

## 擦弦振動の過渡状態に関する 数値シミュレーション

中嶋 俊<sup>†1</sup> 吉川 茂<sup>†2</sup>

擦弦振動は定常状態において弦上を1つの角が回転するという特徴を持つ弦振動(ヘルムホルツ運動)である。このことはヘルムホルツによって明らかにされた。本研究では擦弦振動の立ち上がりの部分、すなわち過渡状態からの数値シミュレーションを行い、擦弦点だけではなく弦全体の振動の様子についても解析を行った。その結果、ヘルムホルツ運動が形成されるためには弓の加速度が必要であり、擦弦振動が安定した振動となるためにはナットでの減衰が重要であることが分かった。また、定常状態の振動の様子はヘルムホルツが提唱したような単純な三角形ではなく擦弦点にも弦の曲がり角が存在するのではないかとということが予想される結果が得られた。

## Numerical Simulations of the Bowed String Vibration in Starting Transients

SHUN NAKASHIMA<sup>†1</sup> and SHIGERU YOSHIKAWA<sup>†2</sup>

A sharp corner travels back and forth on the bowed string in the steady state. This motion (called the Helmholtz motion) was first discovered by Helmholtz. We were carried out numerical simulations of the bowed string vibration in the starting transients. The wave motion was analyzed not only at the bowing position but over the whole string. As the result, it suggested that (1) the acceleration of the bowing is needed to create the Helmholtz motion and (2) loss at the nut is important to stabilize the bowed string motion. Also, the bowed string motion is such a simple triangle as Helmholtz suggested, and a small corner is likely to be formed at the bowing position.

<sup>†1</sup> 九州大学芸術工学府芸術工学専攻  
Graduate School of Design, Kyushu University

<sup>†2</sup> 九州大学大学院芸術工学研究院

### 1. はじめに

#### 1.1 擦弦振動

擦弦振動とは弦を弓で擦ることによって弦に生じる振動のことである。擦弦振動では弦と弓がくっついている「スティック」、弦が弓を滑っている「スリップ」の2つの状態が交互に切り替わりながら振動している。定常状態では弦上を1つの角が回っており、この角が擦弦点を通過するときスティックとスリップの状態が切り替わる。これを「ヘルムホルツ運動」という。この擦弦振動は図1のように弦上を2つの角が回る撥弦振動とは振動の様子が大きく異なるといえる。擦弦振動の原理を最初に発見したのはヘルムホルツであり、彼は弦のある一点の観察から擦弦振動が図2のように1つの弦の曲がり角と弦端とを結んだ2本の直線からなる三角形が回転するものであることを発表した<sup>1)</sup>。

#### 1.2 研究の目的

擦弦振動については多くの研究者によって研究がなされてきたが、その多くは定常状態に関するものであり<sup>1)2)</sup> ヘルムホルツ運動が形成されるまでの過渡状態については十分な研究が行われているとはいえない。擦弦振動の過渡状態に関する研究としては Guettler<sup>3)</sup> が代

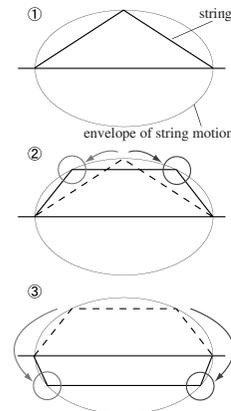


図1 撥弦振動

Fig. 1 Plucked string vibration.

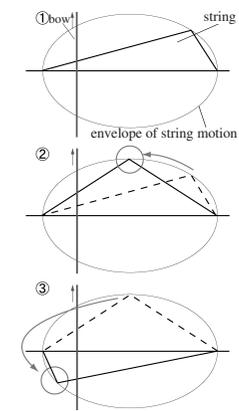


図2 擦弦振動

Fig. 2 Bowed string vibration.

