情報処理学会論文誌　Vol. 50　No. 12　3127–3135 (Dec. 2009)

# 連邦制における<br>議員定数の配分アルゴリズムについて

一　森　哲　男[†1]

人口に比例して議員定数を配分することは一見簡単な問題と思えるが，実は意外と難しい．この問題はアメリカ合衆国憲法に記載されているが，200 年以上にわたり議論が続いており，解くことのできない問題ともいわれている．しかしながら，現時点では，この問題はヒル方式かウェブスター方式で解かれると考えられている．両方式間の最大の争点は，大州と小州間の配分議席数による偏りである．どちらの配分方式がより小さな偏りを与えるのか．本論文では，従来の考え方の矛盾点を明らかにし，新しい考え方により，ヒル方式だけでなくウェブスター方式も絶対的に小州に有利なこと，さらに，従来の定説どおり，ヒル方式がウェブスター方式より相対的に小州に有利なことを示し，ウェブスター方式の優位性を与えた．

# On Apportionment Algorithms in a Federal System

Tetsuo Ichimori[†1]

The problem of assigning seats in the U.S. House of Representatives based proportionally on the population of states is seemingly simple but to solve it is not. The U.S. Constitution poses this apportionment problem and the issues of which is the best method have been debated for more than 200 years. In fact, it might be considered to be unsolvable. However, at least at this moment, only one of Hill's and Webster's methods is believed to solve the apportionment problem. First it is shown that both methods favor the small states in our model, which appears to disagree with an established opinion. Since Hill's method favors the small states more than Webster's also in our model, the author's conclusion is that Webster's method is the best, which is outwardly the same as Balinski and Young's assertion.

†1 大阪工業大学
Osaka Institute of Technology

## 1. はじめに

わが国が江戸時代の 1787 年に，アメリカ合衆国憲法が制定された．この憲法の第 1 条第 2 節にこう述べられている．「下院議員および直接税は，連邦に加入する各州の人口に比例して，各州の間に配分される．（中略）実際の人口の算定は，（中略）10 年ごとに，法律の規定に従って行うものとする．（中略）各州は少なくとも 1 人の下院議員を持つものとする[⋆1]．」

現在，国連では，西暦の末尾が 0 の年に国勢調査を実施するように勧告しているが，アメリカでは 1790 年に，下院議員の州間での配分のために国勢調査が始まった．この 10 年ごとに行われる国勢調査は，人口と調査項目数が増加するに従ってその処理期間が長くなり，1880 年の国勢調査では全調査結果を報告するのに 7 年の期間を要するようになった．そのままでは 1890 年の国勢調査では 10 年以内に処理できない恐れが生じ，高速なデータ処理の必要性が生じた．このことがパンチカードシステムの開発につながり，その後のコンピュータの出現に大きな影響を与えたことはよく知られている．

人口に比例して議員定数を配分する問題はアメリカでは 200 年以上にわたり議論され続けており，現在でも完全には解決せず，解くことができない問題とも考えられている．しかしながら，現実には議員定数を配分する必要性があり，実際に，議員定数は配分されている．だから，現実的には何らかの方法で，具体的には，ヒル方式（現在，アメリカの下院で用いられている議席配分アルゴリズム）かウェブスター方式（それ以前に使われていたアルゴリズム）で解かれると考えられている．両方式間の最大の争点は，大州と小州間の配分議席数による偏りである．どちらの配分方式が，大州小州間に，より小さな偏りの配分を与えるのか．偏りに関する両者間の論争も長く激しいものであった．結局，20 世紀前半のハンティントンとウィルコックスの論争では 2 回，20 世紀最後のアーンストとヤングの論争では 1 回，第三者による判定が行われ，すべて，ヒル方式に軍配が上がった．

本論文では，アメリカを対象に議論を進めていくが，議員定数配分問題はアメリカだけの問題ではない．実際，代議制という政治システムを採用している国なら，どの国でも解決しなければならない問題である．もちろん，わが国もこの問題に直面している．1 票の価値の不平等に対し，国政選挙のたびごとに 1962 年から定数是正訴訟が絶えず起こり，マスコミを賑わしている．

ここで扱っている議員定数配分問題は連邦制での問題に限定している．つまり，アメリカ

⋆1 宮沢俊義編「世界憲法集第四版」（岩波書店，1983 年）より．

合衆国の下院や欧州議会などで，配分される議席を受け取るのは，州や国のように分裂したり，合併したりする可能性が少ないものを仮定している．連邦制国家でないが，日本やフランスの県のように，変化がほとんどない場合も含む．昔の日本の中選挙区制のように，絶えず変化する選挙区への議席の配分は対象外である．関連性はあるが，これは区割りの問題に深く関連しており別な議論が必要である．また，比例代表制での政党の得票数に比例して議席を配分する問題はほとんど同じ形をした問題である．しかしながら，この問題では小党乱立を防ぐために，小政党には議席を与えないのが一般的で，本論文で仮定している小州に 1 議席を保障する議席配分問題とは扱いを異にするものと考えられる．

本論文の 2 章はアメリカにおける議員定数配分の簡単な歴史を与え，3 章では，ハンティントンによる先駆的な研究について説明している．4 章では，配分の歴史上有名な 5 つの配分方式のアルゴリズムを紹介している．5 章から 7 章までは配分の偏り，すなわち，人口の多い州と少ない州に対する配分の偏りについて議論している．5 章では平面モデルでの解析の矛盾点を指摘し，6 章では線分モデルを使って，新しい解析を行った．8 章では，2 組の実際の人口データおよび 1 万組のランダムに作成したデータを用いて，数値計算を行い配分の偏りを求めた．最後の 9 章で本論文のまとめを述べている．

## 2. 議員定数配分

人口は整数値ではあるが非常に大きな数値であるため，連続値と考えることができる．一方，各州に配分される議席数は小さな整数値，つまり，離散値である．人口と議席数が比例するとはどのようにして実現すればよいのであろうか．いい換えれば，連続する数値に離散値を比例させるにはどうすればよいのであろうか？　わが国の答えは簡単である．最大剰余方式（別名ハミルトン方式）により人口比例配分が実現できると信じられている．

