Vol.2011-GI-25 No.6
2011/3/5

計算ブロックパズルの生成アルゴリズム

安 倍 泰 孝[†1] 原 口 和 也[†1] 丸 岡 章[†1]

計算ブロックパズルでは, 与えられた $n \times n$ の盤面のブロックへの分割および各ブロックに対する自然数の割当に対し, ラテン方陣条件と部分和条件を満たすように, 盤面上のすべてのセルに $1, 2, \ldots, n$ の数を割り当てることが求められる. 本研究では計算ブロックパズルの生成アルゴリズムを開発する. 生成されるパズルの種類は, アルゴリズムに組込まれる推論規則によって調整される. 被験者実験の結果, 高度な推論規則を用いて生成されたパズルは, そうでないパズルより正答率が低いことが観察された.

How to Produce SumBlock Puzzle Instances

Yasutaka Abe,[†1] Kazuya Haraguchi[†1]
and Akira Maruoka[†1]

For given partition of $n \times n$ grid into blocks and assignment of integers to the blocks, SumBlock puzzle asks to assign integers from $\{1, 2, \ldots, n\}$ to all cells in the grid so that the completion satisfies the Latin square condition and the subset sum condition. In this research, we develop an algorithm to yield a SumBlock puzzle instance. Types of generated instances are adjusted by inference rules built into the algorithm. Our experimental studies show that human players are more likely to fail to solve the instances generated with sophisticated inference rules than those generated with easy inference rules.

1. はじめに

脳の活性化につながるという主張の下, 各種メディアや学習塾においてパズルが盛んに取り上げられている[6]. パズルを解くことが, 脳のどのような能力を, どのような仕組みで向上させるのであろうか. この問いに答えることは容易ではないが, それでも敢えて挑戦するならば, 少なくとも様々な難易度について大量のパズルを準備した, 大がかりな実験が必要となるであろう.

本研究の目標は, 難易度の調整が可能な, パズル自動生成システムの開発である. 研究の最初のステップとして, **ラテン方陣**を解に持つ**穴埋めパズル**に着目する. この種のパズルでは, $n \times n$ の盤面に対し, ラテン方陣条件および他に与えられた条件を満たすように, 盤面上にある n^2 個すべての**セル**に対して $[n]$ 内の数を割り当てることが求められる. (ただし $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ とする.) ここにラテン方陣条件とは, 盤面の各行各列に $[n]$ 内の数がちょうど 1 度ずつ現れなければならないというものである.

本論文では, ラテン方陣を解に持つ穴埋めパズルに対して, **インスタンス** (**問題例**) の生成アルゴリズムを与える. このアルゴリズムの特徴は, 組込まれる**推論規則**に応じて, 出力されるインスタンスの種類が変わることである. 被験者実験の結果, 高度な推論規則を用いて生成されたインスタンスは, そうでないインスタンスより正答率が低いことが観察された. このことは, アルゴリズムに組込む推論規則を変えることによって, インスタンスの難易度をある程度調整できることを示している.

提案手法はラテン方陣を解に持つ多くの穴埋めパズル (例えば**数独**やその変種[5] など) に適用可能だが, 本論文では**計算ブロックパズル**に議論の焦点を絞る. 計算ブロックパズルのルールは次のように与えられる.

計算ブロックパズル

入力: $n \times n$ 盤面上にある n^2 個のセルの**ブロック**への分割, および各ブロックに対する自然数の割当. (ブロックに割り当てられた自然数を**容量**という.)

出力: ラテン方陣条件と**部分和条件**を満たすような, n^2 個すべてのセルに対する $[n]$ 内の数の割当. (ただし部分和条件とは, 各ブロックにおいて, セルに対して割り当てられた数の合計がそのブロックの容量と一致しなければならないというものである.)

したがって計算ブロックパズルのインスタンスは, n^2 個のセルのブロックへの分割と各ブロックの容量によって定義される. なお本論文では, 各ブロックが**連結**であるような分割のみを考える. (ブロックが連結であるとは, ブロックに含まれる任意の 2 つのセルについて, 隣接関係に基づいて互いに到達可能であることを指す.)

まず, インスタンス生成アルゴリズムの大まかな構造を示す. 図 1 も同時に参照されたい.

1: 適当な $n \times n$ ラテン方陣を決定し, 対応するセルに数を書き込む.

2: 何らかの方法で n^2 個のセルのブロックへの分割を求める.