Faculty of Design, Graduate School of Design, Kyushu University

表的なものとして挙げられる。しかし、彼の手法は擦弦点 1 点のみを解析するものであり、弦全体の振動を解析してはいなかった。そこで本研究では擦弦振動をバネ マス系を用いてモデル化し、差分法を用いた数値計算による弦全体の振動のシミュレーションを行うことで過渡状態から定常状態に至るまでの振動の様子を明らかにすることを目的とする。

## 2. 数値シミュレーション

擦弦振動では弦と弓が接触している擦弦点と、それ以外の部分の振動は大きく異なる。また擦弦点の振動はスティックの状態とスリップの状態と異なるはずである。そこで擦弦点に弓が及ぼす影響を考慮し、スティックとスリップの状態によって場合分けした物理モデルを構築する。

### 2.1 擦弦点以外の部分における弦の運動

擦弦点以外の部分では弦と弓の接触がないため、一般的な撥弦振動と同様に考えることができる。弦振動は横振動のみで線形であり、減衰や弦の剛性のない理想的な条件を与えると弦を伝搬する横波は以下の 1 次元線形波動方程式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \quad (1)$$

ここで  $y$  は弦の変位、 $t$  は時間、 $c$  は横波の伝搬速度である。上式を FDTD 法を用いて解くと以下の式が得られる。

$$y(x, t + \Delta t) = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t)) + 2y(x, t) - y(x, t - \Delta t) \quad (2)$$

ここで  $\Delta t$ 、 $\Delta x$  はそれぞれ微少時間、微少区間である。なお、FDTD 法で波動方程式を解く場合に解が数値分散性を持たない条件は、

$$\frac{c \Delta t}{\Delta x} = 1 \quad (3)$$

であり、この式を満たすように  $\Delta t$ 、 $\Delta x$  の値を設定している。

### 2.2 スティック状態における擦弦点の運動

スティック時には弦と弓はくっついているので擦弦点の動きは弓の動きと同じであり、弓

速度  $v_B$  で動く。よってスティック状態における擦弦点の変位  $y(x_B)$  を以下の式で与える。

$$y(x_B, t) = v_B(t) \Delta t + y(x_B, t - \Delta t) \quad (4)$$

ここで、弓速度  $v_B$  は弓初期速度  $v_0$ 、弓加速度  $a$  を用いて  $v_B = v_0 + at$  で与えられる。

### 2.3 スリップ状態における擦弦点の運動

スリップ時には弦の動く向きと反対方向に動摩擦力  $F_d$  が働く。

$$F_d = -\text{sgn}(v_R) \mu_d F_z \quad (5)$$

ここで、 $v_R$  は弓と擦弦点の相対速度、 $\mu_d$  は動摩擦係数、 $F_z$  は擦弦力である。擦弦点の  $y$  方向に働く力が弦の張力と動摩擦力であることから運動方程式を立てると、

$$\rho dx \frac{\partial^2 y(x_B, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x_B, t)}{\partial x^2} dx + F_d \quad (6)$$

となる。ここで  $\rho$ 、 $T$  はそれぞれ弦の線密度、張力である。この式を FDTD 法を用いて解くと、

$$y(x_B, t + \Delta t) = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (y(x_B + \Delta x, t) - 2y(x_B, t) + y(x_B - \Delta x, t)) + 2y(x_B, t) - y(x_B, t - \Delta t) + \frac{\Delta t^2}{\rho \Delta x} F_d \quad (7)$$

となる。スリップ中は式 (7) によって擦弦点の変位を与える。

### 2.4 張力の計算

上に述べたように擦弦点での  $y$  方向の弦の張力は擦弦振動において非常に重要なパラメータである。ここでは張力の計算方法を示す。平衡状態の弦には  $x$  方向に張力  $T$  が働いている。しかし弦が曲がるとその傾きに応じて  $y$  方向にも張力が働く。弦上のある点  $x$  の  $y$  方向の張力  $T_y$  は以下のように計算できる。

$$T_y = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} dx = T \frac{y(x + \Delta x, t) - 2y(x, t) + y(x - \Delta x, t)}{\Delta x} \quad (8)$$

これは弦の傾きが大きいほど  $y$  方向に大きな張力がはたらいていることを意味し、逆に弦が曲がっていないければ、その点での  $y$  方向張力は 0 であることを意味する。すなわち擦弦振動においては弦の角が通過する瞬間、その点には急激に大きな張力が働くことになる。

