一般行列の固有値問題*

中　島　勝　也**

1.　相似変換と標準形

Aをn次の正方行列とし，xをn次元ベクトルとする．λをスカーラーとするとき，

$$Ax=\lambda x \tag{1.1}$$

を満足するλは，Aの固有方程式

$$|A-\lambda I|=(-1)^n f(\lambda)$$
$$=(-1)^n(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_n)=0 \tag{1.2}$$

の根であり，$f(\lambda)=0$ の n 個の根を λ_1, λ_2, ……, λ_n とすると

$$f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots\cdots(\lambda-\lambda_n) \tag{1.3}$$

を満足する．これらの値 λ_i に対して，0 でないベクルトル u_i が存在して

$$Au_i=\lambda_i u_i \tag{1.4}$$

をみたす．(1.1) において

$$x=Sy \tag{1.5}$$

なるアフィン変換をほどこすと $|S|\neq 0$ のとき

$$S^{-1}ASy=\lambda y \tag{1.6}$$

となるから，固有値は正則なアフィン変換で変らない．

$$B=S^{-1}AS \tag{1.7}$$

なる S が存在するとき B は A に相似であるといい $S^{-1}AS$ を A の相似変換という．相似なる関係は反射律をみたす．

相似な行列は同じ固有値をもち，したがって固有方程式も同一である．

実際

$$|S^{-1}AS-\lambda I|=|S^{-1}(A-\lambda I)S|=|A-\lambda I|$$

したがって，また行列式の値，trace も相似変換で不変である．

$$|S^{-1}AS|=|A|,\ \mathrm{tr}(S^{-1}AS)=\mathrm{tr}(A)$$

相似変換は行列の階数，最低多項式も変えない．

$$C=\begin{pmatrix}0\cdots 0 & -c_n\\ 1\cdots 0 & -c_{n-1}\\ \vdots\ \ddots\ \vdots & \vdots\\ 0\cdots 1 & -c_1\end{pmatrix} \tag{1.8}$$

なる行列を $C(\lambda)=\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots+c_n=0$ の Companion matrix といい，その固有多項式は $(-1)^nC(\lambda)$ である．

$$|C-\lambda I|=(-1)^n(\lambda^n+c_1\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+c_n) \tag{1.9}$$

行列 C の固有ベクトルは，$C(\lambda)=0$ の1根を λ とすれば

$$\left.\begin{array}{ll}-\lambda x_1 & -c_nx_n=0\\ x_1-\lambda x_2 & -c_{n-1}x_n=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & x_{n-2}-\lambda x_{n-1}-c_2x_n=0\\ & x_{n-1}-(\lambda+c_1)x_n=0\end{array}\right\} \tag{1.10}$$

から $x_n=1$ とすれば，

$$\left.\begin{array}{l}x_n=1\\ x_{n-1}=\lambda+c_1\\ x_{n-2}=\lambda^2+c_1\lambda+c_2\\ \cdots\cdots\cdots\\ x_1=\lambda^{n-1}+c_1\lambda^{n-2}+\cdots\cdots+c_{n-1}\end{array}\right\} \tag{1.11}$$

と定まる，故に $C=S^{-1}AS$

と，なったとすると，C の固有ベクトルを v とするとき，A の固有ベクトルは Sv となる．

したがって，以下に述べる方法で C が定まるならば，代数方程式を解くことにより，固有ベクトルが求められる．ただし C の固有方程式が重根 λ をもてば，重複度のいかんにかかわらず λ に対する固有ベクトルは1個しか求まらない．この際固有空間の次元は n より小となる．これは後に例で示す．

Power method は，固有ベクトルがすべて独立で n 次元空間を張ることを前提にしているから，このような場合には，いかなる改良をしても固有ベクトルが定まらない．

$A=(a_{ij})$, $(i, j=1, 2, \cdots\cdots, n)$ において $a_{21}\neq 0$ であるとしよう．

a_{21} を枢軸として，第1列の要素を消去する Gaussian procedure は，

$$S_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -a_{11}/a_{21} & 0\cdots 0\\ 0 & 1/a_{21} & 0\cdots 0\\ 0 & -a_{31}/a_{21} & 1\cdots 0\\ \vdots & & \vdots\ \ddots\ \vdots\\ 0 & -a_{n1}/a_{21} & 0\cdots 1\end{pmatrix} \tag{1.12}$$

を行列 A の左側にかけることによって実行される．

* Eigen value problems of general matrices, by Katsuya Nakashima (School of Science and Engineering, Waseda University)

** 早稲田大学理工学部

行列 S_1 は,

$$S_1=\begin{pmatrix} 1 & a_{11} & 0\cdots 0 \\ 0 & a_{21} & 0\cdots 0 \\ 0 & a_{31} & 1\cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots\ \ddots\ \vdots \\ 0 & a_{n1} & 0\cdots 1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

であって，これを任意の行列の右にかけたとき，もとの行列の第2列でないすべての列は変化が起らない．したがって

$$S_1^{-1}AS_1=\begin{pmatrix} 0 & a_{12}^{(2)}\cdots\cdots a_{1n}^{(2)} \\ 1 & a_{22}^{(2)}\cdots\cdots a_{2n}^{(2)} \\ 0 & a_{32}^{(2)}\cdots\cdots a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)}\cdots\cdots a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix}=A^{(2)} \tag{1.14}$$