いま，3 つの州があり，それぞれの人口が 135 万人，333 万人，532 万人と仮定し，10 議席を配分する．3 州の総人口は 1,000 万人なので，各州の議席配分の理想値は，つまり，比例値はそれぞれ 1.35，3.33，5.32 議席となる．この理想値を取り分という．だから，最初の州には 1 議席と 0.35 議席が与えられ，2 番目の州は 3 議席と 0.33 議席，最後の州には 5 議席と 0.32 議席が与えられる．実際の配分議席数は整数値でなければならないので，小数点以下の端数を四捨五入することが考えられる．しかしながら，この場合，すべてが切捨てとなり，9 議席のみしか配分できず，1 議席が余る．逆に，このような丸め方をすれば，議席が不足する例も容易につくることができる．最大剰余方式では取り分の整数部分の議席数だけをまず配分する．配分されるのは 9 議席だけで，1 議席が余るが，この残余の 1 議席を，小数点以下の端数 0.35，0.33，0.32 の最大値 0.35 を持つ 1 番目の州に追加する．その結果，議席の配分は 2，3，5 となる．

最大剰余方式のアルゴリズム*1は以下のようになる．ここで，記号 $h$ は議員定数（議席総数），$s$ は州の総数，$p_i$ は州 $i$ の人口，$p = \sum_i p_i$ は総人口とする．

(1)　各州 $1 \leq i \leq s$ の取り分 $q_i = hp_i/p$ を求める．

(2)　各州 $i$ に $\lfloor q_i \rfloor$ 議席を与える．

(3)　残余の $h - \sum_i \lfloor q_i \rfloor$ 議席を小数点以下の端数 $q_i - \lfloor q_i \rfloor$ の大きい州から順に 1 議席ずつ追加する．

しかしながら，アメリカでは事情が違うようである．ワシントン大統領の時代，最大剰余方式により議席配分を行うことが議会により法案となったが，大統領による拒否権の初行使にあい，廃案となった．このときの拒否理由としてワシントン大統領は「各州の人口とこの法案（最大剰余方式）による配分議席数とのあいだに共通の割合が存在しない」と述べた．結局，ジェファソン方式*2（別名ドント方式）で最初の議席配分が行われた．やがて，ジェファソン方式は人口の多い州にきわめて有利*3ということでウェブスター方式（別名サンラグ方式）や最大剰余方式へと変化した．しかし，最大剰余方式には奇妙な現象が起こる．すべての州の人口を変化させず，議員定数のみを増加させると配分される議席数が減少する州が見つかった．

先ほどの数値例で $h = 11$ に増加させると，取り分は 1.485，3.663，5.852 となり，ステップ 2 で 1，3，5 の計 9 議席が配分される．残余の 2 議席が 3 番目と 2 番目の州に追加されて，配分は 1，4，6 となるが，1 番目の州の配分は以前の 2 議席から 1 議席へと減少した．

配分すべきパイが大きくなったのに分け前は減るのである．これをアラバマ・パラドックスという．やがて，最大剰余方式からウェブスター方式に戻った．しかし，この方式も人口の多い州に少し有利ということでヒル方式に代わり現在に至っている．

## 3. ハンティントンの先駆的研究

人口の多い州や少ない州に偏りのある配分方式は避けるべきであり，さらに，アラバマ・パラドックスも避けるべきと考えられるようになった．その結果，ウェブスター方式が用いられるようになったが，1920 年代になるとハンティントンの登場により事態が変化する[1)]．

*1 最低 1 議席を保証するには，このアルゴリズムを少し修正する必要がある．詳細は文献 6) 参照．
*2 ここの配分のアルゴリズムの詳細は 4 章で述べる．
*3 1830 年のニューヨーク州の取り分は 38.59 であったのに 40 議席も与えた．

州 $i$ と $j$ が人口 $p_i$ と $p_j$ を持つとし，$a_i$ 議席と $a_j$ 議席がそれぞれ配分されたとする．州 $i$ が $j$ に対して有利なら $a_i/p_i > a_j/p_j$ となる．そのときの，州 $i$ と $j$ の間の不平等の測りかたの 1 つは両辺の差：$a_i/p_i - a_j/p_j$ を求めることである．1 議席を州 $i$ から $j$ に移動すると，一般には，州 $j$ が有利となり，両者の不平等は $(a_j+1)/p_j - (a_i-1)/p_i$ となる．もし，この不平等が以前より小さくなるなら，この 1 議席の移動は実行すべきである．ただし，不等式 $a_i/p_i > a_j/p_j$ はタスキ掛けで 16 通りに書き換えが可能である．これら 16 通りの不平等に対し，議席の移動により配分が収束する（どの 2 州間でも議席の移動が起こらなくなる）ものもあれば，配分が振動するものもある．たとえば，不等式 $a_i/a_j > p_i/p_j$ による不平等の測りかた（$a_i/a_j - p_i/p_j$ を計算する）では配分は収束しない．簡単な数値例をあげてみる．いま 3 州があり，それぞれの人口を 405 万人，630 万人，965 万人とし，20 議席を配分する．仮に，初期配分を 5，6，9 とすれば，1 番目の州が明らかに一番有利である．1 番目の州から 3 番目の州への 1 議席の移動を考える．このとき，不平等は小さくなる：$5/9 - 405/965 > (9+1)/(5-1) - 965/405$ となる．よって，この 1 議席の移動を実行すると，配分は 4，6，10 となる．今度は，3 番目の州が一番有利である．3 番目の州から 2 番目の州への 1 議席の移動を考えると，$10/6 - 965/630 > (6+1)/(10-1) - 630/965$ なので，移動が実行され，配分は 4，7，9 と変わる．この配分では 2 番目の州が一番有利である．州 2 から州 1 への 1 議席の移動では $7/4 - 630/405 > (4+1)/(7-1) - 405/630$ となり，移動が行われ，次の配分は 5，6，9 となる．しかし，これは初期配分そのものである．

収束するのは 16 通りのうち 12 通りの不等式による不平等の測りかたで，それらは次の 5 つの配分方式のどれかと同じ結果を与える．5 つの方式とは具体的にアダムズ，ディーン，ヒル，ウェブスター，ジェファソン方式で，アメリカの配分の歴史に現れてきた歴史上の 5 方式である．ハンティントンの理論では配分方式はこの 5 方式しか存在しない．

