

幅広い複雑性領域に適合する 一般化べき乗分布モデル

宮 下 洋 一^{†1}

論文では、べき乗則から逸脱する領域を含めて幅広く適合する新しい統計分布モデル（一般化べき乗分布モデルと呼ぶ）を提案する。このモデルは、パラメータが特定値のときにべき乗分布になるように拡張した統計分布モデルである。論文では、べき乗則が成立する典型的な実データに対して一般化べき乗分布が幅広い範囲で適用できることを示す。さらに、一般化べき乗分布になるようなデータを生成するダイナミックモデルを提唱する。このダイナミックモデルは、複雑ネットワークの優先的選択型成長モデルと密接な関係を持っている。

Generalized Power-Law Distribution Model Applicable for Wide Complexity Area

YOICHI MIYASHITA^{†1}

This paper propose new stochastic model called generalized power-law distribution which are applicable for wide complexity ares. When the parameter has special value, this model becomes power-law distribution. In this paper, this model is showed to be applicable for typical power-law real data. Dynamic model for generating the generalize power-law distribution data is also proposed. This dynamic model is closely related to the growing model of complex network.

1. はじめに

複雑性は、社会構造、産業構造、生態系、地質構造、ネットワーク構造など幅広いシステム領域の共通的な問題として研究が進められている。複雑系のシステムを特徴づける特性としてべき乗則がある。しかしながら実際のデータにおいては、全てのデータ範囲にわたってべき乗則が成立する場合は少ない。部分的な複雑性（規模）の範囲でべき乗則が成立する場合において、べき乗則が成立する範囲とべき乗則から逸脱する範囲の区別は明確ではない。べき乗則が成立する範囲とそうでない範囲でのシステムの構造原理を分けて考える合理的な根拠はあまりない。

本論文では、べき乗則から逸脱する領域を含めて幅広く適合する新しい統計分布モデル（一般化べき乗分布モデルと呼ぶ）を提案する。さらに、一般化べき乗分布になるデータを生成するためのダイナミックモデル（一般化べき乗則ダイナミックモデルと呼ぶ）を提唱する。このダイナミックモデルは、複雑ネットワークモデルの典型例である優先的選択型成長モデルとも密接な関係を持っている

2. べき乗分布の適用事例と適用限界

べき乗則が成立するといわれている分野は多様である。適用範囲は社会学、経済学、地質学、生物学と幅広い¹⁾。例えば、都市の人口分布、所得や企業規模の分布、地震の大きさと発生頻度の関係などが典型的な例である。さらに情報ネットワークに代表されるような複雑ネットワークに関する多くのシステムでべき乗則が成立することが観測されている²⁾。

べき乗則が成立するといわれている一つの事例として市町村別の人口分布を考察する。平成 17 年の国勢調査データ³⁾を、市町村別の人口が多い順に並べた順位と人口との関係を両対数のグラフで表したのが図 1 である。人口が 100000 人以上の市町村の範囲では、順位と人口の関係が直線状になっており、べき乗則が成立していることが読み取れる。しかしながら、100000 人以下の市町村では直線から下方へのずれが大きくなり、べき乗則が成立しない。

もう一つ別の事例として事業所規模の分布について考察する。総務省では業界ごとの従業員数で区分した事業所数のデータを公開している⁴⁾。このデータについて図 1 と同じように従業員が多い順に並べた順位と事業所数の関係を表したのが図 2 である。この場合も順位が高い範囲ではべき乗則に適合した傾向がみられ

^{†1} ワクコンサルティング株式会社
Waku Consulting Company Ltd.