### 2.5 弦端での減衰

(2) 式で弦振動をシミュレーションする場合、弦端での変位を常に 0 とすれば弦端は固定

端となる．しかし実際には弦端はわずかに振動し弦端で波の減衰が生じる．これをシミュレーションするため弦端に速度に比例する抵抗  $r$  [kg/s] を取り付けたモデルを考える．このモデルのナットでの運動方程式を以下に示す．

$$\frac{1}{2}\rho dx \frac{\partial^2 y(x_N, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial y(x_N, t)}{\partial x} - r \frac{\partial y(x_N, t)}{\partial t} \quad (9)$$

ここで  $y(x_N)$  はナットでの変位である．弦端ではその片側にしか弦が存在しないので微小部分の質量が  $\rho dx/2$  ,  $y$  方向の張力が  $T$  と  $y$  の  $x$  に関する一階微分で表される．差分法を用いて式 (9) を解くと、

$$y(x_n, t + \Delta t) = \frac{B}{1+B} y(x_N, t) + \frac{2}{B} y(x_N - \Delta x, t) - \frac{1}{B} y(x_N, t - \Delta t) \quad (10)$$

となる．ここで  $B$  は定数である．

$$B = \frac{2r\Delta t}{\rho\Delta x} \quad (11)$$

弦端での減衰を考慮したシミュレーションの場合には (9) 式を用いてナットでの変位を計算した．

2.6 スティック・スリップの切り替え条件

擦弦振動では擦弦点で  $y$  方向に働く張力と摩擦力との関係によってスティックとスリップの状態が切り替わる．本研究ではその条件を以下のように与えた．

スティックの状態では  $v_B = v_S$  , すなわち弓から見て弦は静止している状態である (図 3 (a)) . この時弦には静止摩擦力  $F_s$  が張力  $T_y$  とつりあっており,  $T_y$  が増加すれば  $F_s$  も増加する．しかし  $F_s$  の大きさは最大値  $F_{smax}$  で制限される．最大静止摩擦力  $F_{smax}$  は静止摩擦係数  $\mu_s$  と擦弦力  $F_z$  の積で与えられる．

$$F_{smax} = -\text{sgn}(T_y)\mu_s F_z \quad (12)$$

$T_y$  が  $F_{smax}$  を超えたときつりあい崩れスティックからスリップへと遷移する．なお, 力は  $y$  方向正の向きに働くとき正と定義する．

一方, スリップの状態では擦弦点弓の動きと反対向きに大きな速度で滑っていく．このとき擦弦点には動摩擦力  $F_d$  が働く．スリップからスティックへと切り替わる条件についてこれまで明確に言及した論文はないが, 定常状態において弦上を周る角が弓に到達することがトリガーとなることは分かっている．そこで本研究ではスリップからスティックへと

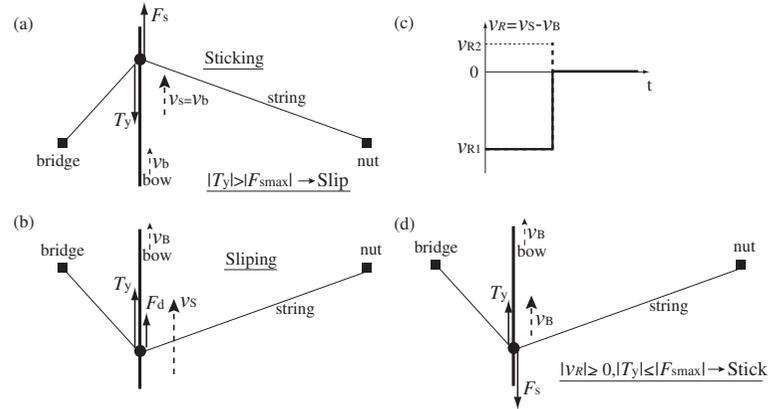


図 3 スティック・スリップの切り替え条件

Fig. 3 The requirements for switching the sticking and the slipping state.