これら歴史上の 5 方式のなかで，ジェファソン方式は人口の多い州に有利ということで，採用されなくなったが，アダムズ方式はちょうどこれと対照的に，人口の少ない州に有利ということが判明している．残る 3 方式の中で，ヒル方式の偏りが最も小さいとハンティントンは主張した．一方，これより少し前に，ウィルコックスはウェブスター方式の偏りが最も小さいと主張していた[2]．その結果，ヒル方式とウェブスター方式の優劣について，特に，偏りの大きさについて，ハンティントンとウィルコックスは 1920 年代から 1940 年代にかけて Science 誌上で激しく論争した．

この 20 世紀の大論争の結果，1929 年[3] と 1948 年[4] の 2 回にわたり，全米科学アカデミーは，当時の著名な数学者たちに判断を仰いだ．彼らによれば，ハンティントンによる一対比較アプローチで見つかる 5 方式のみが判断すべき対象で，アダムズ，ディーン，ヒル，ウェブスター，ジェファソン方式は人口の少ない州に有利な順に並んでいるため，真ん中に位置するヒル方式が中立というものであった．さらに，1992 年による最高裁の判決でも全員一致でヒル方式の合憲性を認めた[5]．

## 4. 歴史上の 5 方式のアルゴリズム

歴史上の 5 方式の配分は一対比較による議席移動により得られるが，それ以外の別な方法でも，これらの配分結果は得られる．アダムズ，ディーン，ヒル，ウェブスター，ジェファソン方式のそれぞれに対して，除数基準とよばれる関数 $d(a)$ を定義する．これはすべての非負の整数 $a$ に対して定義され，具体的にはそれぞれ，正の整数 $a \geq 1$ に対して

$$a,\quad \frac{a(a+1)}{a+0.5},\quad \sqrt{a(a+1)},\quad a+0.5,\quad a+1$$

とする．また，どの方式に対しても $d(0)=0$ とする．上記の 5 項のうち真ん中の 3 項はそれぞれ 2 整数 $a$，$a+1$ の調和平均，幾何平均，算術平均であるので，$a \geq 1$ のとき

$$a < \frac{a(a+1)}{a+0.5} < \sqrt{a(a+1)} < a+0.5 < a+1 \tag{1}$$

となる．また，$a \leq d(a) \leq a+1$ であり，単調増加関数：$d(a) < d(a+1)$ となる．

いま，除数とよばれる正の変数 $x > 0$ を考え，これをある値に固定する．州 $i$ の人口を $p_i > 0$ として

$$\frac{p_i}{x} = d(a) \tag{2}$$

を満たす[⋆1]正の整数 $a$ が存在すれば，その値を $b_i \geq 1$ とする．また，この等式を満たす州全体の集合を $T$ とする．だから，$i \in T$ ならば $p_i/x = d(b_i)$ となる．一方，集合 $T$ に属さない州 $i$ に対しては，関数 $d(a)$ の単調性より

$$d(a-1) < \frac{p_i}{x} < d(a) \tag{3}$$

を満たす正の整数 $a$ が必ず 1 つ存在するので，その値を $b_i \geq 1$ とする．

上記のようにして，すべての州に対し一義的に定まった $b_i$ に対し，全州にわたってこれらの和を求めると次の 3 つの場合のいずれかが生じる（当然のことながら，論文全体で，議

⋆1 現実にはめったに起こりそうにないが……

**表 1**　5 方式の配分結果と除数の範囲
Table 1　Apportionments and divisor values for 5 methods.

| State | Population | Adams | Dean | Hill | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,637 | 2 | 2 | 2 | 2 | 1 |
| 2 | 2,200 | 3 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | 2,428 | 3 | 3 | 2 | 2 | 2 |
| 4 | 2,475 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 |
| 5 | 2,750 | 3 | 3 | 3 | 3 | 2 |
| 6 | 88,510 | 86 | 87 | 88 | 89 | 91 |
| total | 100,000 | 100 | 100 | 100 | 100 | 100 |
| | $\max x$ | 1,041.29 | 1,011.66 | 1,010.41 | 1,000.11 | 972.63 |
| | $\min x$ | 1,029.19 | 1,011.58 | 1,000.13 | 990.00 | 962.07 |

席総数は州の数より大きい $h > s$ としている）： $\sum b_i > h$ となるか $\sum b_i + |T| < h$ あるいは $h - |T| \le \sum b_i \le h$．もし $\sum b_i > h$ ならば $x$ を増加し，$\sum b_i + |T| < h$ ならば $x$ を減少させ，再度，すべての州に対し $b_i$ を求める．計算効率を無視して，上記の手続きを繰り返せば最終的には

$$h - |T| \le \sum_{i=1}^{s} b_i \le h \tag{4}$$

を満たす除数 $x > 0$ の値およびすべての $b_i$ が求まるはずである．この除数 $x$ の値は，一般には，ある程度の範囲を持つ．**表 1** に，州の数 $s = 6$ で，議員定数 $h = 100$ となる数値例を与え，各配分方式の結果と除数 $x$ の最大値と最小値を与える．

集合 $T$ に属する州の中から，任意の $h - \sum b_i$ 個の州を選び，それらの州 $i$ には $a_i = b_i + 1$ 議席を配分し，残りのすべての州 $i$ には $a_i = b_i$ 議席を配分すればすべての議席が配分される．

歴史上の 5 方式はまた再帰的アルゴリズムとして記述することもできる．$p_i/0$ を定義し，$p_i/0 = p + p_i$ と約束する．ここで $p = \sum_i p_i$ は総人口である．いま，除数 $x$ の値は式 (4) を満足すると仮定する．集合 $T$ に属する州の中で $a_i = b_i + 1$ となる州 $i$ では式 (2) と $d(a)$ の単調性より $p_i/x = d(a_i - 1) < d(a_i)$ となり，$a_i = b_i$ となる州 $i$ では $p_i/x = d(a_i) > d(a_i - 1)$ となっている．さらに，集合 $T$ に属さない州 $i$ では式 (3) より $d(a_i - 1) < p_i/x < d(a_i)$ となる．