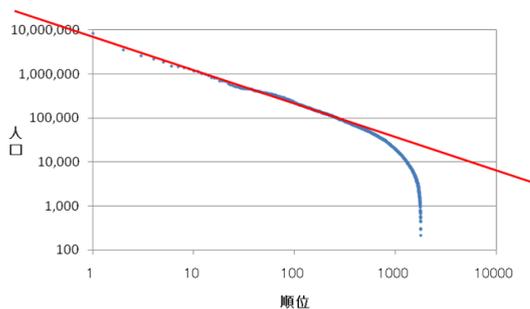


図 1 市町村人口の分布
 Fig. 1 Distribution of City Population

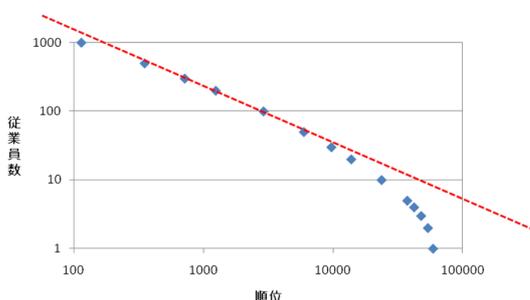


図 2 事業規模の分布
 Fig. 2 Distribution of Business Volume

るものの、下位の順位になるとべき乗則からのずれが大きくなる傾向がみられる。

この二つの例ではべき乗則に厳密に適合するのはデータの全体ではなく一部である。図 1 や図 2 のようなグラフで表したときに上に凸の分布の形になることが共通している。べき乗則に従うといわれている他の例でも同様に、全てのデータ範囲で直線上にはならず上に凸の形の分布になる場合が多い。

複雑系の分野では、これまでにべき乗則が成立しているデータ範囲については多くの研究が進められてきている。しかしながら、べき乗則から逸脱する範囲を含めたデータ全体の構造については、それぞれの問題領域ごとの研究は進められているものの、統一的なモデルを使った研究は少ない。べき乗則に適合する範囲とそうでない範囲を区別する基準もあいまいである。べき乗則が成立する部分とそうでない部分でのシステム構造原理をわけることについては合理的な理由はない。べき乗則からずれる現象についても類似したパターンが多くみられることから、べき乗則からずれる部分を含めた幅広い複雑性の領域に適合するモデルによる分析が必要である。

3. 一般化べき乗分布モデル

3.1 一般化べき乗分布の定義

本論文で提案する統計分布モデルの定義は次の通りである。

定義 1 一般化べき乗分布

一般化べき乗分布の累積分布関数 $F(x)$ 確率密度関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\log(x/\gamma)}{\beta} \right]^\alpha \right\} \quad (1)$$

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\log(x/\gamma)}{\beta} \right]^{\alpha-1} \{1 - F(x)\} \quad (2)$$

α, β, γ をそれぞれ形状パラメータ、尺度パラメータ、位置パラメータと呼ぶ。

一般化べき乗分布で形状パラメータが 1 の場合には、次のようにべき乗分布になる。

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x} \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (3)$$

図 3 は、一般化べき乗分布の尺度パラメータと位置パラメータを一定にしたまま形状パラメータを変えたときに累積分布が変化する様子を表したものである。形状パラメータによって累積分布の形状が変わる。

一般化べき乗分布において、横軸と縦軸をそれぞれ $\log(1 - F(x))$ と $\log(x)$ で表したグラフが図 4 である。図 4 は、図 1 や図 2 に対応するように分布を表現したグラフである。形状パラメータが 1 の場合には直線状になりべき乗分布になる。形状パラメータが 1 より大きい場合には上に凸のグラフになり、図 1 や図 2 と似た形状になる。逆に、形状パラメータが 1 より小さい場合には下に凸のグラフになり、順位が高くなると値が急激に上昇することがわかる。これは、5 章で説明するように、いわゆる「一人勝ち型」の場合に相当する分布である。