表 1 スティック・スリップの切り替え条件

Table 1 The requirements for switching the sticking and the slipping state.

state	requirement
stick	$ T_y  >  F_{smax} $ (stick to slip)
slip	$ v_R  \geq 0,  T_y  \leq  F_{smax} $ (slip to stick)

切り替わる条件を以下のように仮定する．図 3 (b) のように弦上を周る角が弓に到達すると  $y$  方向上向きに張力が働き, 瞬間的に弦速度が増大, 当然弓と弦の相対速度  $v_R$  も増大する．このときスリップからスティックへと切り替わらなければ相対速度が図 3 (c) の点線のように  $v_{R1}$  から  $v_{R2}$  へと増加すると仮定する．ここで  $v_{R1}$  から  $v_{R2}$  へと増加する途中で  $v_R = 0$  となる瞬間があることに注目する．相対速度が 0 のとき弓から見て弦は静止した状態であるからこのとき動摩擦力は働かず静止摩擦力が働く (図 3 (d)) . さらにこのとき張力  $|T_y| \leq |F_{smax}|$  であれば, 弦は弓に捕えられスリップからスティックへと切り替わると考えられる (図 3 (d)) . このとき相対速度は図 3 (c) の実線のように変化する．

スティック・スリップの切り替え条件を以下の表にまとめる．なお実際のシミュレーションにおいて, スリップ中ある時点で  $|v_R| \geq 0$  かつ  $|T_y| \leq |F_{smax}|$  となった場合, その時点でスティックに切り替わったものとみなし, その時点における変位を式 (4) で再計算した．

表 2 シミュレーション条件  
Table 2 Main Parameter values for simulations.

fundamental frequency	$f$	196[Hz]
string tension	$T$	43.15[N]
string length	$L$	0.328[m]
phase velocity	$c$	128.6[m/s]
maximum static friction coefficient	$\mu_s$	0.8
minimum dynamic friction coefficient	$\mu_{dmin}$	0.3
damping resistance at the nut	$r$	13[kg/s]
time step	$\Delta t$	21.3[ $\mu$ s]
space step	$\Delta x$	2.73[mm]

## 2.7 シミュレーション条件

シミュレーションに共通して用いた各パラメータの値を表 2 に示す．この条件はヴァイオリン (4/4 スケール) の G 線の開放弦，弦の種類は最も良く使用されている Dominant を対象としたものである．3 章に示すシミュレーション結果はこれらの値を共通に用い，相対擦弦位置  $\beta$ ，弓初期速度  $v_0$ ，弓加速度  $a$ ，擦弦力  $F_z$  の値を変えて計算を行った．なお，ボーイングはアップボーイングを仮定し，弓速度，弓加速度の値は全て 0 以上とした．また，弓の加速度は  $t = (1/\beta - 1)\tau$  から 0 とし，それ以降は弓速度が一定になるよう設定した．ここで  $\tau$  は振動の周期である．また，最初にスリップが起きた瞬間を  $t = 0$  とする．

## 3. シミュレーション結果

### 3.1 ヘルムホルツ運動の形成

Guettler<sup>3)</sup> による先行研究ではヘルムホルツ運動の形成には弓加速度，ナットでの減衰を適切に与えることが必要であることが示されているが，シミュレーション手法の異なる本研究においても同様に，弦速度が一定の条件ではヘルムホルツ運動が形成されず，弓加速度とナットでの減衰を適切に与えた場合のみヘルムホルツ運動が形成される結果が得られた．さらに弦全体の振動の様子を観察すると振動の初期には弦上を 2 つの角が伝搬し，ある時点から角が 1 つになるというヘルムホルツ運動の形成過程を確認することができた<sup>4)</sup>．

### 3.2 擦弦点の振動

ここでは，ヘルムホルツ運動が形成された条件の 1 つである  $v_0 = 0$  [m/s],  $a = 4.5$  [m/s<sup>2</sup>],  $F_z = 0.4$  [N],  $\beta = 1/5$  でのシミュレーション結果を示す．図 4~7 はそれぞれ擦弦点の  $y$  方向張力，変位，弦速度，相対速度の時間変化である．

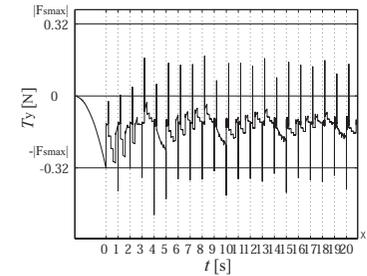


図 4 擦弦点  $y$  方向張力  
Fig. 4 Tention at the bowed point.

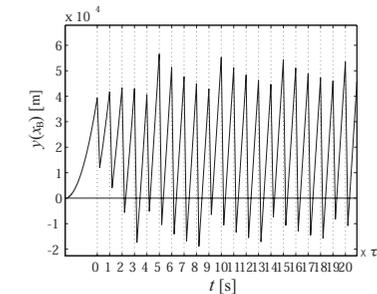


図 5 擦弦点変位  
Fig. 5 Displacement at the bowed point.

