手必勝である確率よりも高いという意味。

<sup>\*\*</sup> 通常しりとりは複数人で行われるが、一般に複数人のゲームは

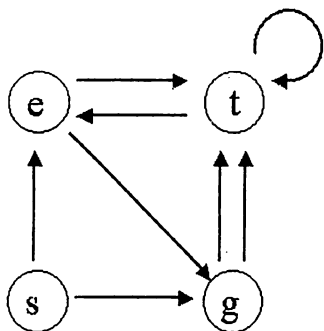


図1 例1の単語集合を表現するグラフ

することとする。括弧内はグラフにおける表現である。

$n$ : 文字の種類数 (頂点数)

$c_1, c_2, \dots, c_n$ : 各文字 (頂点)

$C_{ij}$ :  $c_i$  で始まり  $c_j$  で終わる単語 (有向辺)

$w_{ij}$ :  $c_i$  で始まり  $c_j$  で終わる単語の数 (有向辺の数)

$X$ : 次の先頭文字 (始点)

なお、 $n$  はこの問題のサイズを表す一つのパラメータであるが、サイズを表す別のパラメータとして多重辺における辺の数の最大値を  $m$  としておく。すなわち  $0 \leq w_{ij} \leq m$  である。

### 3. グラフの簡略化

世の中にはゲームと名のつくものがたくさんあるが、数学的なゲームからボードゲームまで、広範囲にわたり数多くのゲームが解析されている。<sup>1)3)</sup> 中には石取りゲーム<sup>2)</sup> のように、数学的な性質を用いて一般的に解かれているものもあるが、大半のゲームでは解析の際に多かれ少なかれ探索を用いている。しりとりゲームに関しても探索という手段を取ることはできるが、このゲームでは各局面での合法手が  $O(n)$  あり、終了までの手数が  $O(mn^2)$  と探索空間が非常に広く、単純な全探索は事実上不可能である。そこで我々は、ゲームとグラフの性質に注目し、ゲームの勝敗に関係のない範囲でグラフを簡略化し、そのうえで探索するという手法を用いた。グラフの簡略化の方法は次のように大きく三つに分けられる。

- (1) 逆向きの有向辺の相殺
- (2) 頂点の削除
- (3) 問題サイズ  $n$  が小さいときの直接解法の利用

以下、各手法について説明する。

#### 3.1 逆向きの有向辺の相殺

実はこのゲームには数理的な性質があり、これによ

て探索空間を大幅に減らすことができる。

**定理 1** ある局面における勝敗の結果と、任意の  $i, j$  を選び  $w_{ij}, w_{ji}$  を 1 ずつ増やした局面の勝敗の結果は一致する。

**証明**

もとの局面で先手必勝なら、先手はもとの局面での最善手をプレイすればよい (増えた単語  $C_{ij}, C_{ji}$  の存在を無視する)。後手が '増えた'  $C_{ij}, C_{ji}$  のどちらかをプレイしてきたときに、その直後のプレイでその逆をプレイし、 $C_{ij}, C_{ji}$  の一セットがない状態に帰着させることができる。もとの局面が後手必勝ならば後手側が同じ戦略をとる (自ら  $C_{ij}, C_{ji}$  の増えたセットに手を付けることはなく、先手が一方をプレイした直後にもう一方をプレイする)。

ここでとられている戦略は、'必勝側のプレイヤーは相手の出方に合わせてプレイする' というものであり、同じ戦略が他の多くのゲームにも見られる。

**系 1** ある局面における勝敗の結果と、任意の  $i, j$  を選び  $w_{ij}, w_{ji}$  を 1 ずつ減らした局面の勝敗の結果は一致する。

よって、ある局面が与えられたとき、実際には任意の  $i, j$  について  $w_{ij}, w_{ji}$  の一方 (もしくは両方) を 0 にした等価な局面を考えればよい。グラフ上では、ちょうど逆向きになっている有向辺を一本ずつ相殺させ、一方向の有向辺のみを残すことに相当する。また、自己ループ  $w_{ii}$  は偶奇性のみを考えればよいことになる。仮に簡略化前の各  $w_{ij}$  が  $0 \leq w_{ij} \leq m$  の一様分布に従うとすれば、合法手はおよそ半数に、終了までの手数も平均して  $1/3$  以下になるので、探索空間が大幅に減少することになる。