---

†1 石巻専修大学 理工学部
Faculty of Science and Engineering, Ishinomaki Senshu University

Vol.2011-GI-25 No.6
2011/3/5

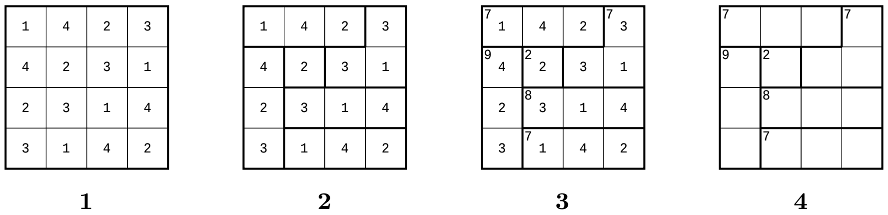

図 1 計算ブロックパズルにおけるインスタンスの生成 ($n = 4$)
Fig. 1 Production of a SumBlock instance ($n = 4$).

3: 各ブロックの容量を, そのブロック内のセルに書き込まれた数の合計とする.

4: **1** においてセルに書き込まれた数を盤面から消す.

本論文の主題は, 生成されるインスタンスが唯一解を持ち, かつ指定された難易度を持つように, **2** において分割を求めることである. 前者について, インスタンスが解を 1 つだけ持つことは, そのインスタンスが「論理的に」解ける (したがって, 「面白い」) ために必要である[2),3)]. **1** で決定されるラテン方陣は, 明らかに生成されるインスタンスの解となる. このラテン方陣はインスタンスが解を持つことを保証するので, これを**証拠**と呼び, 以下証拠は与えられたものとする.

次に後者について, 分割探索アルゴリズムが指定された難易度をどのように達成するかを理解するために, 分割の細分に基づいた半順序関係を定義し, 分割空間をハッセ図として描く. このハッセ図において最下位に位置する最小元は n^2 個のブロックを持つ分割 (すなわち 1 つのセルが 1 つのブロックを構成) であり, 最上位に位置する最大元は 1 個のブロックを持つ分割 (すなわち n^2 個のセルが 1 つのブロックを構成) である. 最小元から誘導されるインスタンスは証拠を唯一解に持つことが自明であり, 最も易しいインスタンスと考えられる. 一方, 最大元から誘導されるインスタンスは任意のラテン方陣を解として持ち, 唯一解を持たない. したがって我々が求めたい分割は両者の中間に存在するものと考えられる.

分割探索アルゴリズムは最小元から開始し, 隣接するブロックを繰返し併合することでハッセ図の内部を上に向かって進む. 我々の先行研究[1)] では, 誘導されるインスタンスが唯一解を持つ分割 (**唯一解分割**) のうち極大なものを求めるアルゴリズムを提案した. しかしそのようなインスタンスはしばしば人間にとって難しすぎることが分かった. 人間にとっての難易度は, 最小元に近いほど易しく, 極大な唯一解分割に近いほど難しくなるものと予想される. この考察を元に, 難易度調整のメカニズムを開発する. このため, 人間がパズルを解くときに用いるものと考えられる, 以下の手続きに着目する: 人間は過去のパズルの経験から獲得した**推論規則**をいくつか持っており, 新しいインスタンスを解く際, それらを繰返し適用することによって空のセルに数を埋めていく, という手続きである. ここで, 初心者は初等的な推論規則しか持たないかもしれないし, 熟練者は高度な推論規則を持つかもしれない. 我々は推論規則を分割探索アルゴリズムに組込む. 分割探索アルゴリズムは, 誘導されるインスタンスが推論規則で解ける分割のうち極大なものを求める. 初等的な推論規則が組込まれたアルゴリズムはハッセ図の下位で停止し, 高度な推論規則が組込まれたアルゴリズムは上位で停止するであろう. 組込む推論規則を適切に定めることにより, 生成されるインスタンスの難易度を調整できるものと予想される.

本論文の構成は以下の通りである. 2 節では用語の定義を行う. 3 節では分割空間をハッセ図として描き, それを用いて分割探索アルゴリズムを説明する. 4 節では計算ブロックパズルに対する推論規則をいくつか紹介する. 5 節では難易度調整を実現するための 2 つのスキームを提案し, その有効性を被験者実験によって示す. 最後に 6 節では結論を述べる.

2. 準　　備

盤面上の i 行 j 列目にあるセルを $(i, j) \in [n]^2$ で表す. 2 つのセル $(i, j), (i', j') \in [n]^2$ について, $|i - i'| + |j - j'| = 1$ が成立するとき, 両者は**隣接**する. 隣接関係を 2 項関係 $\sim$ によって表す. セル集合 $[n]^2$ の部分集合 B および B に含まれる 2 つのセル $(i, j), (i', j') \in B$ について, $(i, j) \sim (i', j')$ が成立するとき, もしくは $(i, j) \sim (i_1, j_1)$, $(i_1, j_1) \sim (i_2, j_2)$, $\ldots$, $(i_{k-1}, j_{k-1}) \sim (i_k, j_k)$, $(i_k, j_k) \sim (i', j')$ を満たす $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots, (i_k, j_k) \in B$ が存在するとき, $(i, j), (i', j')$ は B **において連結**する. B に含まれる任意の 2 つのセルが B において連結なとき, B を連結という. 連結な部分集合 $B \subseteq [n]^2$ をブロックという. 特に $|B| = 1$ を満たす B を**単一ブロック**と呼び, 1 つの行あるいは列で閉じた B を**線形ブロック**と呼ぶ.