3.2 一般化べき乗分布の性質

一般化べき乗分布の平均と分散を解析的に求めるこ

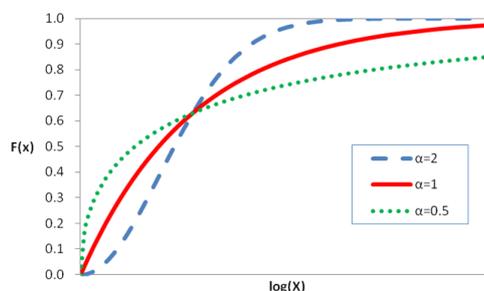


図 3 一般化べき乗分布
 Fig. 3 Graph of Generalized Power-Law Distribution

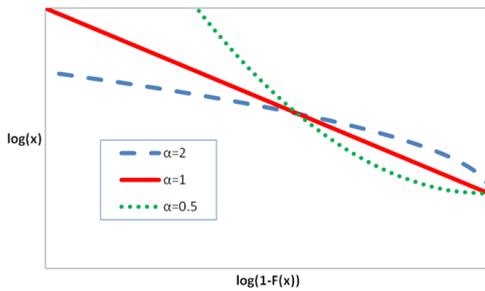


図 4 一般化べき乗分布の順位表現

Fig. 4 Rank representation of Generalized Power-Law Distribution

とはできないが、その有限性については次の性質が成立する。

性質 1 一般化べき乗分布の基本統計量の有限性
一般化べき乗分布の平均と分散の有限性はパラメータによって次のように変わる。

	$\alpha > 1$	$\alpha = 1$		$\alpha < 1$
平均	有限	$\beta < 1$ 有限	$\beta \geq 1$ 無限	無限
分散	有限	$\beta < 1/2$ 有限	$\beta \geq 1/2$ 無限	無限

一般化べき乗分布では、形状パラメータが 1 未満の場合には、平均、分散ともに発散してしまて求められない。また、形状パラメータが 1 (べき乗分布) の場合には、尺度パラメータによって平均や分散の有限性が変わる。

性質 2 一般化べき乗分布とワイブル分布の関係
一般化べき乗分布はワイブル分布と関係がある。ワイブル分布は次のような累積分布 $F(y)$ で定義される分布で、器材の寿命分布として広く使われている⁵⁾。

$$F(y) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{y}{\beta} \right]^\alpha \right\} \quad (4)$$

式 (1) と式 (4) からわかるように、一般化べき乗分布の確率変数 x の対数をとった確率変数 $y = \log(x/\gamma)$ はワイブル分布になる。このことから、正規分布に対する対数正規分布と同じように、本論文で提案する分布の名前を「対数ワイブル分布」と呼ぶことも考えられる。しかしながら、統計学の方では対数ワイブル分布を極値分布を指す別の分布の名前として使われており⁶⁾、この分布の名前には使えない。ただし、パラメータの名称はワイブル分布のパラメータの呼び方と同じものを使っている。

ワイブル分布の平均値 (μ) と分散 (σ^2) は Γ 関数を使って次のように求められる。

$$\mu = \beta \Gamma \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right)$$

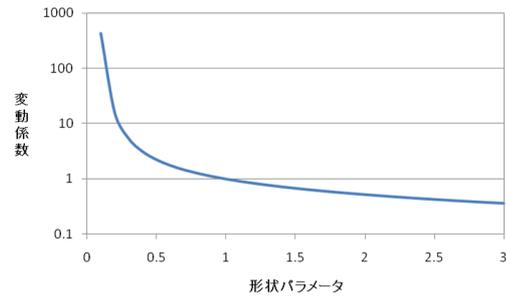


図 5 形状パラメータと変動係数

Fig. 5 Shape parameter and Coefficient of Variation

$$\sigma^2 = \left\{ \Gamma \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right) - \Gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right) \right\}$$

従って、一般化べき乗分布の確率変数の対数値については、その平均と分散も同様の式で求めることができる。このことから、一般化べき乗分布の確率変数の対数値についての変動係数 (CV) は次のようになる。

$$CV [\log(x/\gamma)] = \left\{ \frac{\Gamma \left(\frac{2}{\alpha} + 1 \right)}{\Gamma^2 \left(\frac{1}{\alpha} + 1 \right)} - 1 \right\}^{1/2} \quad (5)$$

このように、変動係数は形状パラメータによってのみ決まり、尺度パラメータや位置パラメータには依存しない。形状パラメータの値と変動係数の関係を表したのが図 5 である。形状パラメータが小さくなると変動係数が急激に大きくなる。

一般化べき乗分布のように形が偏って分散が大きな分布については、平均値は実用的にはあまり重要でない。ばらつきが大きくて偏った分布の場合には中央値などの分位値を使う場合が多い。一般化べき乗分布の場合には、次に定義する e 分位値が、分布全体のおおまかな特徴を捉えるときに便利な指数となる。

性質 3 e 分位値の定義と性質

累積分布の値が、 $(1-1/e)$ になる確率変数の値 (x_e) を e 分位値と呼ぶ。一般化べき乗分布の e 分位値は次のように求められる。

$$F(x_e) = 1 - 1/e \quad (6)$$

$$x_e = \gamma e^\beta \quad (7)$$

一般化べき乗分布の e 分位値は、尺度パラメータと位置パラメータからのみ決まり、形状パラメータには依存しない。図 3 において形状パラメータを変化させた場合にも変わらない交点が、 e 分位値である。 e 分位値は、上位 ($1/e \approx 0.37$) になるときのパーセント分位値である。一般化べき乗分布データの値の大きさを大まかに把握するときに使える。