となる．ここで S_1 は第2列が A の第1列で，他は単位行列に等しい．次に $a_{32}^{(2)}\neq 0$ のときは $A^{(2)}$ の第2列を $a_{32}^{(2)}$ を枢軸として消去する Gaussian procedure に対応して S_2^{-1} が得られ，S_2 は第3列が $A^{(2)}$ の第2列で，その他は単位行列に等しい．

$$S_2^{-1}A^{(2)}S_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13}^{(3)}\cdots\cdots a_{1n}^{(3)} \\ 1 & 0 & a_{23}^{(3)}\cdots\cdots a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 1 & a_{33}^{(3)}\cdots\cdots a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)}\cdots\cdots a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix}=A^{(3)} \tag{1.15}$$

$S_2^{-1}A^{(2)}S_2=(S_2S_1)^{-1}A(S_2S_1)$ となる．

かくして次々に，このような変換が行なわれるときには，$n-1$ 回の操作により

$$S_{n-1}^{-1}A^{(n-1)}S_{n-1}=\begin{pmatrix} 0 & 0\cdots\cdots 0 & a_{1n}^{(n)} \\ 1 & 0\cdots\cdots 0 & a_{2n}^{(n)} \\ 0 & 1\cdots\cdots 0 & a_{3n}^{(n)} \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots & \\ 0 & 0\cdots\cdots 1 & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix}=A^{(n)} \tag{1.16}$$

$$A^{(n)}=S^{-1}AS,\ ただし\ S=S_1S_2\cdots\cdots S_{n-1} \tag{1.17}$$

となる．

A が実数行列のときには，変換行列 S は実数行列であり，$A^{(n)}$ の固有値が実数であれば，それに対する固有ベクルトルも実ベクトルであり，変換 S により A の実固有ベクトルが得られる．$A^{(n)}$ の固有値が実数でなければ，それに対する固有ベクトルは複素ベクトルになるが，変換 S は実変換だから，その実数部と虚数部おのおの別々に S をかけてやれば，A の複素固有ベクトルが得られる．

したがって，実数でない固有値や固有ベクトルも計算は実数の場合とほとんど同じで，簡単に取り扱える．

もっと一般に，Aが複素数を要素とする行列の場合でも，あるいはまた任意の体における行列でもこの方法は適用できる．

例

$$A=\begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_1^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_1=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)}=S_1^{-1}AS_1=\begin{pmatrix} 0 & -28 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_2^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -7/4 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad S_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -28 & 0 \\ 0 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{(3)}=S_2^{-1}A^{(2)}S_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & -3/4 \\ 1 & 0 & -32 & 3/4 \\ 0 & 1 & 11 & -1/16 \\ 0 & 0 & 16 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} \quad S_3^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -11/16 \\ 0 & 0 & 0 & 1/16 \end{pmatrix}$$

$$A^{(4)}=S_3^{-1}A^{(3)}S_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 48 \\ 0 & 1 & 0 & -44 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{pmatrix}$$

A の固有方程式：$\lambda^4-12\lambda^3+44\lambda^2-48\lambda+16=0$

$$(\lambda^2-6\lambda+4)^2=0$$

A の固有値：$\lambda_1=\lambda_2=3+\sqrt{5}\quad \lambda_3=\lambda_4=3-\sqrt{5}$

$A^{(4)}$ の固有ベクトル

$3+\sqrt{5}$ に対するもの $\begin{pmatrix} -12+4\sqrt{5} \\ 22-6\sqrt{5} \\ -9+\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$,

$3-\sqrt{5}$ に対するもの $\begin{pmatrix} -12-4\sqrt{5} \\ 22+6\sqrt{5} \\ -9-\sqrt{5} \\ 1 \end{pmatrix}$

$$S=S_1S_2S_3=\begin{pmatrix} 1 & 6 & 44 & 296 \\ 0 & 4 & 48 & 400 \\ 0 & 4 & 32 & 224 \\ 0 & 4 & 48 & 416 \end{pmatrix}$$

A の固有ベクトル

$3+\sqrt{5}$ に対するもの $\begin{pmatrix} 20+12\sqrt{5} \\ 56+24\sqrt{5} \\ 24+\ 8\sqrt{5} \\ 72+24\sqrt{5} \end{pmatrix}$,

$3-\sqrt{5}$ に対するもの $\begin{pmatrix} 20-12\sqrt{5} \\ 56-24\sqrt{5} \\ 24-\ 8\sqrt{5} \\ 72-24\sqrt{5} \end{pmatrix}$

この行列は Aitken (2) から引用した.

行列Aの固有ベクトルが2本しかないから，Power method では，初めにえらぶベクトルが固有平面内になければ固有値も固有ベクトルも得られない．固有ベクトルの作り方から，固有値がすべて単根で，等根がなければ，固有空間は全空間と一致することが推察できよう．

この方法は A.M. Danilevskii (1) が考案した. (D.K. Faddeeva (1))．固有方程式の係数を定める方法としても，計算量が少なくて，計算時間も速い. (Robinson M. (1))．Ramo-Wooldridge の Remington Rand 1103 A で試された結果，他の方法に較べて非常に速かったということである．(中西俊男(1))．筆者も現在多くの方々の協力を得て計算中であるが，先の例に見たように，この方法は単に固有値を求めるのみならず，固有問題全般を解決する容易な方法であることに着目し，その際の計算手続を考察した．

2.　枢軸が 0 になるときの処置

消去の過程において枢軸が0になるときには，上述の方法は，そのままでは行なえない．このときには枢軸が0でなくなるような適当な行および列の入れかえをするか，または行列の直和分解に対する処置をする．(Companion matrices への直和分解については文献 G. Kowalewski (1)，W. Krull (1) および C.C. Macduffee (1) 参照)