**例 2** 例1で現れた局面に本簡略化を施した状況を図2に示す。

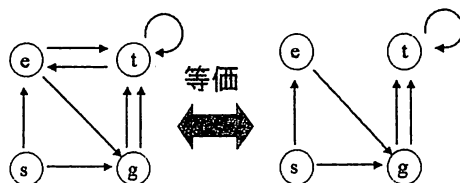


図2 簡略化の例

### 3.2 頂点の削除

#### 3.2.1 強連結成分分解による問題の分割

しりとりゲームの局面をグラフで表現したとき、グラフが強連結成分分解可能な場合がある。また、前節

の手法を用いて辺を削除することにより可能になる場合もある。このような場合、問題を分割して解くことにより問題サイズ  $n$  を減少させることができる。

グラフが強連結成分分解可能な場合、頂点の集合  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  を  $A, B$  の二つに直和分割し、 $B$  から  $A$  への有向道が存在しないようにできる。ここではこの分割を  $A \Rightarrow B$  と表記する。グラフの始点  $X$  が  $B$  に属していれば、以降  $A$  に属する頂点に到達することはないので、問題を  $B$  の内部のみに限定して解くことができる。一方、 $X$  が  $A$  に属する場合、 $B$  におけるゲームを解くことにより全体のグラフを簡略化することができる。

**定理 2** グラフの頂点が  $A \Rightarrow B (X \in A)$  と分割でき、 $B$  の内部のみからなるしりとりゲームが解けたとす。このとき以下が成り立つ。

- (1)  $B$  の内部において  $c_i$  を始点とするゲームが先手必勝ならば、 $c_j \in A$  なるすべての  $j$  について  $w_{ji} = 0$  としてよい。
- (2)  $B$  の内部において  $c_i$  を始点とするゲームが後手必勝であるとする。  $c_j \in A, w_{ji} > 0$  なるすべての  $c_j$  からなる集合を  $A^{c_i}$  としたとき、すべての  $c_j \in A^{c_i}, c_k \in A$  について  $w_{kj} = 0$  としてよい。

証明

(1) の場合、 $C_{ji}$  なる辺を選択すると直ちに相手に必勝を与えることになる。よってゲームに勝つためには  $C_{ji}$  は決して選択されない。ゆえに  $w_{ji} = 0$  としても勝敗には影響しない。(2) の場合でも同様で、自分から  $c_j \in A^{c_i}$  に属する頂点に移動すると相手は  $c_i$  に移動することで勝つことができる。よってゲームに勝つためには  $c_j \in A^{c_i}$  に移動する辺は決して選択されない。ゆえに  $w_{kj} = 0$  としても勝敗には影響しない。 □

$B$  の内部において  $c_i$  を始点とするゲームが後手必勝であるような全ての  $A^{c_i}$  の和集合を  $A^*$  とする。定理 2 での辺の削除を  $B$  の全ての頂点に関して行くと、 $A$  に属する頂点のうち  $B$  に到達できるものは  $A^*$  に属するものだけとなり、 $X \in A^*$  の場合先手必勝となる。 $X \in A \setminus A^*$  の場合は  $B$  に到達することはなく、 $A \setminus A^*$  の内部だけでゲームを解けばよい。以上、グラフを  $A \Rightarrow B$  と分割して解くことにより全体が解けることが示された。

**例 3** 図 3 のグラフで表される、始点を  $a$  とするしりとりゲームを考える。このグラフは強連結成分分解可能であり、 $A = \{a, d, n, p, r, y\}, B = \{e, g, s, t\}$  とするとグラフは  $A \Rightarrow B$  と分割されている。 $B$  の内