セルに対する数の割当に関する記法を定める. 3 つ組の集合を $A \subseteq [n]^3$ とする. 数 v がセル (i, j) に割り当てられることを $(i, j, v) \in A$ で表す. 1 つのセルには高々1 つの数しか割り当てられないため, 任意の $(i, j, v), (i', j', v') \in A$ に対して $(i, j) \neq (i', j')$ が成立つと仮定する. したがって任意の割当 A について $|A| \leq n^2$ が成立する. 各行各列において同じ数が高々1 度しか割り当てられないとき, すなわち任意の $(i, j, v), (i', j', v') \in A$ について $(i, v) \neq (i', v')$ および $(j, v) \neq (j', v')$ の少なくとも一方が成立つとき, A を**部分ラテン方陣**という. 特に $|A| = n^2$ ならば A を**完全ラテン方陣**という. A によって数が割り当てら

れた (もしくは割り当てられない) セルの集合を $\mathrm{Sup}(A)$ (もしくは $\mathrm{Emp}(A)$) とする．すなわち, $\mathrm{Sup}(A) = \{(i,j) \in [n]^2 \mid (i,j,v) \in A\}$, $\mathrm{Emp}(A) = [n]^2 \setminus \mathrm{Sup}(A)$.

計算ブロックパズルのインスタンスを $I = (\mathcal{P}, \sigma)$ で定義する．ここに, $\mathcal{P}$ は n^2 個のセルのブロックへの分割を表す;

$$\bigcup_{B \in \mathcal{P}} B = [n]^2,\ \forall B \in \mathcal{P} \text{ はブロック},\ B \cap B' = \emptyset\ (\forall B, B' \in \mathcal{P},\ B \neq B').$$

前述の通り, 本論文では非連結なセル集合を含む分割は考えない．写像 $\sigma : \mathcal{P} \to [n^2(n+1)/2]$ は各ブロックの容量を表す．与えられたインスタンス $I = (\mathcal{P}, \sigma)$ に対し, プレイヤーは定義 2 で定義される**完全解** $S \subseteq [n]^3$ を見つけることが求められる．なお本研究で生成するインスタンスは, 証拠を唯一の完全解として持つ．

定義 1 (部分解) インスタンスを $I = (\mathcal{P}, \sigma)$, n^2 個のセルに対する数の割当を $S \subseteq [n]^3$ とする．S が次の条件を満たすとき, S を I **の部分解**という．

ラテン方陣条件: S は部分ラテン方陣である．

部分和条件: 分割 $\mathcal{P}$ に含まれる任意のブロック $B \in \mathcal{P}$ について以下が成立．

$$\sum_{(i,j,v) \in S:\ (i,j) \in B} v = \sigma(B) \qquad \text{もし } B \subseteq \mathrm{Sup}(S) \text{ が成り立つとき},$$

$$\sum_{(i,j,v) \in S:\ (i,j) \in B} v < \sigma(B) \qquad \text{そうでないとき}.$$

定義 2 (完全解) インスタンスを $I = (\mathcal{P}, \sigma)$, n^2 個のセルに対する数の割当を $S \subseteq [n]^3$ とする．S が I の部分解で完全ラテン方陣のとき, S を I **の完全解**という．

分割に対する 2 項関係 $\leqslant$ を以下のように定義する: 分割 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ に対し, $\mathcal{P}$ が $\mathcal{P}'$ の**細分**ならば (すなわち, $\mathcal{P}$ に含まれる任意のブロック $B \in \mathcal{P}$ に対して $B \subseteq B'$ を満たす $B' \in \mathcal{P}'$ が存在するならば), $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ とする．明らかに $\leqslant$ は半順序である．分割 $\mathcal{P}$ に含まれる 2 つのブロック $B, B' \in \mathcal{P}$ について, 隣接する 2 つのセル $(i,j) \in B$ および $(i',j') \in B'$ が存在するとき, B と B' は隣接するという．分割 $\mathcal{P}$ において隣接する 2 つのブロック B, B' を併合して得られる分割を $\mathcal{Q}$ とする．すなわち,

$$\mathcal{Q} = \mathcal{P} \cup \{B \cup B'\} \setminus \{B, B'\}.$$

明らかに $\mathcal{Q}$ は n^2 個のセルのブロックへの分割であり, $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{Q}$ を満たす．