たとえば $A^{(1)}=A$ とし $A^{(i)}$ の枢軸 $a_{i+1,i}^{(i)}=0$ となったとしょう．

（1） $a_{i+1,i}^{(i)}$ の下にある0でない要素を探して $a_{j,i}^{(i)}\neq 0$ であったとしよう．そのとき $i+1$ 行と j 行とを入れかえるのには，permutation matrix $P_{i+1,j}$ を $A^{(i)}$ の左にかければよい．

$$P_{i+1,j}^{-1}=P_{i+1,j} \tag{2.1}$$

であるから，$P_{i+1,j}^{-1}$ を $P_{i+1,j}A^{(i)}$ の右にかければ，これは $i+1$ 列と j 列との入れかえを行なうことに相当する．かくして相似変換

$$P_{i+1,j}^{-1}A^{(i)}P_{i+1,j} \tag{2.2}$$

によって，新らしい枢軸は $a_{j,i}^{(i)}$ となり，これは仮定により0でない．またこの変換で第 i 列より左は不変であることもすぐにわかる．

（2） $a_{i+1,i}^{(i)}$ とその下にある要素がすべて0であるときには，$A^{(i)}$ は次のようにかける．

$$A^{(i)}=\left(\begin{array}{cccc|ccc} 0 & & \cdots 0 & a_{1i}^{(i)} & a_{1,i+1}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{1,n}^{(i)} \\ 1 & 0 & \cdots 0 & a_{2i}^{(i)} & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots 0 & a_{3i}^{(i)} & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\ 0 & 0 & \cdots 1 & a_{ii}^{(i)} & a_{i,i+1}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{i,n}^{(i)} \\ \hline & & & & a_{i+1,i+1}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{i+1,n}^{(i)} \\ & & 0 & & \vdots & & \vdots \\ & & & & a_{n,i+1}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{n,n}^{(i)} \end{array}\right) \tag{2.3}$$

これは $A^{(i)}$ の固有多項式が $\lambda^{i}-a_{ii}^{(i)}\lambda^{i-1}-\cdots-a_{2i}^{(i)}\lambda-a_{1i}^{(i)}$ なる因数をもつことを意味している．残りの因数は $A^{(i)}$ の第 $i+1$ 列より右の行列から得られる．固有値を求めるのには，むしろこのように分解される方が望ましい．この固有ベクトルは

$$\lambda^{i}-a_{ii}^{(i)}\lambda^{i-1}-\cdots\cdots-a_{2i}^{(i)}\lambda-a_{1i}^{(i)}=0 \tag{2.4}$$

の根を λ とすれば，

$$x_{i+1}=x_{i+2}=\cdots\cdots=x_n=0 \tag{2.5}$$

として

$$\left.\begin{aligned} & x_i=1,\ x_{i-1}=\lambda-a_{ii}^{(i)}, \\ & x_{i-2}=\lambda^2-a_{ii}^{(i)}\lambda-a_{i-1,i}^{(i)}\cdots\cdots \\ & x_1=\lambda^{i-1}-a_{ii}^{(i)}\lambda^{i-1}-\cdots\cdots-a_{2,i}^{(i)} \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

となる．この λ に i 個の根を代入すれば，i 個の固有ベクトルが得られ変換により，もとの行列 A の固有ベクトルが得られる．

（3） $A^{(i)}$ が (2) のようになっており，さらに次に消去を行なうべき第 $i+1$ 列の対角線以下の要素が0であるときを考える．このとき $A^{(i)}$ は明らかに固有値0をもっていて

$$A^{(i)}=\left(\begin{array}{ccccc|ccc} 0 & 0 & \cdots 0 & a_{1,i}^{(i)} & a_{1,i+1}^{(i)} & a_{1,i+2}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{1,n}^{(i)} \\ 1 & 0 & \cdots 0 & a_{2,i}^{(i)} & a_{2,i+1}^{(i)} & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots 0 & a_{3,i}^{(i)} & a_{3,i+1}^{(i)} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots 1 & a_{i,i}^{(i)} & a_{i,i+1}^{(i)} & a_{i,i+2}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{i,n}^{(i)} \\ \hline & & & & & a_{i+1,i+2}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{i+1,n}^{(i)} \\ & & 0 & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & a_{n,i+2}^{(i)} & \cdots\cdots & a_{n,n}^{(i)} \end{array}\right) \tag{2.7}$$

となる．この固有値 0 に対する固有ベクトルは $x_{i+2}=\cdots\cdots=x_n=0$ として，$x_1\cdots\cdots x_{i+1}$ は斉次方程式

$$\left.\begin{array}{l} \qquad\qquad a_{1,i}^{(i)}x_i+a_{1,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \\ x_1 \qquad +a_{2,i}^{(i)}x_i+a_{2,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \\ \quad x_2 \qquad +a_{3,i}^{(i)}x_i+a_{3,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \\ \qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad x_{i-1}+a_{i,i}^{(i)}x_i+a_{i,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \end{array}\right\} \quad (2.8)$$

の解として求まる．$a_{1,i}^{(i)}\neq 0$ のときには，$x_{i+1}=1$ として

$$\left.\begin{array}{l} x_i=-a_{1,i+1}^{(i)}/a_{1,i}^{(i)}, \\ x_{i-1}=-a_{i,i+1}^{(i)}+a_{i,i}^{(i)}\cdot a_{1,i+1}^{(i)}/a_{1,i}^{(i)},\ \cdots\cdots \\ x_1=-a_{2,i+1}^{(i)}+a_{2,i}^{(i)}a_{1,i+1}^{(i)}/a_{1,i}^{(i)} \end{array}\right\} \quad (2.9)$$