べき乗分布を特徴づける性質として、定数倍しても分布の構造が変わらないスケールフリー性がある。

$$g(x) \propto x^k \text{ ならば } g(cx) = c^k g(x)$$

一般化べき乗分布では、この性質を一般化したスケール

ルフリー性を持っている。

性質 4 一般化べき乗分布のスケールフリー性

一般化べき乗分布の確率変数を定数倍したときには、式 (1,2) から次の関係が成立する。

$$F(cx) = 1 - \exp \left\{ - \left[\frac{\log(x/(\gamma/c))}{\beta} \right]^\alpha \right\} \quad (8)$$

$$f(cx)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta cx} \left[\frac{\log(x/(\gamma/c))}{\beta} \right]^{\alpha-1} \{1 - F(cx)\} \quad (9)$$

一般化べき乗分布の確率変数を定数倍した確率変数の累積分布 (式 (8)) は、位置パラメータを定数倍するだけで、形状パラメータと尺度パラメータは変わらない分布になる。式 (9) で、形状パラメータを 1 にした時には次のようになる。

$$f(cx) = \left(\frac{\gamma}{\beta}\right) \left(\frac{1}{cx}\right)^{1+\frac{1}{\beta}} = \left(\frac{1}{c}\right)^{1+\frac{1}{\beta}} f(x)$$

これはべき乗分布のスケールフリー性を表す式である。式 (9) は、べき乗分布のスケールフリー性を一般化べき乗分布に拡大した性質を表した式である。

一般化べき乗分布は、形状パラメータが 1 の場合はべき乗分布になるが、それに加えて、形状パラメータが 1 でない場合でも、値が大きい範囲ではべき乗分布に近い分布になるという性質がある。

性質 5 一般化べき乗分布とべき乗分布の近似関係
 累積分布が $F(x)$ である確率変数の値がある値 (A とする) 以上の範囲での条件付き分布を、 $G(x, A)$ とする。

$$G(x, A) = \frac{F(x) - F(A)}{1 - F(A)} = 1 - \frac{1 - F(x)}{1 - F(A)}$$

$F(x)$ が一般化べき乗分布 (式 (1)) の場合には、 $G(x, A)$ は次のようになる。

$$G(x, A) = 1 - \exp \left\{ \left[\frac{\log(A/\gamma)}{\beta} \right]^\alpha - \left[\frac{\log(x/\gamma)}{\beta} \right]^\alpha \right\}$$

$\log(x/A) \ll \log(A/\gamma)$ とすると、 $G(x, A)$ は、次のように近似できる。

$$G(x, A) \simeq 1 - \left(\frac{A}{x}\right)^{\frac{\alpha[\log(A/\gamma)]^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}} \quad (10)$$

式 (10) から、 $\log(x/A) \ll \log(A/\gamma)$ となる A の近傍では、一般化べき乗分布はべき乗分布に近い分布になる。図 6 は形状パラメータが 2 の場合の一般化べき乗分布とべき乗分布の近似を表したものである。 x が大きく $F(x)$ が 1 に近い範囲では直線に近い分布になり、べき乗則に近くなる。

A として特別に式 (7) で定義した e 分位値 (x_e) をとると、式 (10) は次のようになる。

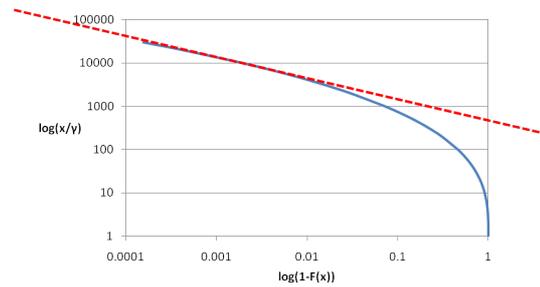


図 6 一般化べき乗分布のべき乗近似

Fig.6 Power-Law approximation of Generalized Power-Law Distribution

$$G(x, x_e) \simeq 1 - \left(\frac{x_e}{x}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad (11)$$