以上から，すべての州 $i$ に対して，$d(a_i - 1) \le p_i/x \le d(a_i)$ が成り立つ[⋆1]．すなわち，$p_i/d(a_i) \le x \le p_i/d(a_i - 1)$ となる．したがって，

$$\min_{1 \le i \le s} \frac{p_i}{d(a_i - 1)} \ge \max_{1 \le j \le s} \frac{p_j}{d(a_j)} \tag{5}$$

が成り立つ．よって，式 (5) と $\sum_i a_i = h$ を満たす各 $a_i$ を求めても配分は定まる．このことから，下記の再帰的アルゴリズム D が得られる．

(1)　各州 $i$ に対して $a_i = 1$ と初期化する．
(2)　$p_i/d(a_i)$ を最大にする州（の中で最小番号[⋆2]の州）を $k$ とする．
(3)　州 $k$ の議席数のみを 1 増加させる：$a_k = a_k + 1$.
(4)　$\sum_i a_i = h$ ならばストップ：各 $a_i$ を出力する．そうでなければ，ステップ (2) にもどる．

この構成より，歴史上の 5 方式は議員定数 $h$ に関して配分 $a_i$ が単調増加であり，アラバマ・パラドックスを避けることが分かる．また，式 (5) の両辺に任意の正の実数 $\lambda > 0$ をかけても何も変わらないので，2 つの人口ベクトル $(p_1, \ldots, p_s)$ と $(\lambda p_1, \ldots, \lambda p_s)$ に対してアルゴリズム D は同一の配分を与える．

## 5. 平面モデルでの偏り

後年，バリンスキーとヤングはヒル方式とウェブスター方式の偏りについて詳しく研究した[6)]．2 州間の配分は他の州の配分には独立に決まるという性質[⋆3]をどちらの配分方式も持つことから，2 州間の配分の偏りを調べた．その結果，ヒル方式は人口の少ない州に有利であり，ウェブスター方式は中立であることを理論的に示した．さらに，実際の過去の人口データでもそのことを立証した．しかしながら，1992 年の最高裁の裁判の過程ではアーンストがまったく同じ事柄に対して，ウェブスター方式は人口の多い州に有利で，ヒル方式がある意味中立であることを証明し，実際のデータでも成り立つことを示した[7)]．この両者の食い違いは，彼らの設定した前提条件にある．

アメリカの憲法では人口の少ない州にも 1 議席を保証するので，もともと，小州が有利である．そこで，その偏りを除去するために，バリンスキーとヤングは商や取り分が 0.5 以下の州を無視した．一方，アーンストは 1.0 以下の商と取り分の州を無視した．これが，両者間の矛盾の原因である．

⋆1 $p_i/x = d(a_i)$ ならば州 $i$ に配分される議席数は $a_i$ と定義する論文も見受けられるが，これは正しくない．この定義では実行可能な配分が得られないこともある．
⋆2 以下の説明を容易にするため．実のところ $p_i/d(a_i)$ を最大にする州であればどれでも良い．
⋆3 バリンスキーとヤングはこの性質を一様性といった．

彼らは $p_ip_j$ 平面上の正の領域 $p_i > 0$，$p_j > 0$ 全体上で人口が一様に分布すると仮定した．そして，その正の領域の中に特定の四角形を定義して，配分方式の偏りを調べた．除数 $x > 0$ を固定して，整数 $a_i > a_j \geq 1$ に対してバリンスキーとヤングの四角形の頂点座標は $(d(a_i-1)x, d(a_j-1)x)$，$(d(a_i)x, d(a_j-1)x)$，$(d(a_i)x, d(a_j)x)$，$(d(a_i-1)x, d(a_j)x)$ である．

州 $i$，$j$ の人口の順序対 $(p_i, p_j)$ がこの四角形の内部に存在するとき，$d(a_i-1) < p_i/x < d(a_i)$，かつ $d(a_j-1) < p_j/x < d(a_j)$ なので，式 (3) より，州 $i$，$j$ にはそれぞれ $a_i$，$a_j$ 議席数が配分される．また，順序対 $(p_i, p_j)$ はこの四角形の中で一様分布しているので，$a_j/p_j > a_i/p_i$ となる確率，すなわち，小州が有利となる確率は，この四角形の直線 $p_j = (a_j/a_i)p_i$ より下側の面積とこの四角形全体の面積の比に等しい．このことからバリンスキーとヤングはウェブスター方式には偏りがない，つまり，小州が大州より有利となる確率は 0.5 であることを示した．さらに，ヒル方式では小州が有利になることを示した．

もちろん，上記の四角形は $i$，$j$ の対称性から整数 $a_j > a_i \geq 1$ に対しても定義でき，結論も変わらない．しかしながら，$p_ip_j$ 平面の正の領域 $p_i > 0$，$p_j > 0$ 全体を考えると，バリンスキーとヤングの四角形全体は，この領域をすべて覆い尽くしているわけではない．原点を通る傾き 1 の直線 $p_j = p_i$ に沿った四角形，すなわち，$a_i = a_j \geq 1$ に対応する四角形全体が抜け落ちている．また，ウェブスター方式では $0 < p_i < 0.5x$，または，$0 < p_j < 0.5x$ の人口の少ない領域が抜け落ちている．これらの領域ではすべて 100%小州に有利である．だから，整数 $a \geq 0$ に対して，$0 < p_i < (a+0.5)x$，かつ $0 < p_j < (a+0.5)x$ となる有限の大きさの四角形領域の中では，ウェブスター方式は小州に有利である．**図 1** は $a = 5$ で，ウェブスター方式を用いたとき，小州が有利となる領域を影で示している．マス 1 つの幅が $x$ である．実際，この四角形領域の中で，小州が有利となる面積は，簡単な計算より，

$$a + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a(a+1)$$

の $x^2$ 倍となり，四角形の面積 $(a+0.5)^2x^2$ との比を考えると

$$\frac{0.5a^2 + 1.5a + 0.25}{a^2 + a + 0.25} > 0.5$$

となり，小州に有利である．しかしながら，彼らは正の領域 $p_i > 0$，$p_j > 0$ 全体で人口が一様に分布すると仮定していたので，この正の領域全体では $a \to \infty$ のとき