3. 分割探索アルゴリズム

アルゴリズムの探索空間は $\leqslant$ に基づいた半順序集合であり, ハッセ図によって表される．図 2 を見よ．このハッセ図では, 各節点は 1 つの分割に対応する．特に最下位に位置する最小元 $\mathcal{P}_\perp$ は n^2 個のブロックを持つ分割 (すなわち 1 つのセルが 1 つのブロックを構成) であり, 最上位に位置する最大元 $\mathcal{P}_\top$ は 1 個のブロックを持つ分割 (すなわち n^2 個のセルが 1 つのブロックを構成) である;

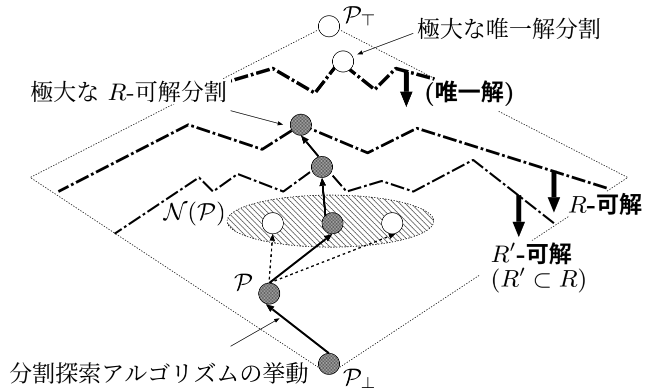

図 2 探索空間を表すハッセ図
Fig. 2 Hasse diagram illustrating the search space.

$$\mathcal{P}_\perp = \big\{\{(i,j)\} \mid (i,j) \in [n]^2\big\},\ \mathcal{P}_\top = \big\{[n]^2\big\}.$$

枝 $(\mathcal{P}, \mathcal{P}')$ は, $\mathcal{P}$ において隣接する 2 つのブロックを併合することによって, 分割 $\mathcal{P}'$ が得られることを表す．

分割 $\mathcal{P}$ から**誘導**されるインスタンスを $I_{\mathcal{P}} = (\mathcal{P}, \sigma)$ とする．(容量 σ は 1 節における手順 **3** にしたがって決定される.) 我々が求めたい分割は, ハッセ図の中程の高さに存在するものと考えられる．探索の基準として, 分割が満たすべき条件をいくつか考える．そのような条件を C と書く．条件 C を満たす分割を C-**分割**という．条件 C として, 単調性を持つもののみを考える．すなわち, $\mathcal{P} \leqslant \mathcal{P}'$ を満たす任意の分割 $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ について, もし $\mathcal{P}'$ が C-分割ならば, $\mathcal{P}$ も C-分割であるものとする．この要請により, **極大な** C-**分割**が必ず存在する．C-分割 $\mathcal{P}$ が極大とは, $\mathcal{P}$ は C-分割だが, 任意の $\mathcal{P}' > \mathcal{P}$ は C-分割でないことをいう．与えられた C に対し, 分割探索アルゴリズムは 極大な C-分割を探索する．もし C として弱い条件 (あるいは強い条件) を用いれば, 極大な C-分割はハッセ図の上位 (あるいは下位) に存在すると考えられるため, 難易度の高い (あるいは低い) インスタンスが生成されるものと期待される．

最も弱い C は, 誘導されるインスタンスが唯一解を持つというものである．(この唯一解

Vol.2011-GI-25 No.6
2011/3/5

は証拠と一致する.) 極大な唯一解分割から誘導されるインスタンスはしばしば人間にとって難しすぎるため, より強い条件として R-**可解性**を導入し, ハッセ図の中でより下位に存在する分割を得たい. ここで R は推論規則の集合を表す. 分割 $\mathcal{P}$ から誘導されるインスタンス $I_{\mathcal{P}}$ に対し, R に含まれる推論規則を繰返し適用することによってその完全解を求めることができるとき, $\mathcal{P}$ を R-可解な分割という. 集合 R が初等的な推論規則しか持たなければ, 極大な R-可解分割はハッセ図の中でより下位に存在するであろう. 逆に R が高度な推論規則を持つのであれば, 極大な R-可解分割はより上位に存在するであろう. したがって R に用いる推論規則を適切に選ぶことにより, 生成されるインスタンスの難易度が調整されることを期待できる. 次節では計算ブロックパズルにおける推論規則の例を挙げる.

以下に極大な C-分割を求めるアルゴリズムを与える. このアルゴリズムは最小元 $\mathcal{P} = \mathcal{P}_{\perp}$ から開始し, 隣接する 2 つのブロックを繰返し併合することでハッセ図の内部を上に向かって進み, 極大な C-分割を出力して停止する. **2** における $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ は, 分割 $\mathcal{P}$ において隣接する 2 つのブロックを併合することで得られる, すべての分割の集合である. 集合 $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ が複数の C-分割を含むとき, そのうち 1 つをランダムに選んで $\mathcal{P}'$ とするのは選択肢の 1 つである. 5 節では分割に対して評価関数を定義し, 最も高く評価された分割を $\mathcal{P}'$ とすることで, 難易度の調整を行うスキームを提案する.