となる．

$x_{i+1}\neq 0$ とすれば

$$S_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_1 & & & 0 \\ & \ddots & \vdots & & & \\ & & 1 & x_i & & \\ & & & x_{i+1} & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

の逆行列が存在して，

$$S_i^{-1}A^{(i)}S_i=\left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0\cdots 0 & a_{1,i}^{(i)} & 0 & & a_{1,i+2}^{(i+1)}\cdots a_{1,n}^{(i+1)} \\ 1 & 0\cdots 0 & a_{2,i}^{(i)} & 0 & & \\ 0 & 1\cdots 0 & a_{3,i}^{(i)} & 0 & & \\ \vdots & \vdots\quad\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0\cdots 1 & a_{i,i}^{(i)} & 0 & & a_{i,i+2}^{(i+1)}\cdots a_{i,n}^{(i+1)} \\ \hline & & & & & a_{i+1,i+2}^{(i+1)}\cdots a_{i+1,n}^{(i+1)} \\ & 0 & & & & \vdots\qquad\quad\vdots \\ & & & & & a_{n,i+2}^{(i+1)}\cdots\cdots a_{n,n}^{(i)} \end{array}\right)$$

$$=A^{(i+1)} \quad (2.10)$$

となる．$A^{(i+1)}$ において $\lambda=0$ に対する固有ベクトルは $x_{i+1}=1$，$x_1=x_2=\cdots\cdots=x_i=x_{i+2}=\cdots\cdots=x_n=0$ とすればよい．

$a_{1i}^{(i)}=0$ なるときは，A が固有値 0 を二重以上にもつときで，0に対する固有ベクトルの1本は $A^{(i)}$ の i 次主座行列から求まる．それ以上は，上の斉次方程式が $x_{i+1}\neq 0$ なる解をもつか否かによって求まるか求まらないかが定まる．

（4） $A^{(i)}$ の第 $i+1$ 列の pivot 以下が 0 であるが，対角要素 $a_{i+1,i+1}^{(i)}\neq 0$ であるときには，$A^{(i)}$ は固有値 $\lambda_i=a_{i+1,i+1}^{(i)}$ をもっている．この固有値 λ_i に対する固有ベクトルは，(3) と同様 $x_{i+2}=x_{i+3}=\cdots\cdots=x_n$ として，x_1, x_2, ……, x_{i+1} は斉次方程式

$$\left.\begin{array}{l} -\lambda_i x_1 \qquad\qquad +a_{1,i}^{(i)}x_i+a_{1,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \\ \quad x_1-\lambda_i x_2 \qquad +a_{2,i}^{(i)}x_i+a_{2,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \\ \qquad x_2-\lambda_i x_3 \quad +a_{3,i}^{(i)}x_i+a_{3,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \\ \qquad\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad x_{i-1}+(a_{i,i}^{(i)}-\lambda_i)x_i+a_{i,i+1}^{(i)}x_{i+1}=0 \end{array}\right\}$$

$$(2.11)$$

が $x_{i+1}\neq 0$ なる解をもつとき定まる．この斉次方程式は $\lambda_i=0$ とおくと (3) と全く同じで，(3) は (4) の特別の場合である．

（5） $A^{(l)}$ が次のような形になるとき，

$$A^{(l)}=\left(\begin{array}{cccc|cccc|ccc} 0 & & & a_{1k}^{(l)} & & & & a_{1l}^{(l)} & a_{1l}^{(l)} & \cdots\cdots & a_{1n}^{(l)} \\ 1 & \ddots & & \vdots & & 0 & & \vdots & & & \\ & \ddots & 0 & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & 1 & a_{kk}^{(l)} & & & & a_{k,l}^{(l)} & & & \\ \hline & & & & 0 & & & a_{k+1,l}^{(l)} & \vdots & & \vdots \\ & 0 & & & 1 & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & & \ddots & 0 & \vdots & & & \\ & & & & & & 1 & a_{ll}^{(l)} & & & \\ \hline & & & & & & & & a_{n,l+1}^{(l)} & \cdots\cdots & a_{nn}^{(l)} \end{array}\right)$$

$$(k+1<l) \qquad\qquad (2.12)$$

このとき $A^{(l)}$ の，したがって A の固有多項式は，二つの因数

$$\left.\begin{array}{l} \lambda^k-a_{k,k}^{(l)}\lambda^{k-1}-a_{k-1,k}^{(l)}\lambda^{k-2}-\cdots\cdots-a_{1,k}^{(l)} \\ \lambda^{l-k}-a_{l,l}^{(l)}\lambda^{l-k-1}-a_{l-1,l}^{(l)}\lambda^{l-k-2}-\cdots\cdots-a_{k+1,l}^{(l)} \end{array}\right\} \quad (2.13)$$

をもつ，固有ベクトル $\lambda_1\cdots\cdots\lambda_k$，$\lambda_{k+1}\cdots\cdots\lambda_l$ はこれらの多項式の根として定まる．

$a_{1l}^{(l)}=a_{2,l}^{(l)}=\cdots\cdots=a_{k,l}^{(l)}=0$ のときには，λ_{k+1}, ……, λ_l に対する固有ベクトルは，$A^{(l)}$ の最初の主座行列に関係なく，第2番目の主座行列のみによって定めることができる．そこで，$a_{1l}^{(l)}$, ……, $a_{kl}^{(l)}$ が 0 でないとき，相似変換により，すでに0になっている所はそのままにして，しかも $(1, l)\cdots\cdots(k, l)$ 要素を 0 にすることができれば，同様の手段により，A が Companion matrix の直和と相似になる．すなはち

$$S^{-1}AS=\begin{pmatrix} C_{n1} & & 0 \\ & C_{n2} & \\ & & \ddots \\ 0 & & C_{ns} \end{pmatrix}=C_{n1}\dot{+}C_{n2}\dot{+}\cdots\cdots\dot{+}C_{ns} \quad (2.14)$$

ここで C_{ni} は i 次の Companion matrix で，$\sum_{i=1}^{s}n_i=n$.