$$(0.5a^2 + 1.5a + 0.25)/(a^2 + a + 0.25) \to 0.5$$

となり，偏りがなくなる．また，同様の計算を行うことにより正の領域全体でヒル方式も偏りがなくなる．

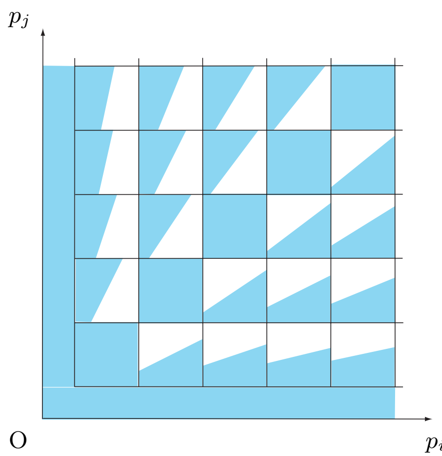


**図 1**　バリンスキーとヤングの四角形と小州有利の領域
Fig. 1　B&Y's squares and regions in which the smaller is favored.

一方，アーンストの四角形（正方形）の頂点は整数 $a_i > a_j \geq 1$ または $a_j > a_i \geq 1$ に対して $(a_ix, a_jx)$，$((a_i+1)x, a_jx)$，$((a_i+1)x, (a_j+1)x)$，$(a_ix, (a_j+1)x)$ であり，この四角形上でアーンストはウェブスター方式を考えた．州 $i$，$j$ の人口の順序対 $(p_i, p_j)$ がこの四角形の内部に存在するとき，式 (3) を用いると，その存在する位置により，州 $i$，$j$ の配分議席数は $(a_i, a_j)$，$(a_i+1, a_j)$，$(a_i, a_j+1)$ または $(a_i+1, a_j+1)$ となる．アーンストは，ウェブスター方式に対し，大州が有利となる面積は小州が有利となる面積より完全に大きいことを示した．つまり，ウェブスター方式が大州に絶対的に有利であることを示し，バリンスキーとヤングの主張を否定した．

さらに，アーンストはこの四角形上でヒル方式には偏りがないことを主張した．いま，この四角形での州 $i$，$j$ の配分議席数の順序対を $(b_i, b_j)$ とする．だから，$b_i = a_i, a_i+1$，$b_j = a_j, a_j+1$ である．そして，人口の順序対 $(p_i, p_j)$ がこの四角形内で一様分布する確率変数とすれば，$p_i/b_i$ の平均と $p_j/b_j$ の平均が等しくなることを証明し，ヒル方式には偏りがないことを主張した．しかし，この主張はきわめて奇妙なものである．たとえば，$a_i = 1$，$a_j = 2$ に対する四角形でヒル方式が小州に有利となる面積を計算してみると，全体の 53.5%となり，ヒル方式は小州に有利となっている．つまり，途中から偏りの定義が変

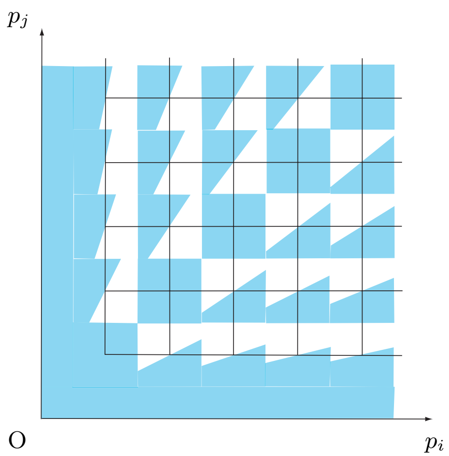


**図 2**　アーンストの四角形と小州有利の領域
Fig. 2　Ernst's squares and regions in which the smaller is favored.

わってしまっている．

また，アーンストの四角形も正の領域 $p_i > 0$，$p_j > 0$ 全体を覆い尽くしているわけではなく，$a_i = a_j \geq 1$ に対応する四角形全体が抜け落ちている．これらの四角形上でウェブスター方式を考えると，小州が有利となる面積は大州が有利になる面積に等しく，偏りがない．また，$0 < p_i < x$，または，$0 < p_j < x$ の領域も抜け落ちている．ここでは，ほぼ 100%小州に有利である．**図 2** ではマス 1 つの幅が $x$ であり，アーンストの四角形およびウェブスター方式で小州が有利となる領域（影の部分）を示している．この影の領域は当然ながら図 1 の影の領域と同一である．

結局のところ，対象とする四角形をどのように選ぶかで，結論が異なってくる．しかも，以前に述べたように，彼らは人口の少ない範囲および $a_i = a_j \geq 1$ に対応する四角形をすべて無視しているため，その結果は必ずしも納得できるものではない．そもそも，彼らは正の領域 $p_i > 0$，$p_j > 0$ 全体で人口が一様に分布すると仮定しているわけで，その場合，どちらの配分方式も大州にも小州にも偏りはないわけで，両者を比較することができない．

## 6. 線分モデルでの偏り

前章のことから，$p_ip_j$ 平面上の正の領域全体 $p_i > 0$，$p_j > 0$ で人口が一様に分布する平面モデルではヒル方式とウェブスター方式の偏りの大小を比較することはできない．そこで，次のような別な線分モデルを考えてみる，人口 $p_i$，$p_j$ を持つ州 $i$，$j$ が $\eta \geq 2$ 議席を分け合うと仮定する．ただし，$\eta = 2$，3 の場合の偏りは自明なので，以下では $\eta \geq 4$ と仮定する．それぞれの人口を次のように標準化する：$\lambda = \eta/(p_i + p_j)$ として

$$\pi_i = \lambda p_i, \quad \pi_j = \lambda p_j.$$

明らかに $\pi_i + \pi_j = \eta$ となるが，ここでは，標準化した人口 $\pi_i$，$\pi_j$ が $\pi_i\pi_j$ 平面上の線分 $\pi_i + \pi_j = \eta$（$\pi_i > 0$，$\pi_j > 0$）上を一様に分布していると仮定し，ヒル方式とウェブスター方式の偏りを調べる．もちろん，この $\eta$ の値もどこまで大きな数値を考えるかは重要であるが，以下の議論により，ここの結論は $\eta$ の値には独立である．