分割探索アルゴリズム

1: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P}_{\perp}$
2: **while** $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ が C-分割 $\mathcal{P}'$ を含む **do**
3: $\mathcal{P} \leftarrow \mathcal{P}'$
4: **output** $\mathcal{P}$

4. 計算ブロックパズルにおける推論規則

本節では計算ブロックパズルにおける推論規則の例を挙げる. 例として取り上げる推論規則は 3 つのクラス $R_{\mathrm{LAT}} = \{r_{\text{LAT-1}}, r_{\text{LAT-2}}, r_{\text{LAT-3}}, r_{\text{LAT-4}}\}$, $R_{\mathrm{SUB}} = \{r_{\text{SUB-1}}, r_{\text{SUB-2}}\}$, $R_{\mathrm{BOTH}} = \{r_{\text{BOTH-1}}, r_{\text{BOTH-2}}, r_{\text{BOTH-3}}\}$ に分類される. クラス R_{LAT} はラテン方陣条件, R_{SUB} は部分和条件, R_{BOTH} は両方の条件に基づくものである. 各クラスには, 他の推論規則の一般化となる規則がある. (例えば, $r_{\text{SUB-2}}$ は $r_{\text{SUB-1}}$ の一般化である.) 図 3 に各推論規則が適用可能な盤面の具体例を示す. これらの盤面では, 推論規則により, 色の付いたセ

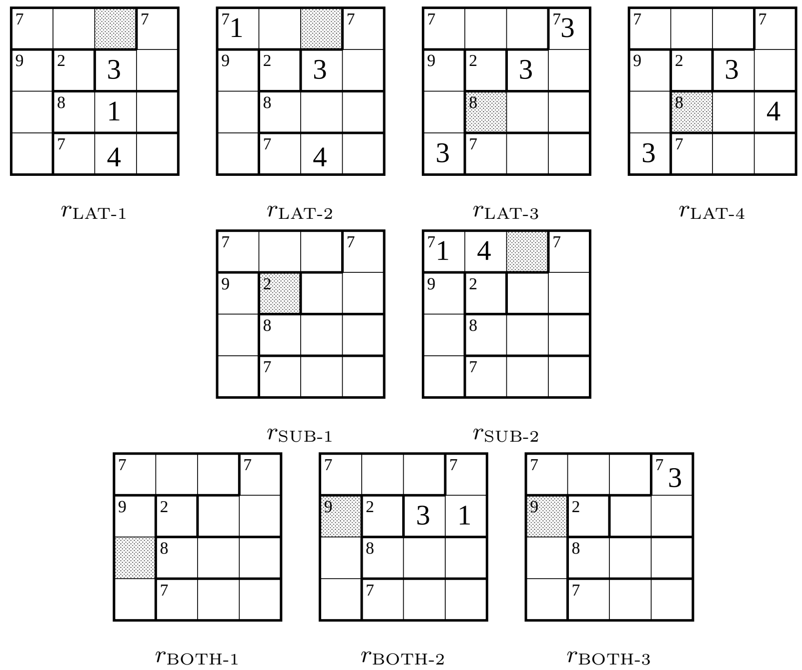

図 3 推論規則が適用可能な盤面および割当可能なセル
Fig. 3 Grids in which inference rules are applicable and assignable cells.

ルに数を割り当てることができる.

ラテン方陣条件に基づく推論規則のクラス R_{LAT}: ラテン方陣条件より, 各行および各列において同じ数をちょうど 1 度ずつ用いることから空きセルに数を割り当てることが可能な場合がある.

部分和条件に基づく推論規則のクラス R_{SUB}: 部分和条件より, 1 つのブロックに空きセルが 1 つだけ存在するとき, その空きセルに数を割り当てることが可能である.

両方の条件に基づく推論規則のクラス R_{BOTH}: ラテン方陣条件より, 完全解において各行に含まれる数の総和は $1 + 2 + \cdots + n = n(n+1)/2$ である. したがって 1 つの行において, ある空きセル以外のすべてのセルに割り当てられる値の合計が何らかの理由で求められるとき (例えば $r_{\text{BOTH-1}}$ のように, 空きセル以外のすべてのセルがその行で

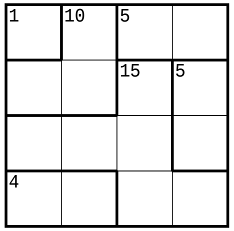

図 4 極大な R^*-可解分割から誘導されるインスタンス
Fig. 4 An instance induced by a maximal R^*-solvable partition.

閉じた線形ブロックに含まれる場合), その空きセルには $n(n+1)/2$ から求められた合計を引いた値を割り当てることが可能である. 以上の議論は列についても同様に適用される.