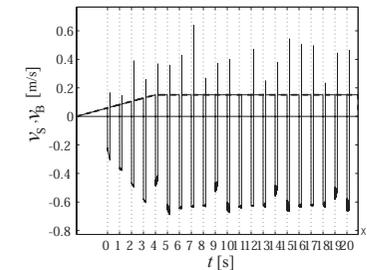


図 6 擦弦点弦速度，弓速度  
Fig. 6 String velocity at the bowed point and bowing velocity.

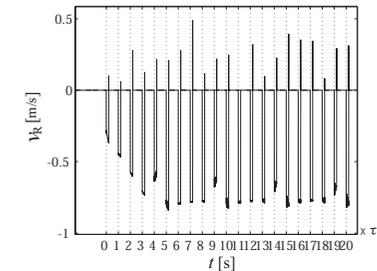


図 7 擦弦点相対速度  
Fig. 7 Relative velocity.

図 4 を見ると張力は  $t = 0$  から 1 周期ごとに負に大きな値を取っている．これは弦上を伝搬する角が擦弦点に到達したとき，その瞬間だけ大きな張力が働くためである．このとき表 1 の条件  $|T_y| > |F_{smax}|$  を満たし，スティックからスリップへと切り替わる．また，張力は階段状に幅を持って変化しており，この一段の幅はブリッジ 弓間を横波が伝わる周期  $\tau_b = \tau\beta$  に相当している．張力は各周期のはじめから  $\tau_b$  後に正に大きな値をとっている．これは擦弦点を通じた弦の角がブリッジで反射し再び擦弦点に戻ってくるためである．このときの張力は  $|T_y| \leq |F_{smax}|$  であり，スリップからスティックに切り替わる条件の 1 つを満たす．

図 6 において実線は擦弦点の弦速度  $v_s$  を，点線は弓速度  $v_b$  を示す． $v_s$  はスリップ中負

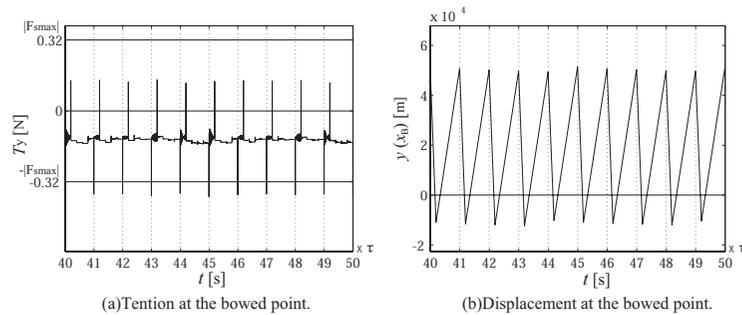


図 8 ナットでの減衰を考慮したシミュレーション  
Fig. 8 Simulation with loss at the nut.

に大きな値を取るが、スティック時には弓速度と一致している．よって図 7 においてはスティック中の相対速度  $v_R$  は 0 である．そして各周期のスリップの終わりには擦弦点に角が到達することで  $y$  方向正に大きな張力が働くためである．瞬間的に正に大きくなる．このとき、 $|v_R| \geq 0$  であり、前述したように張力も  $|T_y| \leq |F_{smax}|$  であるためスリップからスティックへと状態が切り替わる．図 6 を見るとはじめの数周期は変化の幅が大きくなっていくが、その後はある一定の幅を持って変動するようになる．

すべてのグラフにおいて 5 周期を 1 サイクルとして値が変化している様子が見られる．これはパラメータを変えてもヘルムホルツ運動が形成される場合には同様の傾向が見られ、その変化のサイクルは  $1/\beta$  であった．しかし変化の幅は次第に小さくなっていき、ほぼ一定の値に収束していくことが分かった．この様子は図 4~7 でもわずかに見てとることができる．