いま $1 \leq a \leq \eta - 2$ として，州 $i$ が $a$ または $a + 1$ 議席を受け取り，州 $j$ がそれぞれ $\eta - a$ または $\eta - a - 1$ 議席を受け取る標準化人口 $\pi_i$ の値を求める．4 章の最後で述べたが，$(\pi_i, \pi_j) = \lambda(p_i, p_j)$ なので，人口 $(p_i, p_j)$ と標準化人口 $(\pi_i, \pi_j)$ は同一の配分をアルゴリズム D は与える．よって，式 (2) より適当な $x > 0$ を用いると $\pi_i/x = d(a)$ かつ $\pi_j/x = (\eta - \pi_i)/x = d(\eta - a - 1)$ となる．これらの関係式より求める標準化人口 $\pi_i = d(a)\eta/(d(a) + d(\eta - a - 1))$ が得られる．ここで，この右辺の値を $Q(a)$ とおく．すなわち，

$$Q(a) = \frac{d(a)\eta}{d(a) + d(\eta - a - 1)}, \qquad 1 \leq a \leq \eta - 2, \eta \geq 4 \tag{6}$$

とおく．説明上 $Q(0) = 0$ も定義しておく．$Q(a)$ は配分方式により異なるので，配分方式を明示する場合，添え字 $A$，$D$，$H$，$W$，$J$ を付ける．それぞれはアダムズ，ディーン，ヒル，ウェブスター，ジェファソン方式を意味する．いま，$Q(a) = d(a)x$ の関係が得られるが，除数 $x$ は

$$x = \frac{\eta}{d(a) + d(\eta - a - 1)} \tag{7}$$

なので，$\eta$ や $a$ が共通でも，各配分方式により $x$ は異なることに注意する．

上記の $Q(a) = d(a)x$ の関係より，式 (3) の $p_i$ を $\pi_i$ で書き換えた式 $d(a-1) < \pi_i/x < d(a)$ は $Q(a-1) < \pi_i < Q(a)$ と等価なので，この関係が成り立つとき，州 $i$ には $a$ 議席が配分される．また，式 (6) の $Q(a)$ の定義式自身より，$Q(a) + Q(\eta - a - 1) = \eta$ となるので，州 $i, j$ の受け取る議席の順序対は，$\pi_i < Q(1)$ ならば $(1, \eta - 1)$ 議席，$1 \leq a \leq \eta - 3$ に対して $Q(a) < \pi_i < Q(a + 1)$ ならば $(a + 1, \eta - a - 1)$ 議席，$\pi_i > Q(\eta - 2)$ ならば $(\eta - 1, 1)$ 議席となる．

アメリカの憲法は人口の少ない州にも 1 議席を保証するので，妥当な方式はそもそも小州に偏っている．以前の研究では，この憲法上の偏りを消すため，取り分がある値以下の州を考慮から除外した．最高裁も少なくとも取り分が 1.5 以下の州を無視することは理に適っていると述べている[5]．しかしながら，どの値より小さな商や取り分を無視するのが正しいのかを理論的に決めることは難しい．そこで，ここでは，そのような仮定は設けないことにし，小州への偏りを認めながら，その偏りの小さいものを良しとする．

次に，$1 \leq a \leq \eta - 2$ に対して $Q(a) \geq a$ を証明する．いま，2 州 $i$，$j$ のみを対象としており，アルゴリズム D は人口 $(p_i, p_j)$ と標準化人口 $(\pi_i, \pi_j)$ に対して同一配分を与えることに注意すると，式 (5) より

$$\min\left\{\frac{\pi_i}{d(a_i-1)}, \frac{\pi_j}{d(a_j-1)}\right\} \geq \max\left\{\frac{\pi_i}{d(a_i)}, \frac{\pi_j}{d(a_j)}\right\}$$

が得られる．この不等式から $\pi_j/d(a_j-1) \geq \pi_i/d(a_i)$ が導かれる．いま，$\pi_i = a$，$\pi_j = \eta - \pi_i = \eta - a$ とおき，式 (2)，(3) で $x = 1$ とすれば州 $i$，$j$ の配分議席を $a_i = a$，$a_j = \eta - a$ とすることができる．これを代入すると $(\eta - a)/d(\eta - a - 1) \geq a/d(a)$ が得られる．この式を整理すると，$d(a)\eta/(d(a) + d(\eta - a - 1)) \geq a$，すなわち，$Q(a) \geq a$ が得られる．同様にすれば，$Q(a) \leq a + 1$ も導かれる．よって，$1 \leq a \leq \eta - 2$ に対して $a \leq Q(a) \leq a + 1$ となる．

$0 \leq a \leq \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ に対して，線分モデル $\pi_i + \pi_j = \eta$ を考える．$a + 1 \leq Q(a + 1)$ なので，$Q(a) < \pi_i < a + 1$ ならば州 $i$ に $a + 1$ 議席，州 $j$ に $\eta - a - 1$ 議席が与えられる．また，州 $j$ の人口は $\pi_j = \eta - \pi_i > \eta - a - 1 \geq a + 1 > \pi_i$ となり，州 $j$ が大州，州 $i$ が小州となる．これらの関係から，$(a + 1)/\pi_i > (\eta - a - 1)/\pi_j$ となり，小州 $i$ が大州 $j$ に比べて有利となる．

同様に，$0 \leq a \leq \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ に対して，$Q(a) < \pi_j < a + 1$ ならば州 $j$ が小州となり，州 $j$ が有利となる．

よって，小州が有利となるのは，$0 \leq a \leq \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ に対して，$\pi_i$ または $\pi_j$ が区間 $(Q(a), a + 1)$ に属するときなので，線分 $\pi_i + \pi_j = \eta$（$\pi_i > 0$，$\pi_j > 0$）上で，小州が有利となる確率 $P$ は

$$P = \sum_{a=0}^{\lfloor \eta/2 \rfloor - 1} 2\{a + 1 - Q(a)\}/\eta, \qquad \eta \geq 4 \tag{8}$$

となる．確率 $P$ も配分方式により異なるので，必要な場合，添え字 $A$，$D$，$H$，$W$，$J$ を付けてこれらを区別する．ところで，$\eta = 2$ ならば，どの方式でも $P = 1$，すなわち，どの配分方式も 100%小州に有利となり，$\eta = 3$ の場合に対しても，すべての方式は小州に有利で $P = 2/3$ となることは明らかである．上記の式 (8) に $\eta = 2$，3 をそれぞれ直接代入しても同じ結果が得られるので，式 (8) は整数 $\eta \geq 2$ に対して成り立つといえる．