すなわち、一般化べき乗分布は、 e 分位値の近傍で次数が (α/β) のべき乗分布に近い分布になる。これは、 e 分位値付近でのおおまかな分布の状況を把握するのに役立つ情報である。

3.3 一般化べき乗分布パラメータの求め方

観測データからの一般化べき乗分布のパラメータを求める手順は次の通りである。

定義 2 一般化べき乗分布のパラメータ計算手順

Step1 観測データを昇順にソートする。観測データの数を N とする。

Step2 観測データの最小値を位置パラメータ γ の値とする。

Step3 昇順に並べた n 番目の観測データ x の累積分布値 $F(x)$ を n/N として計算する。

Step4 横軸を $\log(x/\gamma)$ 、縦軸を $-\log(1 - F(x))$ とした散布図を作成する。散布図を両対数軸で表すと一般化べき乗分布では直線上に並ぶ (図 7)。

$$\begin{aligned} & \log\{-\log(1 - F(x))\} \\ &= \alpha \log\{\log(x/\gamma)\} - \alpha \log(\beta) \end{aligned}$$

Step5 Step4 のデータを回帰分析して回帰直線 ($y = px + q$ とする) を求める。

Step6 回帰直線から形状パラメータ α と尺度パラメータ β を計算する。

$$\alpha = p$$

$$\beta = \exp\left(-\frac{q}{p}\right)$$

このように、一般化べき乗分布のパラメータは観測データから回帰分析を使って簡単に求めることができる。位置パラメータは最小データ値にすれば問題がない場合が多い。しかしながら、最小データよりも若干小さい値にした方が一般化べき乗分布への適合度が高くなる場合もある。そのような場合には、Step4 で散布図を見ながら位置パラメータを微調整した方がよい。

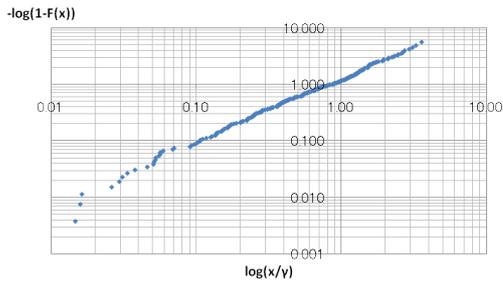


図 7 一般化べき乗分布の散布図

Fig. 7 Scatter Diagram of Generalized Power-Law Distribution

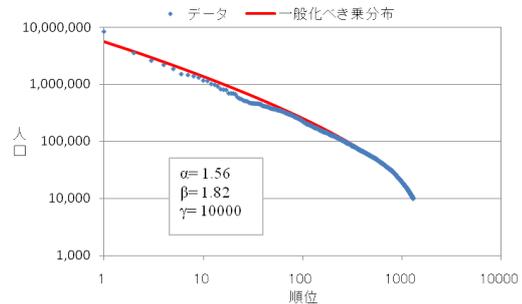


図 9 市町村別人口分布 (10000 人以上)

Fig. 9 Distribution of City Population (above 10000)

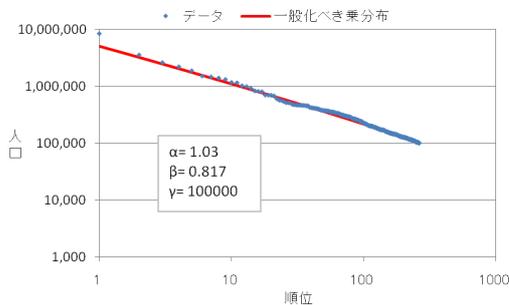


図 8 市町村別人口分布 (100000 人以上)

Fig. 8 Distribution of City Population (above 100000)