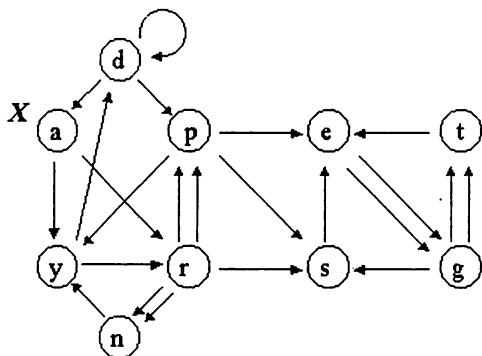


図 3 もとのしりとりゲーム

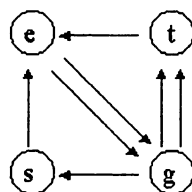


図 4 図 3 の部分ゲーム

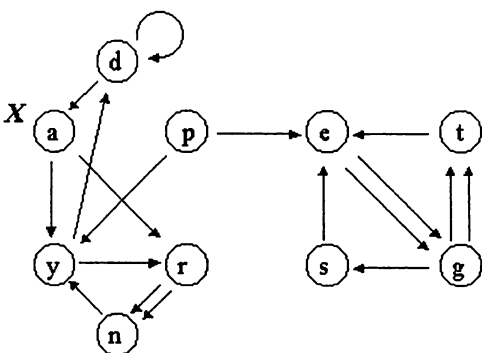


図 5 図 3 から辺を削除して問題を分離したもの

部のみからなる部分ゲーム (図 4) を解くと、始点を  $s$  としたとき先手必勝、始点を  $e$  としたとき後手必勝である。従って定理 2 の (1) より  $A$  から  $s$  への辺を削除でき、また (2) では  $A^* = \{p\}$  となるので  $A \setminus \{p\}$  から  $p$  への辺を削除できる (図 5)。その結果、始点  $a \in A \setminus A^*$  から  $B$  に到達することはなくなるので、解くべき対象は図 6 のグラフとなり、探索空間を小さくすることができた ( $a \rightarrow r$  として先手の勝ち)。 □

グラフが強連結成分分解可能な場合は一般には二つ以上の部分に分割できるので、シンク側から順に解いてゆくことにより、ゲーム全体がより少ない計算量で

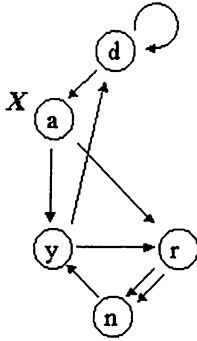


図6 図3を簡略化したしりとりゲーム

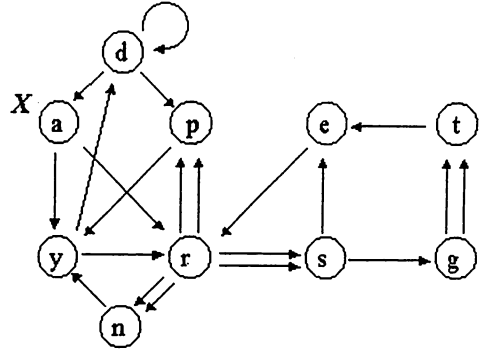


図7 もとのしりとりゲーム

解けることになる。問題のグラフが疎であるときに特に有効な手段である。

### 3.2.2 不要な頂点の削除

入力元, 出力先が常に一つの頂点に決まっているような頂点を簡略化することはできるだろうか? 残念ながら, この頂点は‘手番を変えずに別の頂点に移動する’という特殊な役割を持つことになるので, このままでは簡略化することはできない。しかし, このような頂点が2つ続くと, 条件によっては簡略化できることがある。

**定理3**  $w_{ij} > 0, w_{jk} > 0, w_{kl} > 0, w_{i'j} = w_{j'k} = w_{jk'}$  を満たす4頂点  $c_i, c_j, c_k, c_l$  があるとす (ただし  $X \neq c_j, c_k$ )。このとき, 条件  $w_{ij} \leq w_{jk}$  を満たせば, 頂点  $c_j, c_k$  を取り除き ( $w_{ij} = w_{jk} = w_{kl} = 0$ ), かわりに  $w_{il} = w_{il} + \min(w_{ij}, w_{kl})$  とすることによりグラフを簡略化できる。