$a \geq 1$ のとき，ウェブスター方式ならば $d(a) = a + 0.5$ なので，$Q(a)$ から $\eta$ の項が消えて $Q(a)$ は簡単になる：

$$Q_W(a) = \frac{d(a)\eta}{d(a) + d(\eta - a - 1)} = a + 0.5$$

ただし，$Q_W(0) = 0$ である．これらのことから，小州が有利となる確率式 (8) は

$$P_W = \frac{2(0.5(\lfloor \eta/2 \rfloor - 1) + 1)}{\eta} = \frac{\lfloor \eta/2 \rfloor + 1}{\eta} > 0.5$$

となる．よって，ウェブスター方式は，$\eta$ には独立に，小州に有利となっている．従来の研究において，ウェブスター方式が大州に有利と主張されることはあっても，小州に有利ということは 1 度も主張されたことがない．その意味において，ここの結果は完全に新規のものであり，かつ，有意なものとなっている．

次に，ヒル方式を考える．ヒル方式の $Q(a)$ は $\eta$ の項を含み

$$Q_H(a) = \frac{\sqrt{a(a+1)}\eta}{\sqrt{a(a+1)} + \sqrt{(\eta - a - 1)(\eta - a)}}$$

となっている．$1 \leq a \leq \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ のとき，以下に示すように $Q_H(a) < Q_W(a)$ という関係が成り立つ．いま，$b = \eta - a - 1$ とおく．$1 \leq a \leq \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ ならば $0 < a < b$ となる．関数 $y = \sqrt{x(x+1)}/(x + 0.5)$，$x \geq 0$ を考えると，$y' > 0$ より，これは狭義の増加関数となる．だから

$$\frac{\sqrt{a(a+1)}}{a + 0.5} < \frac{\sqrt{b(b+1)}}{b + 0.5}$$

となる．ここで便宜的に，$A = \sqrt{a(a+1)}$，$B = \sqrt{b(b+1)}$ とおくと，この式は $(b+0.5)A < (a + 0.5)B$ となる．$\eta - a - 0.5 = b + 0.5$ なので，$(\eta - a - 0.5)A < (a + 0.5)B$，つまり，$A\eta < (a + 0.5)(A + B)$ となる．よって，

$$\frac{A\eta}{A + B} < a + 0.5$$

となる．$Q_H(a) = A\eta/(A + B)$ であり，$Q_W(a) = a + 0.5$ なので，$1 \leq a \leq \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ の

とき，$Q_H(a) < Q_W(a)$ が証明された．

このことから，$1 \le a \le \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ のとき，

$$a + 1 - Q_H(a) > a + 1 - Q_W(a) = 0.5$$

となるので，$\eta \ge 4$ のとき $a$ に関して総和を求めると，式 (8) から，ヒル方式はウェブスター方式より確率的に小州有利となっている：$P_H > P_W$．

以上をまとめると，ヒル方式もウェブスター方式もどちらも，小州に有利であるが，その偏りはヒル方式のほうが完全に大きい．ゆえに，偏りの観点から，ウェブスター方式はヒル方式より優れているといえる．

## 7. ジェファソン方式

前章の解析と同様にすれば，$\eta \ge 4$ かつ $1 \le a \le \lfloor \eta/2 \rfloor - 1$ のとき，

$$Q_A(a) < Q_D(a) < Q_H(a) < Q_W(a) < Q_J(a)$$

となることが示せるので，小州有利となる確率は

$$P_A > P_D > P_H > P_W > P_J \tag{9}$$

となる．よって，確率的に解釈すれば，従来から主張されているように，アダムズ，ディーン，ヒル，ウェブスター，ジェファソン方式の順に相対的に小州に有利な順序となることが，この線分モデルにおいても確認できる．また，前章のことから，最初の 4 方式は $\eta$ の値にかかわらず，絶対的にも小州に有利であることが分かる．最後のジェファソン方式は絶対的に大州に有利といわれているが，必ずしも，そうとは限らない．つまり，$\eta$ の値に依存して，大州に有利となったり，小州に有利となったりする．たとえば，人口が 20 万人，30 万人，250 万人の州が 3 つあり，総定数を 3 とすれば，3 州とも最低 1 議席は保証されるので，その配分議席数はすべての州が 1 となる．明らかに，小州が有利となっている．結論の配分結果から考えれば，任意の 2 州間の配分では 2 議席を分かち合っている．すなわち，$\eta = 2$ となっているわけで，式 (8) の直後で述べたように，どの 2 州間でも 100%小州に有利となる．

ただし，現実のデータでは，小州有利とはならない．アメリカの下院の場合，$h = 435$ 議席，$s = 50$ 州であるので，1 州あたりの配分議席数の平均値は 8.7 となる．2 州間ではその倍の 17.4 議席を分かち合っている．いま，$\eta = 17$ として，ジェファソン方式が小州を有利にする確率を式 (8) から求める．$Q(0) = 0$，$1 \le a \le 7$ に対して，式 (8) より $Q(a) = 17(a+1)/18$ となるので，

$$P_J = \frac{2(1 + \sum_{a=1}^{7}(a+1)/18)}{17} \fallingdotseq 0.35$$

となる．同様に，$\eta = 18$ でも $P_J \fallingdotseq 0.35$ となり，ジェファソン方式では平均的に 65%大州に有利となる．

ちなみに，式 (8) において $\eta = 8$ のとき $P_J = 0.5$ となり，$\eta > 8$ のとき $P_J < 0.5$ となるので，1 州あたりの議席数が 4 以上ならばジェファソン方式は大州に有利になる．