### 3.3 ナットでの減衰の影響

前節のシミュレーション条件で、最初のスリップから十分に時間が経過した後の振動の様子 ( $t = 40\tau$  から  $t = 50\tau$ ) の  $y$  方向張力と変位の時間変化を図 8 に示す． $y$  方向張力は各周期の最初と、その  $\tau_b$  後、すなわち擦弦点を角が通過する瞬間のみ大きく変化するがそれ以外はほぼ一定の値である (図 8(a))．また、擦弦点の変位も同じ振幅で周期的に変化している (図 8(b))．これらの結果はこれまでの研究で明らかにされてきた擦弦振動の定常状態の特徴に非常に近いものであるといえるだろう．一方、このシミュレーション条件からナットでの減衰をなくしたシミュレーションを行ったところ、図 8 とは大きく異なる結果が得られた (図 9)．この図を見れば分かるようにナットでの減衰がない場合には十分に時間が経過した後でも振動は安定せず、図 4 や図 5 における振動初期のような状態のままである．

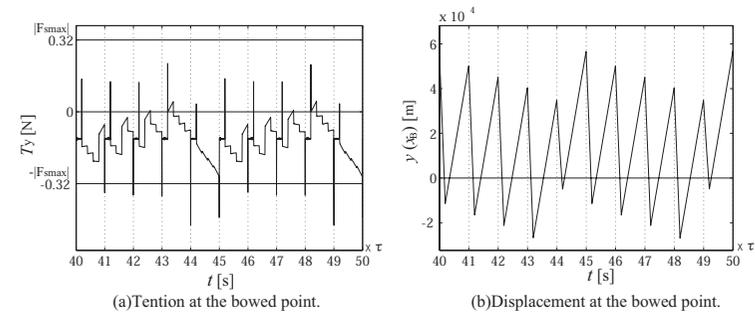


図 9 ナットでの減衰がない場合のシミュレーション  
Fig. 9 Simulation with no loss at the nut.

よって定常状態で観測されるような各周期で変化の少ない安定した振動が実現されるためには、ナットにおける減衰が大きな役割を果たしていると考えられる．

### 3.4 弦全体の振動

前節と同じ条件でのシミュレーションから得られた弦全体の振動の様子を図 10 に示す．各図においてある時刻から  $\tau_b$  間の変位を  $\tau_b/5$  毎にプロットし、その時間帯における最後の変位を実線で、それ以外を点線で示した．また図 10(a)-(e) は 1 周期目、(f)-(j) は 4 周期目、(k)-(o) は 50 周期目の振動の様子である．また、弦の中央 ( $x = L/2$ ) での変位を図 11 に示す．

図 10(a)-(e) を見ると振動の初期には弦上には 2 つの角が周回している．また、擦弦点にも弓との摩擦により角があることが分かる．図 10(f)-(j) では弦上を回る角は 1 つになっている．この様子は図 2 に近いものであるように見えるが、擦弦点はやはりスリップの状態でもスティックの状態でも弓との摩擦によって角ができていく．(k)-(o) は振動が安定している 50 周期目の様子であるが、この時点でも弦上を回る 1 つの角の他に、やはり擦弦点には角ができていく．以上のことから考えられるのは、擦弦振動の定常状態の様子は図 2 のように弦上を回る角と弦端とを結んだ 2 本の直線だけからなるのではなく、擦弦点にも弦上を回ることのないもう小さな 1 つの角が存在しているのではないかということである．

また、弦上を回る角、擦弦点での角のほかに更にいくつかの小さな角が弦上を伝搬していることが確認できた．これは図 10(k) を見ると確認しやすい．また、図 11 を見ると変位の波形は理想的な三角波ではなく、直線部がやや曲がったような波形となっている．ここで、ヘルムホルツが観測した波形は皺 (crumples) 状であり、それを 1 周期が 2 本の直線から