証明

条件より,  $C_{ij}, C_{jk}, C_{kl}$  は(辺の数が許す限り)揃って一つずつ使用される。頂点  $c_i$  において  $C_{ij}$  を選択しこの三つの辺を使用すると, 手番が入れ換わり頂点  $c_l$  に到達する。これは  $C_{il}$  を使用したときの挙動に等しい。

- (1)  $w_{ij} \leq w_{jk}, w_{ij} \leq w_{kl}$  のとき  
 $C_{ij}, C_{jk}, C_{kl}$  はちょうど  $w_{ij}$  回使用でき, これ以上は  $C_{ij}$  がなくなるので選択できない。これは  $C_{ij}, C_{jk}, C_{kl}$  のかわりに  $C_{il}$  が  $w_{ij}$  個あるのと等価である。
- (2)  $w_{ij} \leq w_{jk}, w_{ij} > w_{kl}$  のとき  
 三つの辺のうち最初に  $C_{kl}$  がなくなる。  $w_{kl}$  回までは  $C_{ij}$  を選択できるが, 次に  $C_{ij}$  を選択すると  $C_{kl}$  がないため負けてしまう。よって結局  $C_{ij}$  は  $w_{kl}$  回しか選択できず, これは

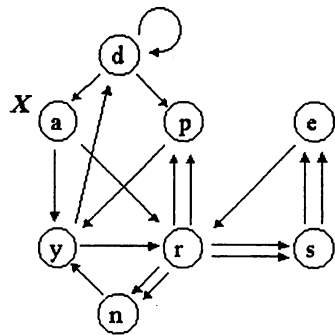


図8 図7を簡略化したしりとりゲーム

$C_{ij}, C_{jk}, C_{kl}$  のかわりに  $C_{il}$  が  $w_{kl}$  個あるのと等価である。 □

**例4** 図7のグラフで表される, 始点を a とするしりとりゲームを考える。頂点  $s \rightarrow g \rightarrow t \rightarrow e$  に定理3が適用でき, 頂点  $g, t$  が削除できる(図8)。さらに, 4頂点の最初と最後は一致していても支障はないので, 図8において, 頂点  $r \rightarrow s \rightarrow e \rightarrow r$  に定理3を適用することができる。結果, 解くべき対象は図9のグラフとなり, 探索空間を小さくすることができた(a → yとして先手の勝ち)。 □

この手法が適用できれば頂点を二つ減らすことができるので確かに探索の手間が省けるが, 実際に適用できるための条件は厳しい。

### 3.3 問題サイズ $n$ が小さいときの直接解法

前項まではグラフの簡略化を考えてきたが, これにより問題のサイズ  $n$ , すなわちグラフの頂点数が一定以下になれば, ゲーム木の探索を行うことなくゲームを解くことができる。特に,  $n \leq 3$  の場合には多重辺の重複度  $m$  に依存しない一定時間で勝敗を決定でき

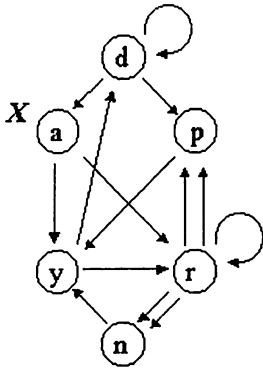


図9 図8からさらに簡略化したしりとりゲーム

ることを確認した。以下の局面は全て‘逆向きの有向辺の相殺’の簡略化を行ったものであるとする。本節では  $X = c_1$  として考え、また対称性により導かれる結果については省略する。以下では先手必勝を○、後手必勝を×で表した。

### 3.3.1 $n = 2$ の場合

簡略化をすると、自己ループ以外には  $w_{12}, w_{21}$  のうち一方しか残らないので  $m$  に依存せずにゲームを解くことができる。

- (1)  $w_{12} > 0$ 
  - (a)  $w_{22} = 0 \rightarrow \bigcirc, C_{12}$  で勝ち。
  - (b)  $w_{22} = 1, w_{11} = 1 \rightarrow \bigcirc, C_{11}$  で勝ち。
  - (c)  $w_{22} = 1, w_{11} = 0 \rightarrow \times$
- (2)  $w_{12} = 0$ 
  - (a)  $w_{11} = 1 \rightarrow \bigcirc$
  - (b)  $w_{11} = 0 \rightarrow \times$