次に R-可解性の拡張を与える. 人間が紙の上でパズルを解く様子を観察したところ, はじめに空きセルの隅に割り当て得る数のリストを書き下し, その後何らかの理由で割り当てることができないと判断された数をリストから消すことを繰返し, リスト内の数が 1 つだけになったとき, その数をセルに割り当てる, という手続きを行っていた. このことから, 部分解 $S \subseteq [n]^3$ の空きセル $(i,j) \in \mathrm{Emp}(S)$ において, 次の条件を満たす整数 $u \in [n]$ が存在するとき, (i,j) に u を割り当てることができる: u 以外のすべての整数 $v \in [n]$ について, 割当 $S \cup \{(i,j,v)\}$ に対して R に含まれる推論規則を繰返し適用すると, 部分解でない割当が得られる. 分割 $\mathcal{P}$ から誘導されるインスタンスが上記の手続きによって解けるとき, $\mathcal{P}$ を R^*-**可解**という. 明らかに, R-可解な分割は R^*-可解であり, 極大な R-可解分割はハッセ図において極大な R^*-可解分割より上位に存在することはない. 同様に, i 行において (i,j) を除く $n-1$ 個のセルのいずれにも整数 u を割り当てられないとき, u を (i,j) に割り当てることができる. 列についても同様であり, これらについて R-可解性の拡張を与えることもできる.

図 4 に, 極大な R^*-可解分割から誘導されるインスタンスを示す. ただし $R = R_{\mathrm{SUB}} \cup R_{\mathrm{LAT}} \cup R_{\mathrm{BOTH}}$ とする. 図 4 のインスタンスは図 1 で示したインスタンスと同一の証拠を持つ. 図 4 の分割は R-可解ではないが, R^*-可解である. 一方, 図 1 の分割は R-可解である. 多くの人間は前者に「難しい」印象を持つかもしれない.

5. 被験者実験

本節ではインスタンスの難易度を調整するための 2 つのスキームを提案し, これに関する被験者実験の結果を報告する. それぞれのスキームは, ハッセ図における, 分割探索アルゴリズムの横および縦の進行方向に影響を持つ. 被験者実験では大量のインスタンスを生成して被験者に解かせる. 提案スキームを用いてインスタンスの種類を調整し, インスタンスの種類によって被験者の正答状況が変わることを示す. なお簡単のため, 本節では R^*-可解性を取扱わず, R-可解性のみを取扱う.

5.1 分割探索アルゴリズムにおける分割の選択

3 節で与えた分割探索アルゴリズムにおいて, $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ が R-可解な分割を複数持つとき, どれを採用すべきであろうか. R-可解性は R に含まれる**ある**推論規則を用いることによってインスタンスを解けることを意味するが, **すべて**の推論規則を用いなければ解けないことを主張するものではない. ここでは, インスタンスの難易度が, それを解くために実際に必要な推論規則と関わりを持つと予想する. 例えば, 単一ブロックに割り当てるべき数は自明である. 単一ブロックを多く持つインスタンス, すなわち推論規則 $r_{\text{SUB-1}}$ を何度も適用できるインスタンスは, 人間にとって解くのが容易であるに違いない. 一方, クラス R_{BOTH} のように高度な推論規則を使わなければ解けないインスタンスは, 人間にとって解くのが難しいかもしれない.

この予想の下, 以下の難易度調整スキームを提案する: 推論規則 $r \in R$ に対し, その点数 $\mathrm{SCORE}(r) \in \mathbb{R}$ を定める. 分割探索アルゴリズムでは, 分割 $\mathcal{P}' \in \mathcal{N}(\mathcal{P})$ の R-可解性を判定するために $\mathcal{P}'$ から誘導されるインスタンスを解く必要がある. このとき, セルに対して数を割り当てるために用いた推論規則の SCORE 値を, セル全体についてとった総和 $f_R(\mathcal{P}')$ によって分割 $\mathcal{P}'$ を評価する. (1 つのセルに複数の推論規則が適用可能なとき, SCORE 値の最も小さな規則を適用するものとする.) このスキームでは, $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ に含まれる R-可解な分割のうち, 評価関数 f_R の値が最も大きな分割を採用する. したがって難しいインスタンスを生成するためには, $\mathrm{SCORE}(r_{\text{SUB-1}})$ を十分小さな値に定め, $\mathrm{SCORE}(r_{\text{BOTH-1}})$, $\mathrm{SCORE}(r_{\text{BOTH-2}})$ や $\mathrm{SCORE}(r_{\text{BOTH-3}})$ を大きな値に定めればよいと考えられる.

予備実験として, (I) 評価関数 f_R を用いない場合と (II) 用いる場合とでそれぞれ 1000 問のインスタンスを生成し, その傾向を観察した ($n = 4, 5, 6$). 推論規則集合は $R = R_{\mathrm{SUB}} \cup R_{\mathrm{LAT}} \cup R_{\mathrm{BOTH}}$ とした.