このように直和分解ができれば，それに対する固有ベクトルの計算は，ひとつひとつの次数の低い C_{ni} について考えればよいから，簡単に求めることができる．

直和分解は理論的に美くしい結果であるが，実際の計算において，$A^{(l)}$ の $(1, l)\cdots\cdots(k, l)$ 要素が残ったままでも固有ベクトルが簡単に求めるのと，どちらがより簡単であるかを考慮しなければならぬ．

3. 行列の直和分解

任意の行列は，相似変換で Companion matrices の直和と相似になるという定理は，行列の研究の出発

点となっただけに，いろいろの証明がある．(G. Landsberg, (1). W. Burnside, (1). H. Hilton, (1). C.C. MacDaffee, (1). G. Kowalewski, (1). H.W. Turnbull and A.C. Aitken, (1). O. Schreier and E. Sperner, (1). van der Waerden, (1). L.E. Dickson, (1). S. Lattés, (1))

しかし，これらの証明法は計算の指針とはなり難い．

A.A. Bennett (1) は Lattés, Kowalewski および Dickson の証明法を計算できるようにしたとはいえ，実用的ではない．

W. Krull (1) は A. Loewy の示唆によって，別の証明方法を考えた．それは，任意の行列 A は次の形の行列

$\begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ B & A_2 \end{pmatrix}$，ただし A_1^* は A の最低多項式の Companion matrix.

に相似になる，ということである．

このことは，A_1^* に対する条件をのぞけば，本文ですでに論じた．Krull はさらに，上の行列は

$$\begin{pmatrix} A_1^* & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

に相似であることを証明し，A_2 をさらに分解することによって，$A \sim A_1^* \dot{+} A_2^* \dot{+} \cdots\cdots \dot{+} A_m^*$ となることをしめした．ここで $|\lambda I - A_i^*|$ は $A_i^* \dot{+} \cdots\cdots \dot{+} A_m^*$ の最低多項式になるように定める．直和分解の際に最低多項式が出ることは，数値計算の指針となる方法ではないことを示す．

Jardan の標準形への変換は，I. Schur (1) および Turnbull-Aitken (1) に述べられている．一般に固有値が単根であれば，固有空間は全空間と一致し，固有ベクトルを n 個ならべた行列で相似変換をすれば対角形になるという定理の特別の場合で，固有ベクトルがわかっていることを前提とする．

例．
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ を直和分解すること．}$$

A の固有値 3 および 4 に対する固有ベクトルは，それぞれ $(-1, 1, -4, 1)'$ および $(-1/2, 1/2, -3, 1)'$ となる．そこで

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば，

$$V^{-1}AV = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \dot{+} (3) \dot{+} (4)$$

となる．

この例から知れるように，直和分解は固有ベクトルによりなされるから，固有ベクトルは，直和分解の前の形から求めなければならない．この例では固有値がすべて実数であるから簡単であるが，一般には複素数の計算を必要とする．

ここで，直和分解の他の方法を考えよう．行列のブロック乗法により，I_m を m 次の単位行列とすると，

$$\begin{pmatrix} I_m & -S \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & S \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = I_{m+n} \tag{3.1}$$

だから，

$$\begin{pmatrix} I_m & S \\ 0 & I_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I_m & -S \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

となる．ここで S は $m \times n$ 行列，0 は $n \times m$ 零行列である．

A_1 および A_2 をそれぞれ m 次および n 次の正方行列とするとき，

$$\begin{pmatrix} I_m & -S \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & S \\ 0 & I_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_1S - SA_2 + B \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

となるから，この相似変換で直和分解されるためには，

$$A_1S - SA_2 + B = 0 \tag{3.4}$$

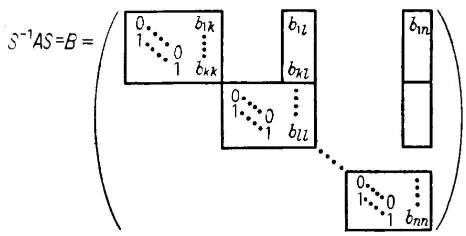
となればよい．とくに $A_2 = (a)$ の場合には $n = 1$ で，B と S は m 次元ベクトルとなって，(3.4) 式は

$$(aI_m - A_1)S = B \tag{3.5}$$

となる．これが前節 (3) および (4) の場合である．

一般に S は mn 行列で，その要素を未知数とする $m \times n$ 個の連立 1 次方程式(3.4)をとくことになる．

直和分解をしない場合の標準形は，次のような行列となる．



(3.6)