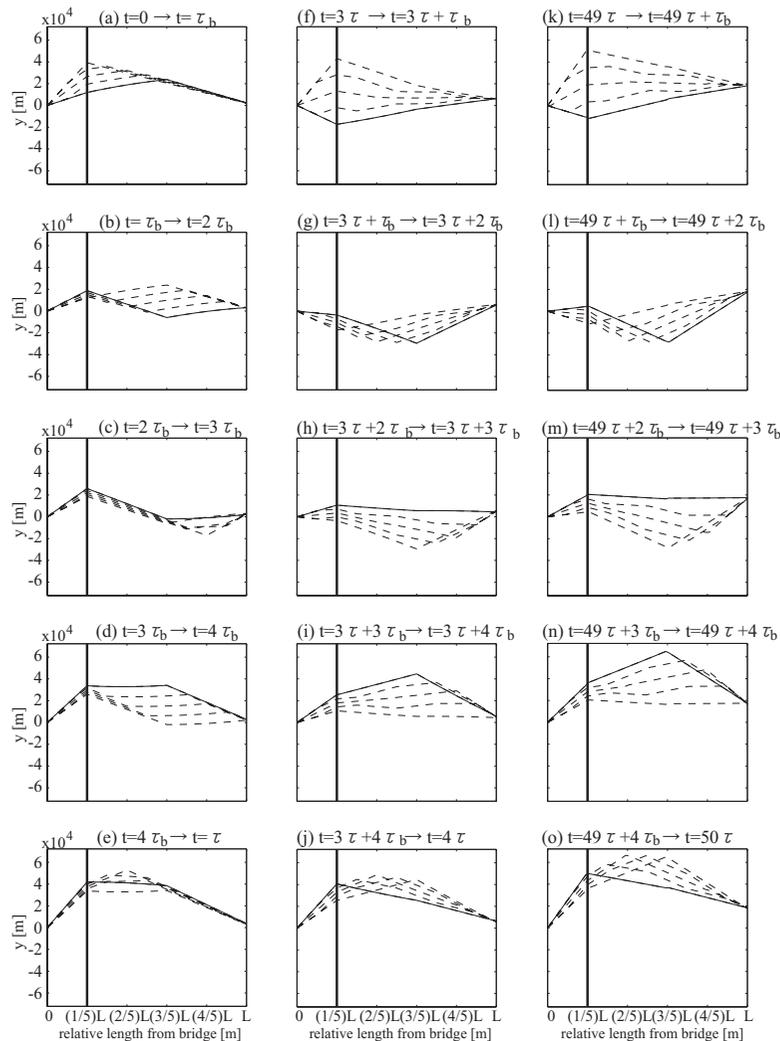


図 10 弦振動の時間変化  $v_0 = 0[\text{m/s}]$ ,  $a = 4.5[\text{m/s}^2]$ ,  $F_z = 0.4[\text{N}]$ ,  $\beta = 1/5$   
Fig. 10 Temporal change of the bowed string vibration.

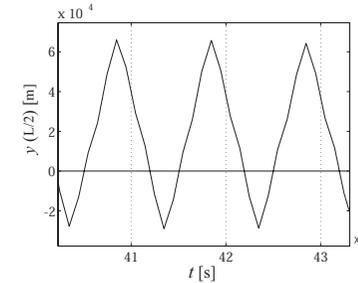


図 11  $x = L/2$  での変位  
Fig. 11 Displacement at  $x = L/2$ .

なる波形に単純化したことから考えると、実際の擦弦振動では弦上を回る複数の小さな角が存在しているのではないかと考えられる。

#### 4. ま と め

擦弦振動の弦全体のシミュレーションを過渡状態から行うことで、弦上を回る角が1つになりヘルムホルツ運動が形成された後、張力や変位、弦速度などの変化の幅がほぼ一定になるまでにはある程度時間がかかること、そして変化の幅が一定になるためにはナットでの減衰が重要な役割を果たしていることが分かった。また、弦全体の振動の様子から擦弦振動の定常状態はヘルムホルツが提唱したような単純な三角形ではなく、実際には弦上を回る1つの大きな角に加え、小さな角が周り、さらに擦弦点でも小さな角が存在するような形なのではないかということが予想される結果が得られた。

#### 参 考 文 献

- 1) HLF Helmholtz, "On the Sensations of Tone", 1877, Trans. AJ Ellis, Dover, New York, 1954
- 2) 久保田秀美, "弓で擦った弦の定常振動の運動学的研究", 音響学会誌 43, pp.311-316, 1987
- 3) Knut Guettler, "On the Creation of the Helmholtz Motion in Bowed Strings", Acta Acustica United with Acustica, Vol. 88, pp.970-985, 2002
- 4) 中嶋 俊, "擦弦振動の立ち上がりにおけるヘルムホルツ運動の形成過程", 日本音響学会 2010 年秋季研究発表会講演論文集