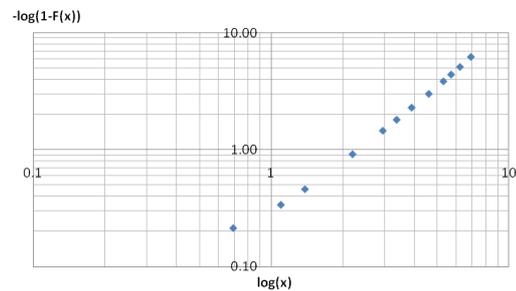


図 10 事業所規模の散布図

Fig. 10 Scatter Diagram of Business Office Volume

4. 一般化べき乗分布の適用

4.1 人口分布への一般化べき乗分布の適用

図 1 で示した市町村人口分布に一般化べき乗分布モデルを適用した結果を説明する．図 8 は 100000 人以上の市町村に対して一般化べき乗分布を適用した結果である．この場合は形状パラメータが 1 に近く、べき乗分布に近いことがわかる．散布図で回帰分析をした時の自由度調整済み決定係数 \bar{R}^2 の値は 0.997 と極めて高く、一般化べき乗分布の適合度が非常に高い．

範囲を広げて 10000 人以上の市町村を対象にして分析した結果が図 9 である．この場合も \bar{R}^2 は 0.998 で一般化べき乗分布が適合する．しかし形状パラメータは 1 より大きく、べき乗分布からのずれは大きくなる．

4.2 事業規模分布への一般化べき乗分布の適用

事業所規模のデータ (図 2) に対して一般化べき乗分布の適合度を評価した結果として、パラメータを計算する散布図を示したのが図 10 である．データが直線になっており、一般化べき乗分布が適用できることがわかる．

さらに、 e 分位値と変動係数を業界別に計算してプロットしたのが図 11 である．第一次産業に比べて、製造業や小売業では変動係数が大きいことから、業界内での事業規模のばらつきが大きいことがわかる．ま

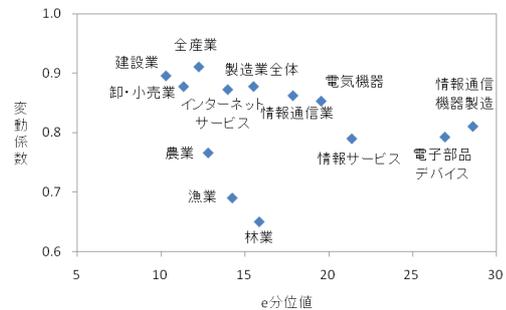


図 11 業界別の一般化べき乗分布特性値

Fig. 11 Characteristic Value of Generalized Power-Law Distribution for each Business Area

た、電子情報系の産業の中では、機器製造業やデバイス関連事業に比べてインターネットサービス事業は e 分位値が小さく、全体的に規模が小さい事業所が多いことが読み取れる．

このように、事業所規模のデータに対しては一般化べき乗分布が適合しているとともに、 e 分位値と変動係数から規模の大きさとばらつきの程度を評価するという視点から、業界の特徴を把握することができる．

5. 一般化べき乗分布を生成するダイナミックモデルの考察

5.1 一般化べき乗則ダイナミックモデル

前章で一般化べき乗分布が適合する事例を説明した。一般的に統計分布モデルが有効なモデルであるためには、観測データに適合することだけでは十分とはいえない。それに加えて、その分布モデルに適合するデータを生成するメカニズムが、わかりやすく幅広く応用できることが重要である。本章では、一般化べき乗分布に適合するデータを生成するダイナミックモデルを考察する。

定義 3 一般化べき乗則ダイナミックモデル

時間 t によって変動する変数を $X(t)$ とする（例えば市町村人口など）。

$X(t)$ の変動のしかたについて次の二つの仮定を設ける。

[仮定 1] $X(t)$ は一定比率 (λ) で増加 (成長) する。

$$\frac{d}{dt}X(t) = \lambda X(t)$$

$$X(t) = X(0) \exp(\lambda t)$$

[仮定 2] $X(t)$ が増加する期間には限界 (成長限界期間 L) があり、 L はワイブル分布にそって確率的に決まる。

$$Pr\{L \leq y\} = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{y}{\beta_L}\right)^{\alpha_L}\right\}$$

仮定 1 と仮定 2 が成立するという条件で変数 $X(t)$ が成長限界期間まで成長した成長限界規模の値を X_L とする。仮定 1 と仮定 2 から、 X_L は次のように確率的に決まる。

$$\begin{aligned} Pr\{X_L \leq z\} &= Pr\{L \leq \frac{1}{\lambda} \log(z/X(0))\} \\ &= 1 - \exp\left\{-\left(\frac{\log(z/X(0))}{\lambda\beta_L}\right)^{\alpha_L}\right\} \quad (12) \end{aligned}$$