B の固有値 λ は，A の固有値でもあり，λ に対する A の固有ベクトルは，$Ax = \lambda x$ から求めるよりは，

$$By=\lambda y,\ x=Sy \qquad (3.7)$$

から求める方が簡単である．しかし，誤差を考慮すれば，直接 $Ax=\lambda x$ から求めなければならぬこともある．

4. Algorithm

与えられた実数行列の標準形と変換行列を求める ALGOL 60 の procedure と，計算のフローチャートを書いてみよう．

```
procedure Begleit (s) matrix: (A) order: (n)
trausformation: (S) indicator: (b);
  value n; Boolean s; array A, S; integer n;
integer array b;
  begin comment procedur Begleit computes
the canonical form of a given general matrix A
of order n with real elements by Danilevskii's
method. When the Boolean variable s≡true, the
matrix S which transforms A to the cononical
form is computed, otherwise, S is not computed.
The integer array b indicated that the i th col-
umn of the matrix A could not be eliminated
after a performance of this procedure when i is
a component of the array b. In this case, some
of the i th column of the matrix A represent
the coefficients of a factor of the characteristic
polynomial of A.
  When b[1]=n after a performance of this
procedure, the n th column of the matrix A
represents the coefficients of the characteristic
polynomial of the matrix A.;

  integer c, k, h;
  begin integer i, j;
      real T1, T2;
  for i=1 step 1 until n do b[i]:=0;
  if ¬s then go to L1 else
      for i:=1 step 1 until n do
      for j:=1 step 1 until n do
        if i=j then s[i, j]:=1 else s [i, j]:=0;
  L1:c:=k:=1;
     h:=2;
  L2: if A[h, k]=0 then go to L3 else
    begin  for i:=1 step 1 until n do
      begin T1:=T2:=0;
           for j:=1 step 1 until n do
        begin T1:=A[i, j]×A[j, k]+T1;
              A[i, h]:=T1;
            if s then
               begin T2:=s[i, j]×A[j, k]+T2;
                     s[i, h]=:=T2
      end  end  end  end;
    for j:=k step 1 until n do
        A[h, j]:=A[h, j]/A[h, k];
    for i:=1 step 1 until n do
      begin if i≠h then
        begin for j:=k step 1 until n do
          A[i, j]:=A[i, j]-A[h, j]×A[i, k]
      end  end;
L4: k:=h;
     h:=h+1;
  if k≠n then go to L2 else go to L6;
L3: begin integer m;
    if h=n then go to L7 else
      for m:=h+1 step 1 until n do
      begin if A[m, k]=0 then go to
        L8 else
      begin for j:=k step 1 until n do
              begin T1:=A[h, j];
                    A[h, j]:=A[m,j];
                    A[m, j]:=T1
      end  end;
    for i:=1 step 1 until n do
          begin T1:=A[i, h];
                A[i, h]:=A[i, m];
                A[i, m]:=T1;
          if s then
              begin T2:=s[i, h];
                    s[i, h]:=s[i, m];
                    s[i, m]:=T2
                 end  end;
            go to L2;
          end;
    L8: b[c]:=k; c:=c+1; go to L4;
    L7: b[c]:=n-1; c:=c+1;
    L6: b[c]:=n
  end
```

5. 計算例

例 1

$$\begin{pmatrix}
-5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.14 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5.6 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-2.718 & -1.419 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
3.08 & 0 & .78 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
.529 & 7.17 & 15.56 & -2.06 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
.592 & .31 & .56 & 7.6 & 2.1 & -8 & -3 & 0 & 0 & 0 \\
7.68 & .86 & -2.13 & 3.86 & .6 & 3.6 & -9.1 & 4 & 0 & 0 \\
-9.52 & 11.2 & 5.02 & .934 & 2.84 & .3495 & -9.9 & 7.111 & 5 & 0 \\
45.1 & 4.6 & -.993 & -3.4 & .893 & 5.73 & .253 & -3.333 & -2 & 2
\end{pmatrix}$$

この行列の固有方程式は $(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)=x^{10}-55\,x^8+1023\,x^6-7{,}645\,x^4+21\,076x^2-14\,400$ で，計算された誤差は 10^{-3} をこえていない．また方程式の根も 6 桁の精度を保っている．

固有多項式の係数（定数項より）	誤差 $\times 10^{-5}$	固有方程式の根	誤差 $\times 10^{-8}$
−14399.99920	80	− .99999962	38
− 0.00088	88	.99999962	38
21075.99940	60	−1.99999977	23
0.00048	48	1.99999977	23
− 7644.99985	15	−3.00000089	89
− 0.00010	10	3.00000089	89
1022.99998	2	−3.99999834	166
0.00001	1	3.99999834	166
− 55.00000	0	−5.00000079	79
− 0.00000	0	5.00000100	100