### 3.3.2 $n = 3$ の場合

$n = 2$  の場合に比べると多少複雑になるが、 $n = 3$  のときも  $m$  に依存せずにゲームが解けることがわかった。

ある頂点から他の頂点への有向辺が二つとも残っている場合、問題は  $n = 2$  の場合に帰着される。そうでない場合は  $c_1, c_2, c_3, c_1, \dots$  のようなサイクルが現れるので、これについて考えればよいことになる。以下、詳細な説明は省き、場合分けを列挙する。

- (1)  $w_{12} = 0, w_{13} = 0$   
 $c_1$  だけの場合に帰着、すなわち
  - (a)  $w_{11} = 0 \rightarrow \times$
  - (b)  $w_{11} = 1 \rightarrow \bigcirc$
 以降、より小さい問題に帰着される場合は省略。
- (2)  $w_{21} = 0, w_{31} = 0$ 
  - (a)  $w_{11} = 0 \rightarrow$   
 一手進めると  $c_2, c_3$  だけの場合に帰着。

- (b)  $w_{11} = 1 \rightarrow \bigcirc,$   
 $C_{12}$  か  $C_{13}$  が選べて必勝になる場合は勝ち、でなければ  $C_{11}$  を選べば相手に勝ちが存在しない。

- (3)  $w_{12} > 0, w_{31} > 0$  (このとき  $w_{21} = 0, w_{13} = 0$ )

- (a)  $w_{23} = 0 \rightarrow c_1, c_2$  だけの場合に帰着。
- (b)  $w_{23} > 0 \rightarrow$   
 $c_1, c_2, c_3, c_1, \dots$  のサイクルが存在。  
 最大連鎖長  $mcl$  を以下で定義する。  
 $mcl = w_{11} + w_{22} + w_{33} + cycle\_length$   
 $cycle\_length =$

$$\begin{cases} 3w_{12}, & \text{if } w_{12} \leq w_{23}, w_{12} \leq w_{31} \\ 3w_{23} + 1, & \text{else if } w_{23} \leq w_{31} \\ 3w_{31} + 2, & \text{otherwise} \end{cases}$$

- (i)  $mcl$  が奇数  $\rightarrow C_{11}, C_{22}, C_{33}$  をすべて処理できれば先手必勝。

$$w_{12} = w_{22} = w_{33} = 1, w_{11} = 0 \rightarrow \times (mcl = 5, \text{ 例外})$$

otherwise

$$\rightarrow \bigcirc$$

- (ii)  $mcl$  が偶数  $\rightarrow C_{11}, C_{22}, C_{33}$  をすべて処理できれば後手必勝。

$$w_{12} = w_{33} = 1, w_{11} = w_{22} = 0 \rightarrow \bigcirc (mcl = 4, \text{ 例外})$$

$$w_{12} = w_{11} = w_{22} = w_{33} = 1$$

$$\rightarrow \bigcirc (mcl = 6, \text{ 例外})$$

$$w_{12} \geq 2, w_{23} = w_{11} = w_{33} = 1, w_{22} = 0$$

$$\rightarrow \bigcirc (mcl = 6, \text{ 例外})$$

otherwise

$$\rightarrow \times$$

- (4)  $w_{21} > 0, w_{13} > 0$  (このとき  $w_{12} = 0, w_{31} = 0$ )

(3) と対称なので同様。

### 3.3.3 $n \geq 4$ の場合

$n = 4$  の場合、‘逆向きの有向辺の相殺’の簡略化を行い、対称性を考慮すると、グラフの形<sup>☆</sup>は ( $n \leq 3$  に帰着されるものを除き) 本質的に一意に定まることがわかった (図 10)。図中の太矢印は、矢印の向きに 0 本以上の有向辺があることを表している。