(I) 評価関数を用いない場合: 分割探索アルゴリズムにおいて $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ が複数の R-可解分割

を持つとき, そのうちの 1 つをランダムに選択して採用する. アルゴリズムの出力は極大な R-可解分割となる.

(II) 評価関数を用いる場合: 各推論規則の SCORE 値を以下のように定める: $\mathrm{SCORE}(r_{\text{SUB-1}}) = -10^6$ とし, $r_{\text{SUB-2}}, r_{\text{LAT-1}}, \ldots, r_{\text{BOTH-3}}$ の SCORE 値をそれぞれ $2^1, 2^2, \ldots, 2^8$ とする. 分割探索アルゴリズムにおいて $\mathcal{N}(\mathcal{P})$ が複数の R-可解分割を持つとき, 評価関数 f_R の値が最も大きな分割を採用する. アルゴリズムを修正し, 探索中得られた R-可解分割のうち f_R の値が最も大きい分割を採用することにする. (したがって出力される分割は極大とは限らない.)

$n = 4, 5, 6$ のそれぞれについて, インスタンスに含まれる単一ブロックの数の平均は, (I) において 3.0, 5.4, 9.0, (II) において 1.1, 1.9, 4.3 であった. また, R_{BOTH} に含まれる推論規則を用いなければ割当を決められないセルの個数の平均は, (I) において 1.3, 1.9, 2.3, (II) において 2.9, 5.1, 6.0 であった. これらの結果から, インスタンスを解くために必要な推論規則は, 分割に対して適切な評価関数を定めることである程度調整可能なことが分かる.

次に, 分割に対して評価関数を用いることが, 人間にとっての難易度をも調整し得ることを示す. 2010 年 12 月に, 著者が所属する大学の学生 26 名を被験者として, 生成したインスタンスを解かせた ($n = 4$). 被験者を 2 つのグループに分け, それぞれ (I) 評価関数を用いずに生成したインスタンスと (II) 評価関数を用いて生成したインスタンスを解かせた. 実験の冒頭ではパズルのルールの説明を行い, 練習問題を解かせた. その後たくさんのインスタンスが印刷された紙を配布し, 10 分間でできるだけ多くのインスタンスを解くよう指示した. その際, どうしても解けないインスタンスをスキップして次のインスタンスに進むことを認めた. 実験の目的および各被験者が所属するグループに関して説明は行わなかった. またヒアリングの結果, 計算ブロックパズルを熱心に取り組んだ経験のある被験者はいなかった.

被験者の正答セル数の分布を図 6 に示す. この図では 1 つのプロット点が 1 人の被験者に対応する. 我々の予想通り, (II) 評価関数を用いて生成したインスタンスに対する成績は (I) そうでないインスタンスに対する成績ほど良くない傾向が観察された. 正答セル数の 2 つの分布が正規分布に従うと仮定したとき, 両者は異なる分布であることが t-検定 (棄却率は 5%) によって確認された. また両者における正答率 (回答セル数に対する正答セル数の割合) を調べたところ, (I) は $92.1 \pm 7.9\%$, (II) は $78.0 \pm 15.4\%$ であり, 正答率についても予想通りの傾向が観察された. なお (II) では, 各推論規則の SCORE 値を経験に基づいて決定した. 妥当な決定法の検討は今後の課題である.

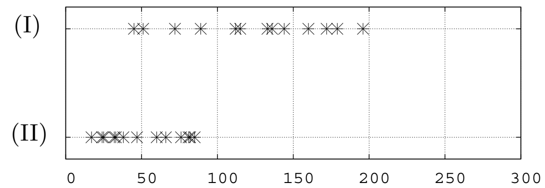

図 5 5.1 節の実験における正答セル数の分布
図 6 Distribution of the numbers of correctly answered cells in the experiment of Section 5.1.

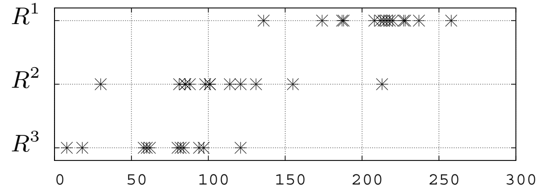

図 7 5.2 節の実験における正答セル数の分布
図 8 Distribution of the numbers of correctly answered cells in the experiment of Section 5.2.

5.2 推論規則の選択

これまでに議論してきたように, 推論規則集合 R' が R の部分集合 (すなわち $R' \subseteq R$) ならば, ハッセ図において, 極大な R-可解分割は極大な R'-可解分割の上位にある. したがって前者から誘導されるインスタンスは, 後者から誘導されるインスタンスより難易度が高いものと予想される.