## 8. 数 値 計 算

人口が線分モデルに従って一様分布しているならば，5 方式間で，小州が相対的に有利となる順番は明らかであるし，ウェブスター方式の小州への偏りがヒル方式より小さいことも明らかである．しかしながら，現実の人口分布がどのようになっているかは明らかではない．たとえば，アメリカの人口分布を時系列で眺めてみれば，異なる年代間の人口分布は非常に強い相関関係を持つ．実際，ニューヨーク州の人口は 1810 年の国勢調査から 1960 年の国勢調査まで全米で最大であった．また，ヒル方式とウェブスター方式の結果も，多くの場合，同一結果となるため（実際，2000 年度の配分結果は一致），両者の偏りを比較するには注意が必要である．そこで，まったく関係がなく，かつ，ヒル方式とウェブスター方式の結果が異なる，アメリカと日本の人口に対して，歴史上の 5 方式の偏りを計算してみた．

アメリカでは，配分方式がウェブスター方式からヒル方式に代わった 1940 年度の人口を用いた．当時の州の数はアラスカとハワイがまだ州ではなかったので，州の総数 $s$ は 48 であった．ただし，下院議員定数 $h$ は現在と同じ 435 であった．48 州のうちから 2 州 $i$，$j$ を選ぶ．人口の少ない方を $i$ とする．つまり，$p_i < p_j$ である．実際，同一人口の州は存在しなかった．州 $i$ に $a_i$ 議席が配分され，州 $j$ には $a_j$ 議席が配分されたとする．このとき，$a_i/p_i > a_j/p_j$ ならば，小州 $i$ が有利である．すべての組合せは ${}_{48}C_2 = 48 \times 47/2 = 1,128$ 通りであるが，そのうち，小州が有利となった組合せを 5 方式それぞれに対して求めた．そして，全体 1,128 通りに対する割合を求めたものが**表 2** である．ここではディーン方式とヒル方式の配分結果が一致しているため，両者の偏りが一致している．

次に，わが国の 2000 年度の人口分布に対して，各方式による配分の偏りを調べてみた．都道府県数 $s = 47$，小選挙区選出衆議院議員定数 $h = 300$ の各配分の偏りの結果は**表 3** のとおりである．

**表 2**　アメリカの 1940 年の配分の偏り
Table 2　Bias of the 1940 apportionment in U.S.A.

| Adams | Dean | Hill | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|
| 80.67% | 61.79% | 61.79% | 60.64% | 27.66% |

**表 3**　日本の 2000 年の配分の偏り
Table 3　Bias of the 2000 apportionment in Japan.

| Adams | Dean | Hill | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|
| 71.60% | 62.26% | 60.32% | 55.13% | 32.93% |

**表 4**　アメリカの $10^4$ 個の配分の偏りの平均値
Table 4　Average bias over $10^4$ hypothetical apportionments in U.S.A.

| Adams | Dean | Hill | Webster | Jefferson |
|---|---|---|---|---|
| 75.61% | 58.89% | 56.84% | 54.78% | 35.95% |

最後に，アメリカの全州の人口をランダムに与えた問題を 1 万個作成し，各配分方式の偏りの平均値を求めた．州の数や議員定数は現在と同じ $s=50$，$h=435$ とした．結果は**表 4** のとおりである．2000 年度の国勢調査によるとワイオミング州の人口が最小で約 50 万人，カリフォルニア州の人口が最大で約 3,400 万人である．そこで，ワイオミング州の人口の約半分の 25 万人からカリフォルニア州の人口の約 2 倍の 6,800 万人までの範囲で一様乱数（整数値）を発生させて，各州の人口とした．

確率の観点からすれば，すべての結果に共通することはアダムズ方式，ディーン方式，ヒル方式，ウェブスター方式，ジェファソン方式の配分がこの順番で小州に有利なこと，最初の 4 つは絶対的に小州に有利な（50% より大きい）こと，その 4 つのなかで，ウェブスター方式が最も中立な（50% に最も近い）ことである．

## 9. おわりに

ヒル方式とウェブスター方式の優劣の議論はほぼ 90 年間続いている．議論の争点は，各配分方式の大州と小州への配分の偏りに集中している．ただし，アメリカの憲法は小州有利を定めており，偏りのない配分方式を決めることを困難にしている．そのため，以前の研究では，非常に小さな州を除去してから，各配分方式の偏りを求めていた．しかしながら，その除去する人口の閾値の違いから，結論が対立していた．本論文のユニークな点は，憲法が要請している小州有利を最初から認めたことである．つまり，非常に小さな州の除去という曖昧さをなくした．そして，歴史上の 5 方式から大州有利なジェファソン方式を除き，残り 4 方式が（ウェブスター方式を含め）小州に有利であることを示し，それらの中から最も中立なものがウェブスター方式であることを示した．

最終結論はバリンスキーとヤングのものと同じであるが，その導出過程が彼らとは異なり新たなものとなっている．

## 参 考 文 献


1) Huntington, E.V.: The Apportionment of Representatives in Congress, *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol.30, pp.85–110 (1928).
2) Willcox, W.F.: The Apportionment of Representatives, *The American Economic Review*, Vol.6, No.1, Supplement, pp.3–16 (1916).
3) Bliss, G.A., Brown, E.W., Eisenhart, L.P. and Pearl, R.: Report to the President of the National Academy of Science (1929).
4) Morse, M., von Neumann, J. and Eisenhart, L.P.: Report to the President of the National Academy of Science (1948).
5) Stevens, J.: Opinion in United States Department of Commerce v. Montana, 112 Supreme Court 1415 (1992).
6) Balinski, M.L. and Young, H.P.: *Fair Representation*, Yale University Press, New Haven, CT (1982). 越山　康，一森哲男（訳）：公正な代表制，千倉書房 (1987).
7) Ernst, L.R.: Apportionment Methods for the House of Representatives and the Court Challenges, *Management Science*, Vol.40, No.10, pp.1207–1227 (1994).


(平成 21 年 4 月 12 日受付)
(平成 21 年 9 月 11 日採録)

**一森　哲男**（正会員）
昭和 28 年生．昭和 57 年大阪大学大学院工学研究科応用物理学専攻博士後期課程修了．同年広島大学工学部助手．昭和 60 年より大阪工業大学工学部専任講師．昭和 63 年より大阪工業大学工学部助教授．平成 8 年より大阪工業大学情報科学部教授．システムの最適化関する研究に従事．工学博士．昭和 62 年日本オペレーションズ・リサーチ学会事例研究奨励賞受賞．日本オペレーションズ・リサーチ学会，日本応用数理学会，日本経営工学会各会員．