このうち限られた場合については一定時間で解けることが判明したが、 $n = 4$  全般について一定時間で勝敗を判定する方法を見つけることはできていない。

<sup>☆</sup> 頂点間の有向辺がどちら向きであるかの位相のみを考えたもの。自己ループは考慮に入れない。

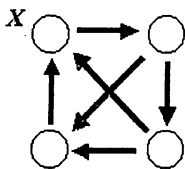


図 10  $n = 4$  のグラフの形

また逆に、一定時間では解けないという証明もできていない。これらをはっきりさせることが課題の一つとなっている。

さらに  $n > 4$  になるとグラフの形が一意に定まらず、問題はより複雑となる。一般には、たとえ  $n$  を固定して考えても、 $m$  に依存しない計算量でゲームを解く方法は存在しないのでは、と我々は予想している。

#### 4. 探索の効率化

前節までに、与えられたグラフを簡略化するというアプローチを行ってきた。しかしながら、問題が常に自明な形まで簡略化できるわけではなく、最終的には(一部簡略化された)グラフの全探索に頼らざるを得ない。ここでは、探索において有効な手法について述べる。

一般に、ゲーム木探索では静的評価などで‘良さそうな手’を選び、良い順番に探索を行っていくと良い結果が得られることが多い。これは MiniMax 木における  $\alpha - \beta$  カット<sup>4)</sup>の際、予め良い評価値が得られていると効果的に枝刈りが行われる、ということに起因する。

一方、しりとりゲームにおいては現状では‘良さそうな手’を選ぶ評価基準が存在しない。かわりに、‘はやく結着がつきそうな手’から探索する手法 (branch-ordering) を考える。これは、AND-OR 木については勝敗のみが評価され、一つのノードが評価されると直ちに一つ上のノードが評価できる、という状況が生じやすいためである。‘はやく結着がつきそうな手’については初期値の  $w_{i_0}$  が小さいような  $c_i$  で終わる単語を優先的に選択するものとした。

この手法を実装し、通常の方法との比較シミュレーションを行った。実験方法を以下に示す。

- ‘逆向きの有向辺の相殺’の簡略化を行ったあとの同一局面に対して勝敗の判定をそれぞれ行い、探索ノード数を比較。
- 探索ノード数が  $2^{25}$  を越えた場合は打ち切り、勝敗不明とする。
- 異なる  $m, n$  に対し 1000 局面ずつ評価。

実験の結果を図 11, 12, 13 に示す。図中の一点が一

局面に相当し、横軸は通常の探索に要したノード数、縦軸は branch-ordering を用いた際に要したノード数である。斜線の下の方の点ほど branch-ordering の効果が現れたものとなっている。なお、図には勝敗を判定できずに探索を打ち切った局面に関するプロットしてある(端近くの点の集まり)。

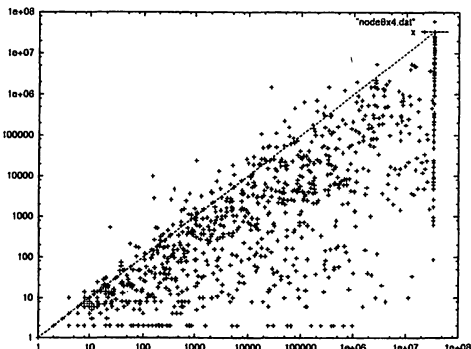


図 11  $n = 8, m = 4$  の場合の探索ノード数  
(横軸:通常探索, 縦軸:branch-ordering)

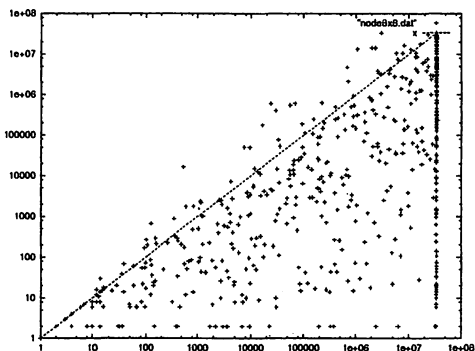


図 12  $n = 8, m = 8$  の場合の探索ノード数  
(横軸:通常探索, 縦軸:branch-ordering)

表 1 探索の終了した局面の数 (1000 局面中)

	$n=8, m=4$	$n=8, m=8$	$n=10, m=4$
通常探索	894	427	331
branch-ordering	970	626	606

いずれの場合も、branch-ordering を行うことによって(たまに逆効果になることがあるにしても)探索にかかるノード数は大幅に減少しており、平均的に数倍から数十倍の効果が得られている。また、当然ではあるが探索が正常終了する頻度も高くなっている。