この予想の妥当性を, 5.1 節と同様の被験者実験によって検証する. この実験は 2010 年 1 月に実施された. 5.1 節の実験の被験者とは異なる 38 名の被験者を 3 つのグループに分け, それぞれ 3 つの推論規則集合 R^1, R^2, R^3 で生成したインスタンスを解かせた ($n = 4$). ただし $R^1 = R_{\text{SUB}} \cup \{r_{\text{LAT-1}}\}$ および $R^3 = R_{\text{SUB}} \cup R_{\text{LAT}} \cup R_{\text{BOTH}}$ とし, R^2 は $R^1 \subseteq R^2 \subseteq R^3$ を満たす集合からランダムに選択した. 生成されるインスタンスの難易度は, R^1 が最も容易で, 次いで R^2, R^3 の順になるものと予想される.

本実験のプロトコルの大部分は, いくつかの例外を除いて 5.1 節のものと同一である. 大きな例外は, 5.1 節で提案した評価関数に基づくスキームを用いないこと, および極大な R-可解分割を用いないことである. 後者について, 本実験で用いる分割は次のように生成される: 分割探索アルゴリズムにおいて, 極大な R-可解分割で停止せず, 極大な唯一解分割 $\mathcal{Q}$ まで上る (探索木によって唯一解分割か否かの判定が可能). 分割 $\mathcal{Q}$ から誘導されるインス

Vol.2011-GI-25 No.6
2011/3/5

タンス I_Q に対し, プレイヤーにとってヒントとなる部分解 $S \subseteq [n]^3$ を埋め込む. 部分解を埋め込むことは, 分割に単一ブロックを埋め込むことと等価と見なせるため, この操作はハッセ図を下ることに相当する. 部分解 S として, 誘導されるインスタンスが R-可解となるもののうち, $\mathrm{Sup}(S)$ が極小となるものを選ぶ. この手続きによって得られる分割は, 必ずしも極大な R-可解分割とは限らない.

被験者の正答セル数の分布を図 8 に示す. 予想された通り, 正答セル数の分布は R^1 において最も右に偏り, 次いで R^2, R^3 の順となった. この結果は, R を適切に定めることによって難易度を調整できるという主張を支持するものである.

6. おわりに

パズル自動生成システムを開発するという目標の下, 本論文ではラテン方陣を解に持つ穴埋めパズルを取り上げ, 難易度調整可能なインスタンス生成アルゴリズムの枠組みを提案した. 計算ブロックパズルのインスタンス生成における主要な問題は, 分割の探索である. これに対する我々のアプローチは, 指定された難易度を実現するように推論規則集合 R を定め, ハッセ図の最小元分割 $\mathcal{P}_\perp$ から極大な R-可解分割まで上りつめるというものである. 推論規則の例を挙げ, 難易度の調整を行うための 2 つのスキームを提案し, その有効性を被験者実験によって確認した.

本論文で提案したアルゴリズムの枠組みは, 数独など他の穴埋めパズルにも適用可能である. 我々の知る限り, パズルインスタンスの生成について具体的に述べた論文は存在しない. 関連研究として, **制約充足**[4] や**メタ戦略**[3] によって数独を解くという論文があるが, これらは数独のインスタンスを解くことに主眼を置いており, 生成の詳細には触れられていない.

インスタンスの難易度を評価することは容易な問題ではない. 我々は推論規則の点数 (SCORE 値) や集合 R の調整によって生成されるインスタンスの種類を変え, そのことが難易度調整につながるものと期待し, 被験者の正答セル数に基づいて提案スキームの有効性を主張した. しかし, これらは難易度を評価するための唯一の基準ではない. 今後他の基準を模索し, さらに研究を進める必要がある. また多くのプレイヤーからフィードバックを得るため, 専用のウェブサイトを構築することも今後の課題として挙げられる.

謝辞　本研究の一部は, 科学研究費補助金 (基盤研究 (C), 20500760) および科学技術融合振興財団 (FOST) 補助金の助成を受けたものである.

参考文献

1) Haraguchi, K., Hiraoka, Y. and Maruoka, A.: How to Construct Solvable Instances for BlockSum Puzzle, *Proc. 11th Japan-Korea Joint Workshop on Algorithms and Computation (WAAC08)*, pp.85–92 (2008).
2) Incognito, A., Hodge, L. and Witt, C.: Exploring Sudoku, *Journal of Recreational Mathematics*, Vol.34, No.3, pp.167–172 (2005-2006).
3) Lewis, R.: Metaheuristics can solve sudoku puzzles, *Journal of Heuristics*, Vol.13, pp.387–401 (2007).
4) Simonis, H.: Sudoku as a Constraint Problem, *Proc. 4th International Workshop of Modelling and Reformulating Constraint Satisfaction Problems*, pp.13–27 (2005).
5) Sudoku Variants: `http://www.passionforpuzzles.com/sudoku-variants/` (accessed on Sep.30th, 2010).
6) 宮本 哲也: **超強育論**, ディスカヴァー (2006).