式 (12) からわかるように、成長限界規模 X_L は一般化べき乗分布になる。

このことから、このモデルを一般化べき乗則ダイナミックモデルと呼ぶことにする。

5.2 一般化べき乗則ダイナミックモデルの解釈

一般化べき乗則ダイナミックモデルは、持続的成長と成長限界期間 (寿命) の二つの要素を元に構成されている。指数的な成長とワイブル分布にそった寿命を想定すると、成長限界値の分布が一般化べき乗分布になる。成長と寿命という二つの原理は、べき乗則が成立するといわれている多くの事例についても想定しやすい前提条件である。指数的な成長という仮定は成長のモデルとして理解しやすい条件である。ワイブル分布は寿命分布として広く使われており、成長限界期間

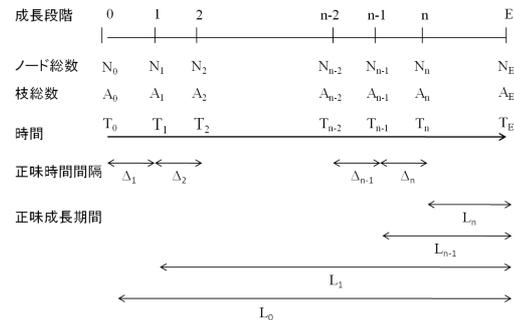


図 12 ネットワーク成長の特性値

Fig. 12 Characteristics of Network Growing Model

のモデルとしても理解しやすい条件である。

5.3 ネットワーク成長モデルとの関係

べき乗則になるスケールフリーのネットワークを生成するモデルがいくつか提案されている。その中の Barabási と Albert が提案したモデル (BA モデル⁷⁾) と一般化べき乗則ダイナミックモデルとの関係を考察する。

性質 6 BA モデルとの関係

BA モデルは一つずつ段階的にノードを追加しながらネットワークを成長させていくモデルである。図 12 のように、 n 段階目のノードを追加した時点で、ノードの総数と、枝の総数を N_n, A_n とする。新規に追加したノードで新しく結ぶ枝の数を a とすると、 N_n, A_n は次のようになる。

$$N_n = N_0 + n$$

$$A_n = A_0 + an$$

n 段階目にノードを追加した時に枝の総数が増加する割合は、その時点での枝の総数に反比例する。

$$n \text{ 段階目に枝が増加する割合} = a/A_{n-1} \quad (13)$$

この BA モデルと一般化べき乗則ダイナミックモデルとの関係を考察する。一般化べき乗ダイナミックモデルは時間にそって増加するモデルである。BA モデルによる増加でも時間軸の概念を導入し、 n 段階目にノードを追加する終了時を T_n とする (図 12)。ネットワークは単位時間当たり一定の増加率 (λ とする) で指数的にノードと枝の数が増加するものとする。時間 t での枝の総数 $A(t)$ は次のようになる。

$$\frac{d}{dt}A(t) = \lambda A(t) \quad (14)$$

このときに、式 (13) は、一つのノードの追加に要する各段階での時間 (正味時間間隔) が、枝の総数の増加にともなって短くなっているものと解釈することができる。 n 段階目の正味時間間隔 (Δ_n) を次のように定義できる。

$$A_n = A_{n-1} \exp(\lambda \Delta_n) \quad (15)$$

式 (15) と式 (13) から、次の関係式が成立する。

$$\Delta_n = \frac{1}{\lambda} \log\left\{1 + \frac{a}{A_0 + a(n-1)}\right\} \quad (16)$$

ネットワークの成長が進んで $n \gg 1$ となる段階では、 Δ_n は次のように近似できる。

$$\Delta_n \simeq \frac{1}{\lambda n} \quad (17)$$

n 段階目に追加されたノードの正味成長期間を L_n とする。 L_n は n に対して単調減少であり、最初に追加されたノードほど正味成長期間が長くなる。 $E(\gg 1)$ 段階目までネットワークが成長した時の正味成長期間の累積分布 $F(x)$ は次のようになる。

$$\frac{F(L_{n-1}) - F(L_n)}{L_{n-1} - L_n} = \frac{1}{N_0 + E \Delta_n} \quad (18)$$