一方、問題のサイズに対する探索の複雑さの変化で

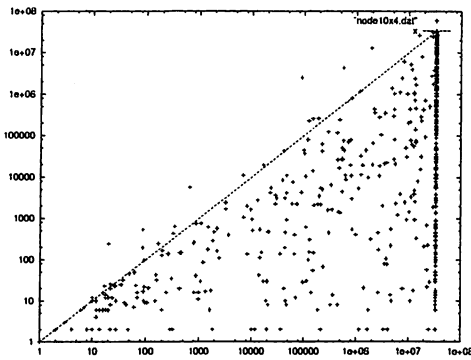


図 13  $n = 10, m = 4$  の場合の探索ノード数  
(横軸:通常の探索, 縦軸:branch-ordering)

あるが, 表 1 からわかるように  $m$  の増加よりも  $n$  の増加の方が大きく影響を与えているようである。手数が増えるよりも分岐数が増える方が全体的な複雑度が上がるので, これは妥当な結果と言えるであろう。

### 5. しりとりゲームにおける先手の優位性

石取りゲームでは局面がランダムに与えられると先手側の勝率の方が高いことが知られている。これはまず先手に選択権が与えられるからであり, しりとりゲームに関しても全く同じことが言える。

しりとりゲームにおいて, ある局面とその一手先の局面の勝敗に相関がないと仮定しよう。先手の勝率を  $p$ , 簡略化後の平均分岐数を  $k$  とする。後手側の勝ちになるためには, 先手が移行し得るどの局面においても後手にとって '先手必勝' である必要があるため, 後手の勝率は  $p^k$  であると考えることができる。これより, 先手の勝率  $p$  に関する次の予想が立てられる。

$$p + p^k = 1$$

一方, 前節の実験から先手の勝率を計算することができる。これらの数値を比較したものが表 2 である。例えば表 2 の最初の行は,  $n = 8, m = 4$  としたシミュレーションでは, 勝敗の判明した 971 局面\*\* 中, 726 局面が先手の勝ちであったことを示している。

選択肢が増えると勝率が上がる様子が見られる。また, 予想と実験結果も大きくかけ離れてはいないようである。

表 2 先手の勝率

	予想	実験による結果
$n=8 (k=4)$	0.725	$726/971=0.748$
		$469/627=0.748$
$n=10 (k=5)$	0.755	$461/606=0.761$

### 6. ま と め

しりとりをグラフ上のゲームとしてモデル化し, 勝敗の判定法に関する考察を行った。ゲームの性質などからグラフを簡略化し, 問題の規模を小さくすることは可能ではあるが, 現時点で完全に解けているのは頂点数  $n \leq 3$  の場合のみであり, 最終的には全探索に頼る必要がある。 $n \geq 4$  の場合におけるより深い考察が今後の課題である。

石取りゲームを代表とする数多くのゲームが数理的に研究されている<sup>3)</sup> が, しりとりゲームのような '自分の着手が直前の相手の着手に制限される' ゲームは意外と少なく, 表立って研究対象とされていないように思える。この '制限' がゲームの解析を困難にしている本質かもしれないが, 今後さらなる調査が必要などころである。

### 参 考 文 献

- 1) 松原 仁, 竹内 郁雄 編, ゲームプログラミング, 共立出版, 1997.
- 2) 一松 信, 石とりゲームの数理, 森北出版, 1968.
- 3) Elwyn R. Berlekamp, John H. Conway, Richard K. Guy, Winning Ways: second edition, A K Peters, 2001.
- 4) Knuth D. E., Moore R. W., An Analysis of Alpha-Beta Pruning, Artificial Intelligence, Vol. 6, No. 4, 293-326, 1975.

\* 当然 local には相関もあるだろうが, 全体で見ればこの仮定は自然である。逆に相関があれば問題解決の足がかりにもなるのだろうが...

\*\* 表 1 の数値と異なるのは, 通常の探索では勝敗が判定できたが, branch-ordering では勝敗が判定できなかった局面が存在するためである。