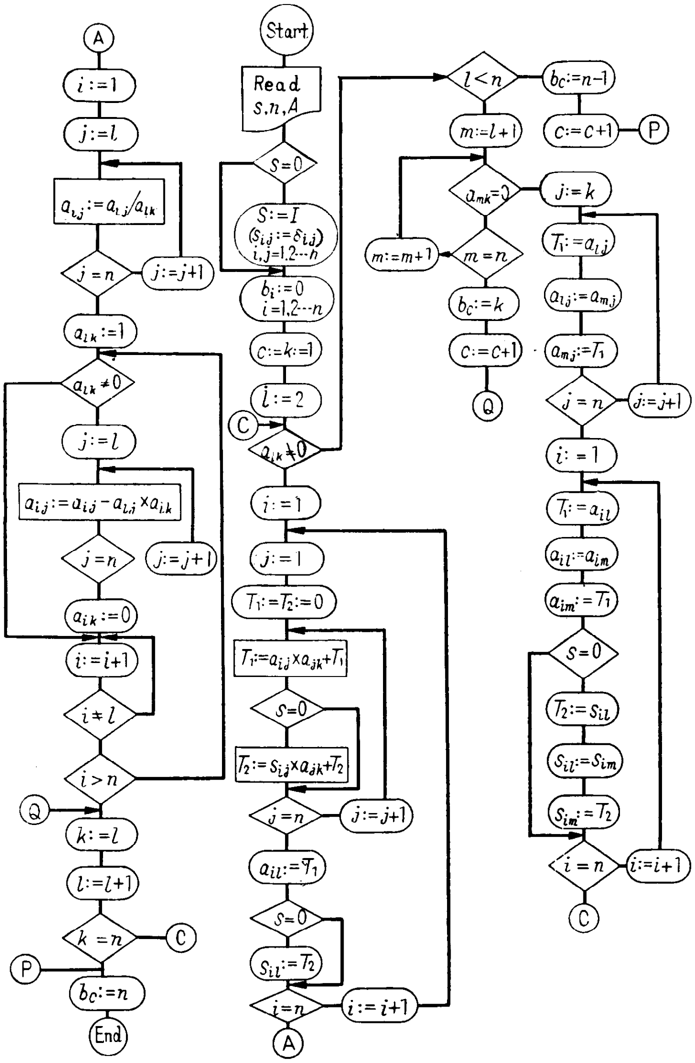
計算時間 1 分 6 秒 8　　計算時間21秒 3

例 2

$$\begin{pmatrix}
0 & 36.3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.6 & 3.2 & 8.9 & 0 & .4 & 0 & 1.3 & 0 \\
5.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 & .1 & 2.5 & 0 & .1 & 0 & .7 & 0 \\
.2 & 0 & 0 & 9.8 & 12.8 & 2.7 & 0 & 0 & 0 & 1.1 & 0 & 0 & 0 & .9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & .1 & 0 & .1 & .1 & .3 & 0 & .9 & .1 & .3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
.1 & 2.2 & .4 & 10.4 & 0 & .1 & 0 & .3 & .9 & .1 & .1 & 0 & .6 & 2.4 & .3 & .1 \\
0 & .2 & 4.2 & 2.4 & 3.3 & 0 & .1 & .6 & 2.7 & .8 & 0 & 0 & 3.1 & 0 & 0 & 0 \\
.1 & .9 & 1.1 & 1.2 & .7 & .3 & 0 & .1 & 3.5 & 2.9 & 0 & .6 & .3 & .2 & .2 & 0 \\
3.8 & 1.1 & 12.2 & 1.8 & 2.1 & 3.9 & 8.5 & 0 & 5.3 & 1.9 & .2 & 2.6 & 2.5 & 8.7 & 2.8 & .3 \\
2.9 & .9 & 1.4 & .7 & 1.4 & .6 & 1.1 & .3 & 0 & 0 & 5.3 & 3.5 & 2.4 & .2 & 0 & .2 \\
.9 & 1.7 & .1 & .7 & .9 & .4 & 1.9 & 0 & 1.8 & 1.4 & .8 & .4 & 1.6 & .1 & 1.2 & 6.7 \\
.5 & .3 & 0 & 1.5 & .1 & .1 & .1 & 0 & .4 & 0 & 0 & .8 & 1.2 & 0 & .1 & .1 \\
.3 & 0 & 0 & 3.9 & .2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & .5 & 0 & .1 & .3 & .1 & .1 \\
0 & 0 & 0 & .2 & .1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1. & 1.6 & 0 & 0 & .3 & .3 & 1.3 \\
7.8 & 2.9 & 10.3 & 2.3 & .2 & 4.7 & 14.3 & 24.2 & 6.6 & 1.6 & .8 & 3.5 & .4 & 0 & 0 & 0 \\
3.5 & 2.5 & .9 & 1.9 & 1.2 & .5 & 1.8 & .4 & 3.3 & 2.8 & 3.1 & .9 & 2.8 & .6 & 0 & .5 \\
5.4 & 2.8 & .5 & 1.8 & 1.1 & .2 & .6 & .4 & 5.4 & 1.6 & 1.4 & 1.4 & .1 & 1. & 5.3 & 0
\end{pmatrix}$$

固有多項式の係数	固有値（実数部）$\times 10^{-2}$	固有値（虚数部）$\times 10^{-2}$
−1416793080	−.20271238	.476040638
−2222879320	−.20271238	−.476040638
−5332112410	1.68344238	0
−206439657	−2.70029837	0
245648530	.91781091	1.59935978
−80269410.7	.91781091	−1.59935978
114382808	−1.55218127	2.39273095
173831663	−1.55218127	−2.39273095
103557991	−4.35507594	1.80222534
29891785.3	−4.35507594	−1.80222534
5218856.00	− .00508541	5.63847200
658917.132	− .00508541	−5.63847200
46724.9931	−11.6554442	0
−3360.01571	−14.7841392	0
−531.470025	15.4162483	0
.000000475	22.4346787	0

計算時間 4 分16秒　　計算時間 53 秒



第 1 図 フローチャート

この係数計算における誤差の大きさをはかる目安としてこの行列の trace が 0 であることに着目すれば，.475×10^{-6} が 15 次の係数であって，これが 0 になるべきこと，計算される数が 10^2 程度の大きさをもつことから，有効数字 8 桁の精度をもつといえる．係数計算で要した 4 分16秒はクイックアクセスバンドを有効に使用したサーブルーチンによるもので，コンパイラー NARC のオブジェクトプログラムによれば 20 分要した．ただしソースプログラムの翻訳時間は 5 分で，ソースプログラムはフロチャートを見ながらパンチできた．これに反し，サーブルーチンの作成には，ディバッグの時間を含めて熟練者が 2 日かかった．

むすび

現在，固有問題全部解決する閉じた procedure を作成中であり，この Algorithm に示された段階までは，すでに NEAC 2203 で計算を行なっている．次数の大きい行列の計算の場合の誤差や，代数方程式の解法などは，筆を改めて書きたい．

最後に，TOSBAC 3100，NEAC 2203 および MADIC ⅡA についてコーデングをしていただいた早稲田大学第一理工学部数学科開発敏光君，機械工学科横山清君，山崎敏君および内田光太郎君，また，文献をしらせてくださった日本電気伊大知紀子嬢ほか多くの方々の協力に負うところが大きく，ここに特筆して感謝します．

Referrences

Aitken, A.C.(1) see Turnbull, H.W.