$n \gg 1$ のときは、式 (17) より、式 (18) は、次のように近似できる。

$$\frac{F(L_{n-1}) - F(L_n)}{L_{n-1} - L_n} \simeq \lambda \{1 - F(L_n)\} \quad (19)$$

$n \gg 1$ とすると、 $L_{n-1} - L_n = \Delta_n \ll 1$ であり、式 (19) の左辺は累積分布の微分（確率密度関数）に近くなる。従って、 $n \gg 1$ の場合には、正味成長期間の分布が指数分布に近似できる。

以上のことにより、BA モデルは、成長率が一定で、成長限界期間が指数分布の一般化べき乗則ダイナミックモデルに対応して解釈することができる。成長限界期間が指数分布であることから、BA モデルに対応する成長限界規模はべき乗分布になる。

性質 7 他のネットワーク成長モデルとの関係

複雑ネットワークを生成するモデルには BA モデルの他に様々なモデルが提案されている。その一つに、適応度の概念を導入したモデルがある⁸⁾。適応度モデルでは、各ノードに対して適応度が定義され、適応度が高いノードほど他のノードと結びつきやすくなる。適応度モデルは、ノードを追加したときに、ノードの次数と適応度の積に比例した確率で枝を追加するノードを選択するモデルである。適応度モデルでは、速い段階で追加されかつ適応度が高いノードによる「一人勝ち」の状況が顕著に現れる。

適応度モデルを、一般化べき乗則ダイナミックモデルで解釈すると、成長率がノードによって異なる場合に相当する。BA モデルの場合では成長率がノードによらずに一定であったことと異なる。

具体例として、成長率が一樣分布にしたときの一般化べき乗則ダイナミックモデルをシミュレーションしたときのパラメータを求めるための散布図が図 13 である。この場合もデータが直線状に並び、一般化べき乗分布に近い分布になる。図 13 での形状パラメータは 0.7 となり、成長率が一律の場合（べき乗分布）の 1 よりも小さい。適応度モデルは形状パラメータが 1 以下の一般化べき乗分布に相当すると解釈することができる。

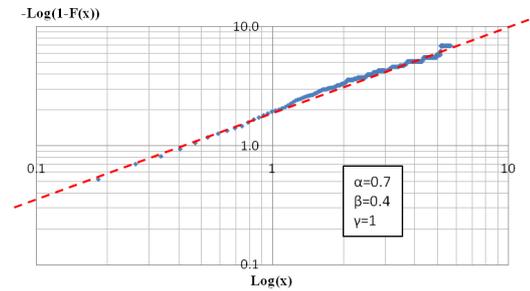


図 13 一般化べき乗則ダイナミックモデルのシミュレーション (2)
 Fig. 13 Simulation of Generalized Power-Law Dynamic Model(2)

6. おわりに

本論文で提案した一般化べき乗分布モデルの利点は次の通りである。

- モデルが照合するデータの範囲が広い。
- パラメータの計算が容易である。
- 観測データについての制約が少なく、詳細なデータがなくても分析できる。
- 分布データを生成するモデルがわかりやすい。

一般化べき乗分布は上記の利点を持った新しい統計モデルであり、今後広い領域で適用できることが期待できる。特に、一般化べき乗則ダイナミックモデルで焦点にした成長と寿命という二つの軸から適用分野の特性を分析することは有望な研究テーマである。

参考文献

- 1) 井庭 崇, 福原義久: 複雑系入門—知のフロンティアへの冒険, NTT 出版 (1998).
- 2) 増田直紀, 今野紀雄: 複雑ネットワークの科学, 産業図書 (2005).
- 3) 総務省: 平成 17 年国勢調査, e-stat 政府統計の総合窓口 (2010).
- 4) 総務省: 平成 18 年事業所・企業統計調査, e-stat 政府統計の総合窓口 (2006).
- 5) 真鍋肇編: 新版 信頼性工学入門, 日本規格協会 (2010).
- 6) 杉山高一他編: 統計データ科学辞典, 朝倉書店 (2007).
- 7) Albert, R. and A.-L.Barabási: Statistical mechanics of complex networks, *Review of Modern Physics*, No.74, pp.47-97 (2002).
- 8) G.Bianconi and A.-L.Barabási: Competition and multiscaling in evolving networks, *Europhysics Letters*, No.54(4), pp.436-442 (2001).