………………(2) Studies in practical methamatics. Ⅱ: The evaluation of the latent roots and the latent vectors of a matrix. Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 57 (1937). 269-304.

Bennet, A.A. (1) Amer. Math. Monthly Ⅱ Vol. 38 (1931) 377-383.

Bodewig, E. (1) Matrix calculus. Amsterdam 1956.

Booth, A.D. (1) Numerical methods. Butterworth London 1955.

Cauchy, (1) Exrcises d'analyse et de physique mathématique Vol. 1 (1840)

Collatz, L. (1) Eigenwertaufgaben mit Technischen Anwendungen. Springer Verlag, 1949.

Danilevskii, A.M. (1) The numerical solution of the secular equation. (Russian) Matem. sbornik, 44 (1937) No. 2, 169–171.

Dickson, L.E. (1) Modern algebraic theories. Chicago 1926.

Dwyer, P.S. (1) Linear computations, Wiley 1951.

Faddeeva, B.K. (1) Computational methods of linear algebra. (Russian) Translated by Curtis D. Benster, New York 1959.

Frobenius, (1) J. reine angew. Math. Vol. 86 (1879) 146-208.

Gel'fand, I.M. (1) Lectures on linear algebra. (Russian) Moscow 1951.

Givens, W. (1) Numerical computation of the characteristic values of a real symmetric matrix. Rep. ORNL 1574, Oak Ridge National Laboratory, 1954.

Gregory, R.T. (1) Computing eigenvalues and eigenvectors. MTAC Vol. 7, (1953)

Hansen, E.E. (1) On the Danilevski method for computing characteristic polynomial. ACM, New York 1961.

Hessenberg, K. (1) Behandlung der linearen Eigenwertaufgaben Gleichung. Darmstat Diesertation (1940)

Hilton, H. (1) Homogeneous linear substitutions. Oxford 1914.

Horst, P. (1) Annals Math. Statis. Vol. 6 (1953) 83

Housholder, A.S. (1) Principles of numerical analysis. New York. 1953.

Jacobi, C.G.J. (1) Über ein leiches Verfahren, die in der Theorie Säkularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. J. reine angew. Math. 30, (1846) 51-95.

Jordan, C. (1) Traité des substitutions et des eqations algébrioues. Paris 1870.

Kowalewski, G. (1) Natürltiche Normalform linearer Transformationen. Ber. Verh. sächs. Akad. Leipzig. Vol. 69 (1917). 325-335.

Krull, W. (1) Uber Begleitmatrizen und Elementarterteiltheorie. Freiburg 1921.

Krylov, A.N. (1) Über die numerische Auflösung einer Gleichung, durch die in technischen Fragen die Frequenz kleiner Schwingungen bestimmt ist. Izvestiia akad. nauk SSSR Otdel matem. i estest. nauk, Ser. 7 (1931), No. 4, 491-539. (Russian)

Lattés, S. (1) Sur une forme canonique des substitutions linéaires. Ann. Toulouse (3) 6, (1914) 1-84.

Lanczos, C. (1) Applied analysis. Prentice Hall 1956.

Landsberg, G. (1) J. reine angew. Math. Vol. 116 (1896) 331-349.

Leverrier, U.J.J. (1) J. Math. pures Appl. 15 (1840).

Macduffee, C.C. (1) The theory of matrices. Berlin 1933.

Menge, W.O. (1) Constraction of canonical forms for a linear transformation. Univ. of Michigan dissertation 1931.

(2) On the rank of the product of certain matrices. Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 38 (1932) 88-94.

森口繁一, 高田勝 (1) 数値計算法, 岩波

中西俊男 (1) 行列の固有値および固有ベクトルの計算, 国鉄技報, 昭和35年.

Robinson, M. (1) Determining the eigenvalues of matrices. IBM Technical Newsletter No. 10.

Samuelson, P. (1) A method of determining explicity the coefficients of the characteristic equation. Ann. Math. Stat., 13 (1942) 424-429.

佐武一郎 (1) 行列と行列式

Schreier, O. and E. Sperner (1) Vorlesungen über Matrizen. Leipzig 1932.

Schur, I. (1) Trans. Amer. Math. Soc. Vol. 10 (1909) 159-175.

……………(2) Über die characteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichngen. Math. Ann. Vol. 66 (1909) 488-510.

Turnbull, H.W. and A.C. Aitken (1) An introduction to the theory of canonical matrices. London 1932.

Wedderburn, J.H.M. (1) Note on the theory of matrices. Princetin Univ. 1931.

…………………………… (2) Lectures on matrices. A.M.S. Colloquum Vol. 17. 1934.

van der Waerden (1) Moderne Algebra Vol. II Berlin 1931.

Wielandt, H. (1) Bestimmung höherer eigenwerte durch gebrochene Iterations. Ber. Aerodynamischen Versuchsantalt Göttingen, Bd. 44 J. 37 (1944).

……………… (2) Math. Zeit. (1944) 93-143.

Wilkinson, J.H. (1) The calculation of the latent roots and vectors of matrices on the pilot model of the A.C.E. Proc. Cambridge Philos. Soc. Vol. 50 (1954) 536-566.

………………… (2) The use of iteration methods for finding the latent roots and vectors of matrices. MTAC Vol. 9 (1955) 184-191.

(昭和 37 年 6 月 23 日受付)